Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA SCENARIER OG MODULER

(denne side er med vilje blank)

MERIA SCENARIER OG MODULER

HOVEDREDAKTØR
Kristijan Cafuta

TEKST SKREVET AF
Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Britta Jessen, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

DESIGN
Irina Rinkovec

OVERSÆTTELSE TIL DANSK
Jeanette Axelsen, Britta Jessen, Carl Winsløw

Project MERIA, August 2019
www.meria-project.eu

(denne side er med vilje blank)

Indholdsfortegnelse

Introduktion

Håndbogen *MERIA Scenarier og Moduler* repræsenterer et af de vigtigste resultater fra MERIA-projektet og omfatter fem (i den danske version 4) undervisningsscenarier med de tilhørende moduler. Strukturen eller "modellen" for scenarierne og modulerne er blevet introduceret i *MERIA Skabelon for scenarier og moduler*, hvor et scenarie og tilhørende modul blev fremvist som eksempel på opbygningen af materialerne fra MERIA-projektet. Materialernes design og den teoretiske baggrund er præsenteret i *MERIA håndbog i undersøgelsesbaseret matematikundervisning*.

Et *scenarie* beskriver en didaktisk situation til gennemførelse i en lektion med de epistemologiske antagelser og begrundelser bag. Det beskriver ligeledes målene for situationen inden for læreplanernes emner samt den specifikke tilsigtede matematiske viden og kompetencer, og giver en klar struktur for lektionen med baggrund i *Teorien om Didaktiske Situationer*. Ud over scenariet indeholder *et modul* også materialer skrevet i hånden eller digitale materialer som f.eks. elevers besvarelser, digitale arbejdsark, videreudvikling af det eksplicitte valg af problemstilling og undervisningsmetoder med yderligere perspektiver fra teorien *Realistisk Matematikundervisning*. Moduler indeholder yderligere elementer af de erfaringer og resultater som er indsamlet ved implementeringen af scenariet i undervisningen inklusiv elevernes potentielle gevinster og faldgruber med deres specifikke faglige forudsætninger.

For en lærer kan det være en udfordring at bruge et scenarie. De grundlæggende ideer bag scenariet er ikke nødvendigvis indlysende, og den tilsigtede matematiske viden kan være svær at opnå. Modulet tilbyder læreren en mere konkret indsigt i intentionerne bag scenariet og beskriver forskellige variationer som kunne tænkes i implementeringen af scenariet. Derfor publiseres de komplette moduler her. Scenarierne er publiceret i en mere brugervenlig version seperat på projektets hjemmeside.

Alle scenarierne giver mulighed for, at eleverne kan lave deres undersøgelser ved hjælp af matematikprogrammer på computeren, men problemstillingerne kan også løses uden. Disse variationer beskrives også i scenariet eller i modulet. Alt yderligere undervisnings- og læringsmaterialer hørende til scenarierne publiceres på MERIA-projektets hjemmeside.

Man bør notere sig, at det tager tid for eleverne at vænne sig til den undersøgelsesbaserede undervisning. Og det samme gælder for lærerne, som skal finde en balance mellem en på den ene side overdreven indgriben, som derved spolerer elevernes mulighed for at undersøge, og på den anden side at få overladt eleverne med for få ressourcer, så de kan lave meningsfulde undersøgelser. Projektgruppen fra MERIA-projektet er stærkt overbevist om, at det optimale for en lærer vil være at opleve scenarierne i forbindelse med faglig udvikling gennem en række MERIA-workshops støttet af MERIA's praktiske guide til IBMT (red.: Inquiry Based Math Teaching).

I perioden fra juli 2017 til december 2018 udviklede projektgruppen mere eller mindre ti forskellige scenarier, som dækker forskellige emner fra deltagerlandenes læreplaner dvs.

læreplanerne fra Kroatien, Danmark, Holland og Slovenien. I hvert land har tre til fire gymnasier været tilknyttet projektet for at teste scenarierne. Der skal lyde en stor tak til vores samarbejdspartnere fra de deltagende gymnasier for deres engagerede arbejde. De deltagende gymnasier er:

- fra Kroatien: Gospodarska škola Varaždin, Tehnička škola Požega, Elekstrostrojarska škola Varaždin, XII. gimnazija Zagreb
- fra Danmark: ZBC (Vordingborg), Next København, Roskilde Katedralskole
- fra Holland: Comenius College Hilversium, Hermann Wesseling College, Stedelijk Gymnasium Utrecht
- fra Slovenien: Ekonomska šola Novo mesto, Gimnazija Jesenice, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Processen med at teste scenarierne førte til adskillige revideringer og gav interessante informationer som forbedrede scenarierne. Det var afgørende at udvælge fem moduler til denne håndbog som de mest relevante (for alle lande!) og succesfulde produkter fra projektet[1]. Lærerne fra de tilknyttede gymnasier blev præsenteret for den teoretiske baggrund ved interaktive workshops afviklet af deltagere i projektgruppen. Lærerne blev på denne måde forberedt til at arbejde med scenarierne. Implementeringen af scenarierne i undervisningen blev observeret af deltagere fra projektgruppen eller af lærere fra det samme gymnasium. Lærerne reflekterede efterfølgende på implementeringen via et spørgeskema og rapportede også mundtligt til projektgruppen. Elevernes arbejde blev dokumenteret, og eleverne svarede også på et lille spørgeskema om, hvorvidt de havde fundet undervisningen udfordrende og interessant, og om de kunne tænke sig at engagere sig i en lignende aktivitet igen. Yderligere information om spørgeskemaerne, rapporter og metoder er tilgængeligt i *MERIA project impact analysis*.

Valget af scenarierne, for hvilke de tilsvarende komplette moduler er præsenteret i denne håndbog, blev truffet baseret på kriterier specificeret ved et projektmøde i København i august 2018: scenariets potentiale for undersøgelser og det adidaktiske potentiale i scenariet, muligheden for at gennemføre scenariet for elever og lærere, emnets egnethed i forhold til relevans og anvendelighed, elevernes reaktioner såvel som en bredde inden for emnerne præsenteret i læreplanerne fra de deltagende lande.

Valget af MERIA-scenarierne dækker følgende emner: modellering af en simpel problemstilling inden for handel ved brug af stykkevist definerede lineære funktioner, modellering af sammenhængen mellem bremselængde og fart ved hjælp af kvadratiske funktioner, diskussion om lønniveaet i tre virksomheder ud fra middeltal, typetal og median, og endelig modellering

[1] Arbejdsgruppen fra Danmark valgte dog at frasortere ét af de fem scenarier, da emnet lå for langt væk fra læreplanerne i Danmark. I stedet erstattede vi det med scenariet ab-ba, som er et scenarie, der kan bruges til f.eks. at introducere den distributive lov, og er ligeledes et fint lille scenarie at bruge som introduktion til den undersøgelsesbaserede tilgang i en klasse – og som lærer at få afprøvet denne undervisningstilgang. Dette scenarie findes på projektets hjemmeside under scenarier, ligesom det scenarie, vi valgte fra ligger til gengængeligt på engelsk på samme side. Der vil derfor i den danske version kun blive præsenteret fire moduler med tilhørende scenarier.

af et krumt objekt (som f.eks. en rutsjebane eller skihop) som en glat kurve. Intentionen var ikke at dække så mange emner som muligt i fællesmængden af emner fra partnerlandenes læreplaner men at producere gode eksempler, der kan støtte lærerne i at få etableret undersøgelsesbaseret matematikundervisning i deres klasserum. Vi finder disse scenarier egnede til udvikling af matematisk modellering, formalisering, opstilling af formodninger og bevisførelse, videnskabelig tilgang, opmuntring til forståelse i stedet for at huske, kritisk tænkning, autonome undersøgelse og anvendelser til problemer i den virkelige verden.

Vi vil afslutte denne introduktion med kort at beskrive scenarierne inden for termerne af problemstillingen givet til eleverne og den tilsigtede viden, som er målet for scenariet.

I det første scenarie bliver eleverne bedt om at betragte data omhandlende omkostningerne ved produktionen af cykler samt bygningen af en fabrik i fire forskellige områder. De skal rådgive en virksomhed i forhold til, hvor det vil være mest optimalt at placere fabrikken afhængigt af produktionen af cykler. Produktionen af cykler i hvert af de fire områder kan modelleres vha. en lineær funktion, og eleverne kan udvikle forskellige strategier til at sammenligne omkostningerne i de fire områder. Eleverne bruger grafiske repræsentationer og som oftest på computer, tænker kritisk og opsummerer deres observationer til en rapport til virksomheden, der skal rådgives.

Eleverne bliver i det andet scenarie bedt om at undersøge sammenhængen mellem bremselængden og en bils hastighed lige umiddelbart før der bremses. Sammenhængen er en kvadratisk funktion, som for eleverne vil være en ny funktionstype (deres faglige forudsætninger antages i dette scenarie at være lineære funktioner). Scenariet introducerer dermed eleverne til kvadratiske funktioner, styrker deres numeriske færdigheder og argumentation, men giver også anledning til refleksioner og konklusioner om en hverdagssituation med en følelse af ansvar.

Det tredje scenarie fokuserer på argumentation ved hjælp af statistik med udgangspunkt i et datasæt. Datasættet præsenterer lønningerne for medarbejdere i tre forskellige virksomheder, og eleverne bliver bedt om at analysere data og nå frem til en konklusion om, i hvilken virksomhed de ville ønske at blive ansat i. Eleverne forventes at nå frem til nogle af de centrale deskriptorer som middeltal, typetal og median, selvom deres analyse meget vel kan lede frem mod andre tilgange som f.eks. grafiske repræsentationer af fraktiler og kvartiler m.m.

Det fjerde scenarie omhandler konstruktionen af en rutjebane, som består af en krum og en retlinet del, som skal forbindes, så kurven bliver glat. Pointen med scenariet er at ”glat” har en præcis matematisk definition. Eleverne bliver bedt om at konstruere rutsjebanen således, at det giver en komfortabel tur. Opgaven bliver derfor at analysere på hvilken måde, man kan koble de to dele og opdage, at den rette linje bør være en tangent til den krumme del i ”koblingspunktet”. Eleverne vil vælge forskellige kurver til den krumme del til at starte med og herfra bruge mange forskellige strategier til at konstruere tangenten. Hvis de vælger grafer for kvadratiske funktioner, kan problemstillingen løses vha. elementære metoder, men for andre valg af funktioner kan problemstillingen lede eleverne hen imod ideen om afledede funktioner.

Stykkevist lineære funktioner

MERIA-modulet ”Cykelfabrikken”

Scenarie:

<table>
<tr><td>Tilsigtede viden</td><td>Målet er at kunne konstruere en stykkevist lineær funktion defineret som løsningen på en problemstilling, hvor en række lineære betingelser er givet på forhånd.
Endemålet er, at løsningen på problemstillingen er funktionen præsenteret som en stykkevist lineær funktion eller som flere lineære funktioner defineret på forskellige intervaller relateret til den givne problemstilling.
CAS-værktøjer kan inddrages til at indtegne graferne for funktionerne og løse ligninger, hvis eleverne er vant til at bruge CAS.</td></tr>
<tr><td>Bredere kompetence-mål</td><td>Det bredere formål er at få en dybere forståelse for de lineære funktioner $f(x) = ax + b$ (hældningskoefficienten a og konstantleddet b) ved at bruge dem på konkrete lineære betingelser med henblik på at kunne konstruere stykkevist lineære funktioner herunder de intervaller, hvor hver af de indgående lineære funktioner er mindst. Ligeledes er målet at diskutere kontinuerte og diskrete aspekter i relation til algebraiske og grafiske repræsentationer i modelleringsprocessen og dermed modelleringskompetencen generelt.</td></tr>
<tr><td>Nødvendige matematiske forudsætninger</td><td>Eleverne ved, hvordan man tegner en graf og er bekendte med notationen $f(x) = ax + b$ samt fortolkningen af a og b.</td></tr>
<tr><td>Tid</td><td>50 minutter (80 minutter).</td></tr>
<tr><td>Niveau</td><td>15-16 år/1.g.</td></tr>
<tr><td>Materialer til rådighed</td><td>Tabel med omkostningerne fordelt på fire områder.
<table>
<tr><th>Område</th><th>Omkostninger for at bygge fabrikken i området angivet i €</th><th>Omkostninger for at producere én cykel på fabrikken angivet i €</th></tr>
<tr><td>A</td><td>300 000</td><td>120</td></tr>
<tr><td>B</td><td>450 000</td><td>110</td></tr>
<tr><td>C</td><td>660 000</td><td>60</td></tr>
<tr><td>D</td><td>680 000</td><td>80</td></tr>
</table>

Millimeterpapir og CAS-værktøjer. En bred tavle.</td></tr>
</table>

Problemstilling: Du er en konsulent, der rådgiver virksomheder om, hvor det bedst kan betale sig at bygge en fabrik til produktion af cykler (eller andre produkter) baseret på tabellen, der viser omkostningerne i forskellige områder.

Hvilket geografisk område vil du generelt råde virksomhedens ledelse eller direktør til at vælge og hvorfor?

Fase	**Lærerens handlinger inkl. instruktioner**	**Elevernes handlinger inkl. reaktioner**
Devolution (didaktisk) 5 minutter	Læreren forklarer konteksten og tabellen ovenfor og stiller spørgsmålet: ”Hvordan ville I rådgive virksomheden om placeringen af deres fabrik til produktion af cykler?” Arbejd sammen i par og forbered jer på, at I kommer til at fremlægge jeres løsning lidt senere.	Eleverne lytter og forstår relevansen af problemstillingen og følger sig engageret til at arbejde med spørgsmålet. De har muligvis spørgsmål til tabellens indhold. Eleverne bør have mulighed for at stille afklarende spørgsmål for at kunne forstå problemstillingen.
Handling (adidaktisk) 15 (20) minutter	Læreren observerer og noterer elevernes tilgang til problemstillingen. Her opnår læreren indsigt i elevernes forudsætninger. Det er vigtigt, at læreren ikke giver ledetråde til grupperne og undgår at interagere med dem, dog undtagelsesvist, hvis der er behov for opklarende spørgsmål til den stillede opgave.	Grupperne starter med at prøve forskellige strategier eller ideer af baseret på deres forudgående viden. Se afsnittet Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden”. Fordi eleverne arbejder i par, så vil der kunne opstå adidaktiske formuleringer.
Formulering (didaktisk) 10 (15) minutter	Læreren udvælger mindst 5 grupper til at præsentere forskellige strategier ved tavlen. Forud for dette bør tavlen opdeles i områder, og efter præsentationerne må eleverne ikke slette det, de har skrevet. Mundtligt skal eleverne i grupper nu præsentere deres løsning, og	Grupperne præsenterer arbejdet i henhold til lærerens plan (først de simple løsninger baseret på tal og derpå løsninger med grafer og funktioner).

	grupper med de simpleste løsninger starter. I denne fase søges der ikke efter en validering af løsningerne.	
Devolution (didaktisk) 1 minut	"Diskuter med din makker, hvilke ligheder og forskelle I ser i løsningerne. Brug dette til at forbedre jeres eget svar til fabrikkens ledelse." Efter 5 (10) minutter skal eleverne rapportere tilbage.	Eleverne lytter. Igen bør det sikres, at alle forstår, hvad de skal.
Handling/ formulering (adidaktisk) 5 (15) minutter	Læreren cirkulerer rundt i klasserummet og observerer, hvad grupperne har noteret og diskuteret, og hvordan de har gjort brug af de præsenterede løsninger og ideer på tavlen.	Eleverne får udpeget ligheder og forskelle i arbejdet med at forbedre deres egen løsning.
Formulering og validering (adidaktisk) 10 (15) minutter	Læreren opfordrer eleverne til at få så mange observationer og forbedrede svar som muligt. Læreren forsøger at få eleverne til at identificere eventuelle fejl i de tidligere løsninger.	Eleverne formulerer ligheder og forskelle og forklarer, hvordan de har forbedret deres egen løsning ved at inddrage de andres arbejde. De kan også pege på nogle mangler i deres arbejde.
Institutionalisering (didaktisk) 5 (10) minutter	Læreren understreger, at der ikke kun er ét korrekt svar, men at løsningerne afhænger af, hvor mange cykler fabrikken producerer. Først baserer læreren sine forklaringer på elevernes løsninger, der står på tavlen, og derpå introduceres notationen for stykkevist lineære funktioner ved at bruge eksemplet: $f(x) = \begin{cases} 120x + 3 \cdot 10^5, x \leq a \\ 60x + 6{,}6 \cdot 10^5, x \geq a \end{cases}$ hvor a=6000. Endelig opsummeres problemstillingen ved at vende	Eleverne lytter og genkender deres egen strategi i forhold til definitionen på de stykkevist lineære funktioner og reflekterer over, hvordan den er sammenlignet med det, de kender. De tager notater.

	tilbage til, hvad man som konsulent vil råde fabrikkens ledelse til: "Område B og D vil aldrig være optimal, mens A og C er optimale for en produktion under og over 6000 cykler henholdsvist. Den optimale omkostningsfunktion er en stykkevist lineær funktion (defineret på de positive hele tal)."	

Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden

- Nogle elever vil begynde at arbejde med tallene i tabellen for at undersøge betydningen af dem som fx:
  - Nogle vil beregne prisen for nogle konkrete antal cykler for hvert område. De vil muligvis benytte *trial and error* for at finde antallet af cykler, for hvilket to områder giver samme omkostninger.
  - Nogle vil lave sildeben for hvert geografisk område og bestemme de totale omkostninger for forskellige antal cykler og udpege den billigste løsning ved at sammenligne sildeben for hvert antal cykler (dette kan gøres med papir og blyant eller i regneark).
  - Eleverne kan også ved at betragte tallene i tabellen undersøge forskellen mellem de faste omkostninger og forskellen mellem variable omkostninger for to områder ad gangen. Et spørgsmål kunne fx være: "*Hvor mange cykler skal produceres før B er bedre end A?*" I alt 6 sådanne sammenligninger er nødvendige for at give et komplet svar.
- Nogle elever vil gå til problemstillingen ved at benytte funktioner og skrive fire forskrifter, hvor hver funktion vil repræsentere de samlede årlige omkostninger for produktionen af x cykler:

$f(x) = 120x + 300\,000$, $g(x) = 110x + 450\,000$, $h(x) = 60x + 660\,000$ og $k(x) = 80x + 680\,000$.

  - Graferne for de fire funktioner vil blive tegnet i et eller flere koordinatsystemer, og ud fra den grafiske repræsentation vil eleverne argumentere for placeringen af fabrikken.
  - Elever, som benytter millimeterpapir, vil måske aflæse skæringspunkterne.
  - Elever, der benytter CAS- eller grafværktøjer, vil måske afbilde de lineære funktioner direkte men blive udfordret med at justere koordinatakserne for at kunne se dem alle.
  - I hvert tilfælde vil fortolkningen af funktionerne og behovet for at minimere omkostningerne ikke falde direkte ud fra det ovenstående, men vil kræve

overvejelser omkring problemstillingen. Fejl kan opstå såsom at forveksle produktionsomkostninger med salgspris eller fortjeneste m.m.

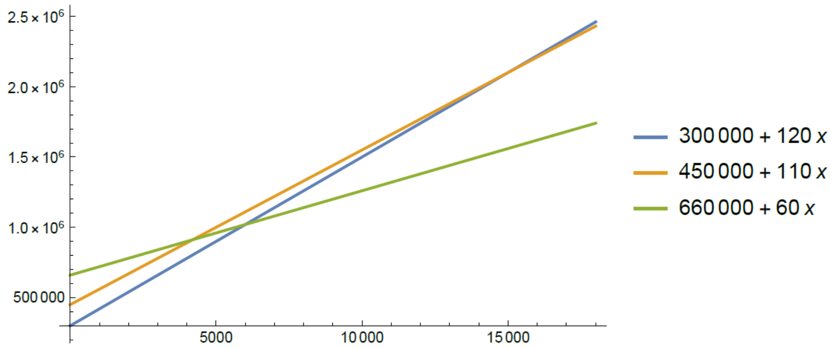
- På basis af funktionsforskrifterne vil forskellige par af ligninger blive opstillet til bestemmelse af skæringspunkter mellem graferne. Eleverne vil måske bruge de grafiske repræsentationer til at se, hvilke ligninger der vil være relevante at opstille og løse. Denne strategi vil desuden kræve teknikker til ligningsløsning.

- Eleverne vil kunne nå frem til forskellige konklusioner.
  - Uanset om eleverne arbejder med tal (og tabeller), eller om de arbejder med funktioner (og grafer), så vil nogle indse, at der ikke er ét bedste område til placering af fabrikken, men at rådet til fabrikkens ledelse vil afhænge af, hvor mange cykler der skal produceres. Konklusionen kan formuleres mere eller mindre præcist med ord, ligninger, grafer eller andet.
  - Nogle elever vil give et hurtigt men fejlagtigt svar som fx "A er bedst fordi, hvis vi beregner omkostningerne for 1,2,...,10 cykler, så får vi altid den billigste pris her."

Eksempler på grafer og ligninger, som eleverne ville kunne producere

For at kunne identificere hvordan de forskellige placeringer af fabrikkerne er mere eller mindre økonomisk fordelagtige for forskellige antal af producerede cykler, tegnes grafer ud fra data i tabellen enten på papir eller vha. deres CAS-værktøjer.

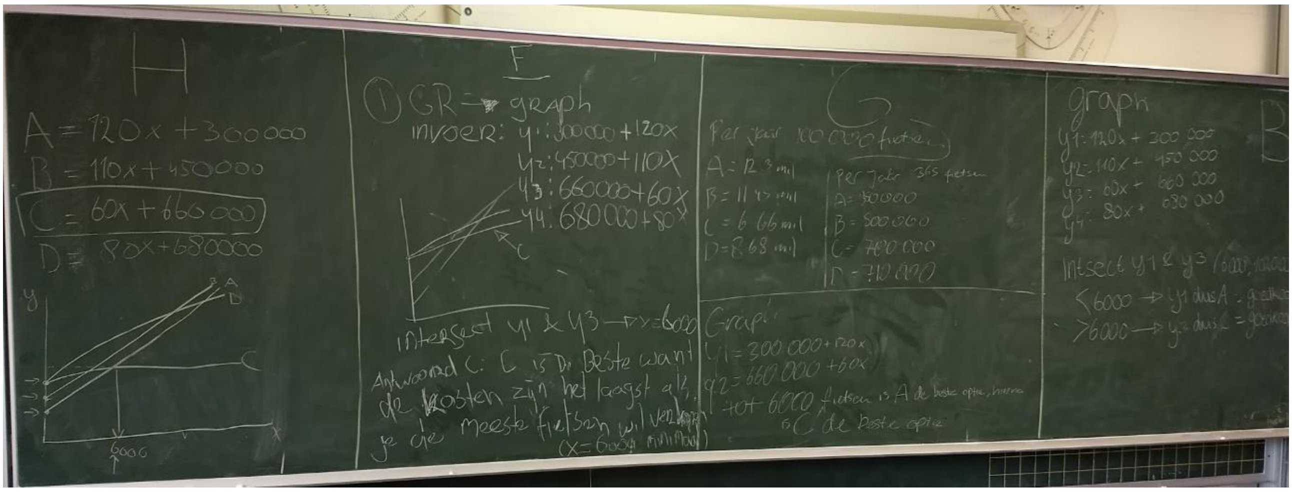
```
In[70]:= Plot[{300 000 + 120 x, 450 000 + 110 x, 660 000 + 60 x},
           {x, 0, 18 000}, PlotLegends → "Expressions"]
Out[70]=
```



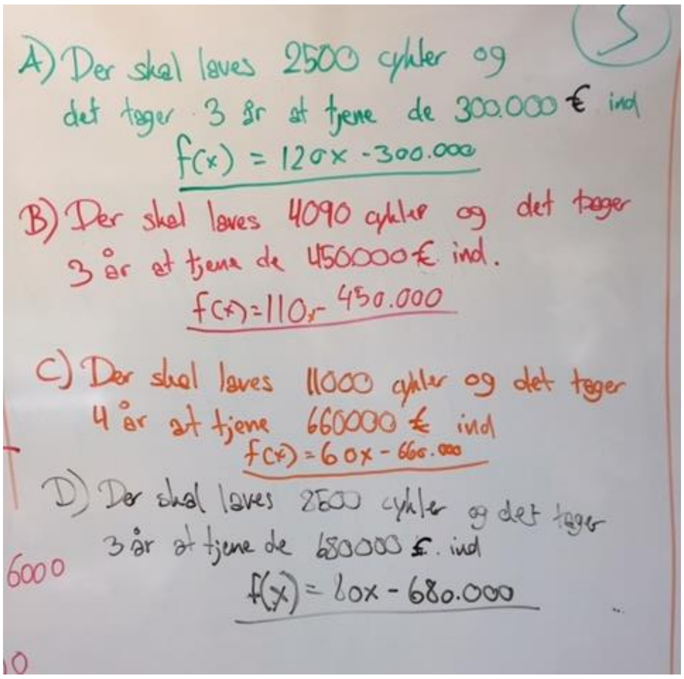

```
In[66]:= Solve[300 000 + 120 x == y && 450 000 + 110 x == y, {x, y}]
Out[66]= {{x → 15 000, y → 2 100 000}}

In[67]:= Solve[300 000. + 120 x == y && 660 000 + 60 x == y, {x, y}]

Out[67]= {{x → 6000., y → 1.02 × 10^6}}
```



Præsentationer af elevernes løsninger fra gruppearbejdet (Holland)



Et eksempel på en gruppepræsentation (Danmark).

Eleverne har betragtet de fire områder for placering hver for sig og har misforstået "Prisen for produktion per cykel" som "fortjenesten per cykel". For hvert område angiver $f(x)$ fortjenesten ved produktionen af x cykler. De har for hvert område beregnet, hvor mange cykler der skal produceres for at dække omkostningerne for at bygge fabrikken ved at finde nulpunkterne for f.

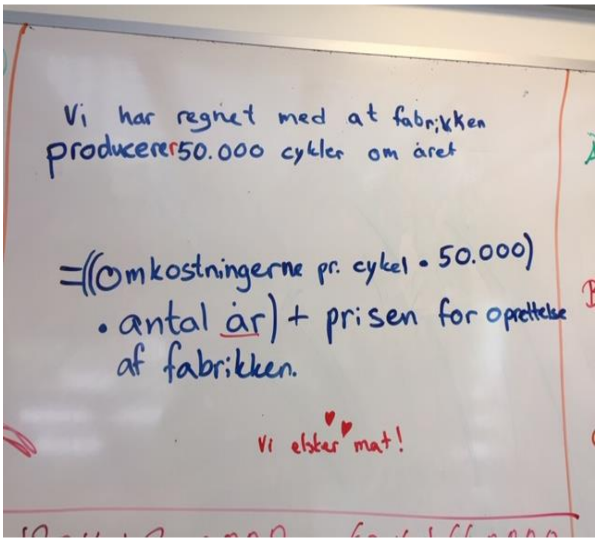
Helt konkret skriver de: "Der skal produceres … cykler og det tager … år at dække omkostningerne … €", og funktionsforskriften er angivet for hvert område. Antallet af år kommer fra en vilkårlig antagelse om, at "de producerer mindst 2,5 cykler pr. dag" (dette blev forklaret mundtligt ved præsentationen for område A men ikke for de andre områder). Det er uklart, hvordan de nåede frem til antallet af år i hvert tilfælde undtagen i tilfældet område A, hvor 2,5 cykler blev antaget som den daglige produktion.

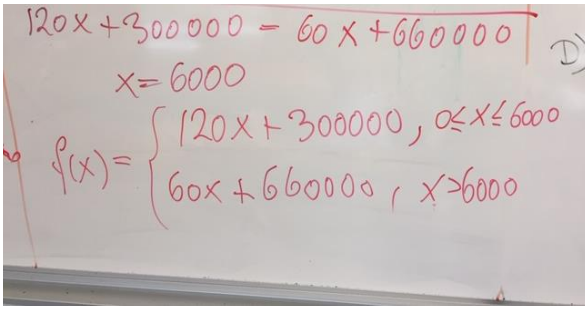
Endnu et eksempel fra den danske klasse:

Her antager en gruppe, at fabrikken producerer 50.000 cykler pr. år. Formlen, de når frem til, bliver så:

$$omkostninger\ pr.cykel\ \cdot 50.000\ kr\ \cdot\ antal\ \text{år} + prisen\ for\ at\ bygge\ fabrikken$$

Der var ikke andre konklusioner ud over formlen, men hvis man anvender denne, ville man nå til konklusionen, at man skal benytte område C.





Fra en lærers institutionalisering omkring løsningen af den centrale ligning som en del af løsningen på problemstillingen samt den stykkevist lineære funktion med den tilhørende notation.

I denne klasse var det kun halvdelen af grupperne, der nåede frem til de brugbare funktioner, der ville give løsningen.

Forklaringer til materialerne

Fortællingen om konsulenten og tabellen med omkostningerne har som mål at engagere eleverne i devolutionsfasen. Tabellen med data kan overdrages på forskellig vis: på papir eller vises på tavlen, præsenteres i en PowerPoint eller blive downloadet til en computer eller smartphone og lignende.

I nogle klasser vil eleverne være fortrolige med matematiske modeller og i andre er de ikke. Så hvis det er nødvendigt, kan man bruge lidt længere tid på at forklare indholdet i tabellen. Dette gælder også helt generelt, at eleverne inden de går i gang, skal have mulighed for at stille opklarende spørgsmål til indholdet i tabellen.

Eleverne kan benytte mobiltelefoner, diverse CAS-programmer, millimeterpapir og lineal til at få tegnet punktplots, ændre eller tilføje betingelser, finde skæringspunkter osv.

Til elevpræsentationerne er det nødvendigt at have brede eller flere tavler, eller man kan bruge posters, så alle elevers præsentationer kan ses på samme tid og forblive synlige i resten af modulet. Endelig skal der være plads til lærerens institutionalisering til sidst.

Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable

Hovedfokus i de didaktiske faser skal være på elevernes formuleringer og derpå valideringerne af deres formuleringer. I de adidaktiske faser er det vigtigt ikke at give hjælp til løsningerne.

I dette afsnit diskuteres, hvilke didaktiske variable der kan ændres i det ovenstående scenarie.

Læreren kan med fordel forklare eleverne, at økonomiske modeller er simplificeret og udelader mange faktorer, ja helt generelt er modeller reduceret til simple tilfælde. I tilfældet med cykelfabrikken betragtes

a) Omkostninger for at bygge fabrikken i et bestemt område.

b) Omkostninger pr. producerede cykel på fabrikken.

Ifølge almindelige definitioner på faste omkostninger er der ligeledes løbende faste omkostninger til fx opvarmning og lønninger til faste medarbejdere. Alle disse faktorer er her ignoreret. I forhold til omkostningerne under punkt b) er der under de variable omkostninger, som afhænger af produktionens størrelse, inkluderet materialeomkostninger, omkostninger til maskiner, som skal erstattes, elektricitet til maskindriften, lønninger til midlertidigt ansat personale osv. Problemstillingen kunne generaliseres mere ved at tilføje andre omkostninger, men er her holdt til kun at betragte to.

Konsulentens tilbagemelding bør kun forholde sig til omkostningerne nævnt i a) og b). Det kan overvejes, om det skal understreges eksplicit, at tilbagemeldingen til fabrikkens ledelse kun skal baseres på den givne information i tabellen, mens elevernes egne antagelser eller estimater kunne give en større mængde af løsninger jf. de to eksempler fra de danske klasser som selvfølgelig er fejlagtige i forhold til problemstillingen. At forebygge mod forkerte svar bør ikke være en primær bekymring, idet eleverne kan lære af fejl. Derfor skal der som tidligere nævnt heller ikke i de adidaktiske faser gives hjælp frem mod korrekte svar.

Udfordringen med denne fortælling er, at direktøren eller ledelsen for virksomheden vil beslutte sig for placeringen af cykelfabrikken ud fra konsulentens analyse. Det er ikke nødvendigt for konsulenten dvs. eleverne at vide, hvorvidt virksomheden har planer om at producere et stort antal cykler eller ej, men elever kan til tider spontant gøre sig antagelser i den retning.

Ud fra direktørens eller ledelsens beslutning vil fabrikken blive bygget i ét af de fire områder og vil forblive der. Der er altså ikke tale om at ville flytte fabrikken til et andet område.

Det didaktiske miljø: Omkostningerne både beløbets størrelse og type kunne vælges anderledes. Men det kan være en fordel for nybegyndere ikke at have for mange skæringspunkter blandt graferne i forhold til at skulle bestemme en funktion til de minimale omkostninger. I scenariet her er der kun ét skæringspunkt nemlig for $x = 6000$. Vælger man, at der skal være flere skæringspunkter, bør man vælge omkostningerne, så de to skæringspunkter ikke ligger for tæt på hinanden, idet man ellers ville risikere et mere kunstigt problem. Lad fx et tilfælde have to skæringspunkter i hhv. $x_1 = 5000$ og $x_2 = 5050$. Her ville fortolkningen blive, at man ville skifte placering for bare 50 cykler, hvilket ville være urealistisk i den virkelige verden.

Ligeledes kunne produktet eller andre elementer i problemstillingen ændres. Har man fx flere produkter i produktion med randbetingelser, vil man have flere variable i spil, som man ser det i lineær programmering.

Under valideringsfasen er det vigtigt, at forkerte strategier eller formuleringer bliver korrigeret og så langt hen ad vejen som muligt af de andre elever. Læreren kan engagere resten af klassen ved fx at spørge: ”*Kan du gentage, hvad der lige blev sagt? Er det korrekt? Hvorfor tror du det? Hvor ved du det fra?*” Hvilke spørgsmål, der stilles, afhænger af klassens forudsætninger og de forudgående resultater, de har præsenteret i løbet af lektionen.

Længden af faserne skal tilpasses elevernes arbejde og evne til fordybelse.

Gennem den første handlingsfase skal eleverne ikke blive dirigeret til bestemte udregninger eller konkret matematik, de skal tage i brug som fx lineære funktioner. Hvis læreren bliver i tvivl om, hvorvidt eleverne har de nødvendige forudsætninger for at løse opgaven, som beskrevet i scenariet, så kunne spørgsmål som følgende stilles: ”*Hvordan kan vi sammenligne omkostningerne? Kan vi udelukke nogle af områderne? Hvorfor?*”. Disse spørgsmål kunne stilles til enkelte grupper eller individer, hvis resten af klassen ser ud til at have den nødvendige viden. Som lærer behøver man ligeledes ikke blive stående ved gruppen, til de har svaret på de stillede spørgsmål., Man *kan* betragte det som en mindre devolutionsfase til en begrænset problemstilling og lade eleverne handle, formulere og validere derfra. Det er igen vigtigt ikke at give ledetråde frem mod svaret på problemstillingen. Hvis størstedelen af klassen behøver at betragte spørgsmålene stillet ovenfor, skal læreren undlade at vejlede grupperne enkeltvis, men bør i stedet afkorte handlingsfasen og spørgsmålene stilles i plenum. Er sådan et tiltag nødvendigt, så er det oftest et tegn på, at problemstillingen fra begyndelsen har været for svær eller ikke er blevet overdraget klart og tydeligt. Begge situationer vil naturligvis være uønskede.

Indgriben i løbet af den anden handlingsfase, formulerings- og valideringsfase:

Hovedideerne er i det store hele som før. Hvis nogle grupper finder det meget svært at komme i gang, kan læreren foreslå, at de sammenligner deres strategier med en konkret strategi fra en anden gruppe. Denne strategi med at sammenligne bør være udvalgt med matematikken for øje, så der er klare relationer mellem gruppens strategi og den, læreren peger på. Dette svarer til at overdrage et nyt men noget mindre åbent delspørgsmål til gruppen. Hvis elevernes identifikation af ligheder og forskelle bliver for vag, kan læreren også vælge at overdrage en mere konkret opgave: ”*Udvælg en af de andre gruppers løsning, med hvilken I kan forbedre jeres egen løsning, og lav også forbedringen. Derpå find fejl eller mangler i en af de andre gruppers løsning og forklar, hvorfor I er uenige i løsningen.*”

Ved den *endelige institutionaliseringsfase* er det vigtigt, at de fleste – og gerne alle strategier i klassen er kommenteret og forbundet med andre strategier. Læreren bliver hjulpet til at navigere og forudsige elevernes undersøgelsesprocesser, når alle mulige strategier kan betragtes på en gang. Når undervisning foregår, skal man som underviser huske at man interagerer med et dynamisk system nemlig elever. De skal have mulighed for at tilpasse sig miljøet, og derfor kan vi ikke forvente, at de leverer de samme svar.

Nogle lærere laver sig et skema med elevernes mulige strategier som hjælp i den adidaktiske fase. De forventede strategier kan også listes på et stykke papir, og for hver strategi kan læreren formulere fx tre spørgsmål, som kan være givende at kunne stille som lærer til elevernes præsentationer. Gennem den adidaktiske fase kan læreren notere hvilke grupper, der diskuterer hvilke strategier, og bruger det til at organisere den efterfølgende didaktiske formulering og validering.

Observationer fra klasserummet

Vigtige observationer, der blev gjort i forbindelse med test af scenarierne, var, at lærerne prøvede at undgå at give eleverne ledetråde frem mod en løsning gennem alle scenariets faser. For at kunne bevare det adidaktiske potentiale er det godt at kunne trække sig tilbage som underviser. Eleverne havde forskellige opklarende spørgsmål. Nogle tænkte på fortjenesten i stedet for omkostningerne. Nogle var forvirrede i den første devolutionsfase og spurgte ind til kvaliteten af cyklerne, salgsprisen, skatter, antallet af producerede cykler m.m. Nogle elever indså hurtigt: *Den med den mindste hældningskoefficient er den billigste*.

Gennem handlingsfasen formulerede eleverne følgende tilgange til problemet:

I: Modellering med lineære funktioner og tegning af grafer

- I.1. tegnede grafer på papir og beregnede skæringspunkter som løsninger til lineære ligninger
- I.2. brugte computeren til at tegne grafer og finde skæringspunkter – dog ikke korrekt i alle tilfælde.

II: Sammenlignede områderne for placering af fabrikken to og to og analyserede resultatet

- II.1. brugte ligninger
- II.2. sammenlignede de faste omkostninger direkte fra tabellen
- II.3. ræsonnerede på baggrund af beregninger på områderne, sammenligninger mellem områderne og til tider med selvopfundne antagelser og fejl.

Sammenligning:

- Tilgang I.1 og I.2 blev identificeret med anvendelsen af teknologi som den åbenlyse forskel. Eleverne bemærkede, at I.2. er mere præcis og dermed den bedste løsning, mens vi tænker, at I.1. også er en værdifuld tilgang, fordi vi kan opdage, i hvilket omfang vores elever kæmper med at tegne graferne. Dette kan dog også ses hos elever, der bruger grafprogrammer, når de skal dimensionere grafvinduet.
- Tilgang II kræver mere logisk tænkning for at nå frem til en konklusion, selv om strategien er gyldig. Vi har diskuteret de varianter, hvor eleverne kun

sammenligner A og C baseret på deres intuition og nødvendigheden af at sammenligne med område B.

Det er her også antydet, at tilgang II.2. viser, at problemet ville kunne løses uden kendskab til lineære funktioner og deres grafer. Dermed kan problemstillingen også bruges til at indføre lineære funktioner.

Nogle grupper beregnede og sammenlignede priser for et bestemt antal cykler i hvert område A, B, C, D. I disse tilfælde havde de vanskeligheder i formuleringsfasen, fordi de ikke kunne finde det præcise antal cykler, når den ene mulighed begyndte at være bedre end den anden. Nogle gange lavede de så bare antagelser om dette, eller de kom med en tilnærmet løsning eller sagde blot, *„at for et mindre antal cykler er A bedst og for et større antal er det C“*. En af disse grupper erfarede efter den anden devolution i handlingsfasen, at de ville kunne bestemme det antal cykler, hvor det skiller, ved at løse ligningssystemet.

De mere avancerede grupper løste ligninger og sammenlignede derefter funktionsværdierne inden for de intervaller, de havde fået frem. Nogle af grupperne brugte en grafisk tilgang og fandt skæringspunkter mellem graferne ved hjælp af et matematikprogram. Her blev kalibrering af akserne vigtig på grund af tallenes størrelser.

Eleverne havde brug for mere tid i den første devolutionsfase og handlingsfase, men mindre i den anden omgang, så tiden blev ændret i scenariet efter denne bemærkning. Nogle lærere erfarede, at de havde brug for at give nogle tip eller ekstra spørgsmål i første handlings- og formuleringsfase. Eleverne forstod ikke, hvordan man sammenligner muligheder uden hjælp.

Evalueringsværktøjer

I slutningen af lektionen eller i den efterfølgende lektion kan følgende opgaver anvendes til en hurtig test af elevernes udbytte af lektionen:

1) En god ven siger: En graf med den mindste hældningskoefficient og det mindste konstantled svarer til det billigste område!

   Hvad tænker du?

   Svar: sandt nok, men det er ikke altid således, som i tilfældet med cykelfabrikken.

2) En god ven siger: Grafen med den største hældningskoefficient og det største konstantled svarer til det dyreste område!

   Hvad tænker du?

   Svar: sandt nok, men i tilfældet med cykelfabrikken var der ikke et sådant område.

3) Forestil dig en simpel situation med to områder og med oplysninger som vist i tabellen nedenfor. Du har underskrevet en kontrakt om produktion af 5000 cykler. Hvilket område vil du vælge til at producere cyklerne?

Områder	Omkostninger for at bygge fabrikken i området angivet i €	Omkostninger for produktionen af én cykel i området angivet i €
G	0	200
H	300 000	100

Svar: H er billigst ved en produktion over 3000 cykler.

4) Forslag til hjemmearbejde: skriv en tekst, der forklarer direktøren for fabrikken det råd, du ville give ham for placering af cykelfabrikken. I teksten må der gerne indgå figurer.

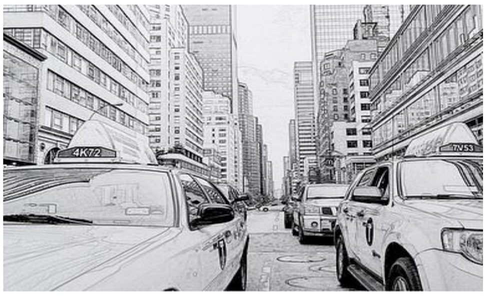
Forslag til yderligere problemstillinger vedrørende lineær modellering

Man kunne inkludere andre sammenhænge for at anvende den tilsigtede viden i andre situationer og for en evt.

yderligere institutionalisering af de tilsigtede metoder og ideer. Eksempler på dette kan ses nedenfor:

1.
Taxa AA har et startgebyr på 15 €, og hver kilometer koster 5 €.
Taxa BB har et startgebyr på 20 €, og hver kilometer koster 4 €.

a) Du har en plan om at skulle køre 8 kilometer med taxa. Hvilket Taxa-firma vil du vælge?

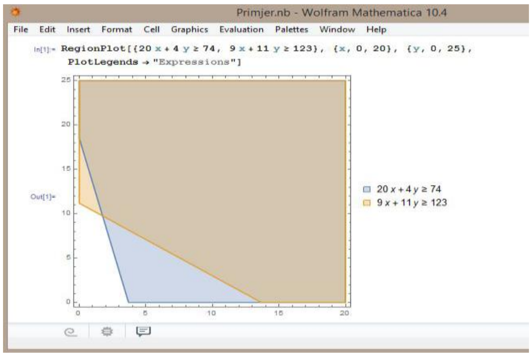


2.
En virksomhed sælger gas, og priserne er oplyst til at være: 0,5 € per m^3 for de første 10 m^3, derefter vokser prisen med et højere gasforbrug. De næste 20 m^3 koster 0,4 € per m^3, og derpå falder pisen til 0,3 € per $m^3$for et forbrug herudover.

a) Bestem forskriften for omkostningsfunktionen dvs. funktionen der angiver prisen for gas alt efter gasforbruget.

3.

En atlet skulle indtage mindst 74 mg vitamin B og mindst 123 mg vitamin C hver dag.
Multivitamin MM indeholder 20 mg vitamin B og 9 mg vitamin C pr 1 g.
Multivitamin NN indeholder 4 mg vitamin B og 11 mg vitamin C pr 1 g.



a) Hvad er den mindste daglige dosis af multivitamin MM og NN, som atleten skal indtage, hvis han skal få sit behov dækket?
Det er ikke farligt, hvis han indtager en højere dosis, end der er behov for.

4.

Iwona ønsker at leje et festlokale i forbindelse med sin fødselsdag til sine 17 gæster.
Prisen for at leje lokale RR er 100 € for lokalet samt 10 € per gæst.
Prisen for at leje lokale PP er 80 € for lokalet og derudover 12 € per gæst.

a) Hvilket festlokale skal Iwona leje?

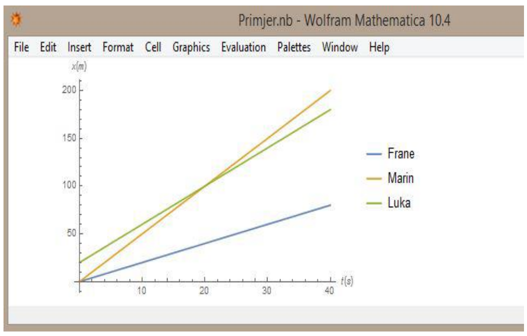
5.

Prisen for at købe et par sneakers er 70 €.
En virksomhed producerer sneakers og har haft nogle startomkostninger for produktionen på 10.000 €. Produktionen af ét par sneakers koster15 €.

a) Find virksomhedens fortjeneste ved en produktion på 1.000 par sneakers.

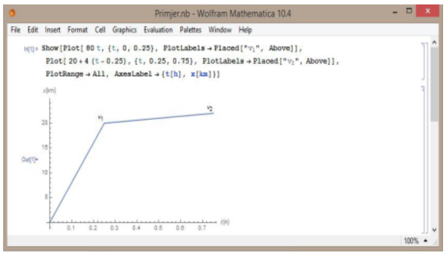
6.

En bank tilbyder forskellige renter alt afhængig af, hvor stort et beløb, der står på kontoen.
Har du mindre end 5.000 €, får du 2% p.a., mellem 5.000 € og 20.000 € på kontoen får du 2.2% p.a., og med et indestående på mere end 20.000 € opnår du 2.5% p.a.



a) Bestem opsparingens størrelse efter et år som en funktion af beløbet på kontoen.

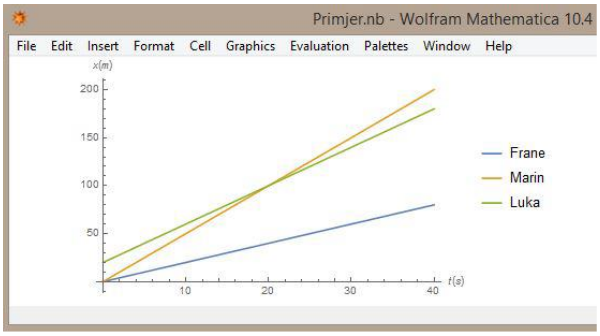
7.
Anna kører i bil til Zagreb med en konstant hastighed på 80 km/t.
Efter at have kørt 20 km løber hun tør for benzin, og hun går til den nærmeste tankstation, som ligger 2 km længere fremme. Det tager Anne 30 minutter at nå til tankstationen.



a) Tegn en graf, der viser Annas bevægelse i antal km som en funktion af tiden målt i minutter.

b) Bestem Annas gennemsnitsfart. Grafen kan indgå i besvarelsen.

8.
Marin og Franck tager på cykelferie. Luka vil ikke vente på dem, så han starter turen tidligere.
Vedlagt er grafen for de tre cyklisters tur angivet med km på 2. aksen og tid på 1. aksen.

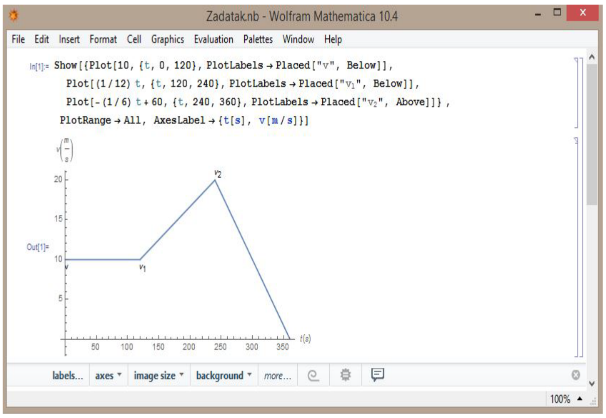


a) Hvem er den hurtigste cyklist?

b) Hvem er den langsomste cyklist?

c) Vil Marin overhale Luka?

9.
Peter kører på motorcykel.
De første 2 minutter kører han med konstant fart på 10 m/s. Efter yderligere 2 minutter opnår han farten 20m/s med en konstant acceleration. Herefter begynder han at bremse og stopper efter 2 minutter.



a) Tegn grafen for hastigheden målt i m/s som funktion af tiden målt i sekunder.

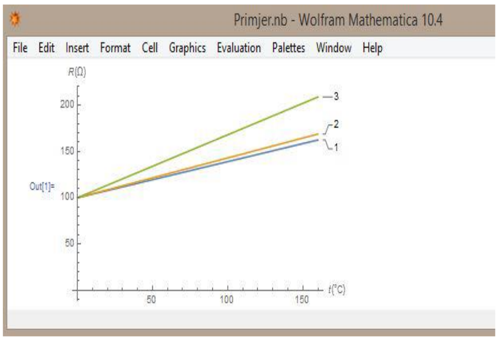
10.

Modstanden i en ledning ændrer sig med temperaturen og kan beskrives ved funktionen

$R(t) = R_0(1 + \alpha \cdot t)$,

hvor R_0 er modstanden i ledningen ved 0 °C , α er temperaturkoefficienten, som er afhængig af ledningens materiale, og t er temperaturen målt i °C.

Modstanden for tre ledninger lavet af tre forskellige materialer oplyses til at være 100 Ω ved 0 °C.



a) Bestem temperaturkoefficienten for de tre materialer, når det oplyses, at modstanden ved 100 °C for de tre materialer er hhv:

Materiale 1: 139 Ω

Materiale 2: 143 Ω

Materiale 3: 168 Ω

b) Gå på internettet og find en tabel med temperaturkoefficienter, og bestem hvilket materiale, de tre ledninger er lavet af.

11.

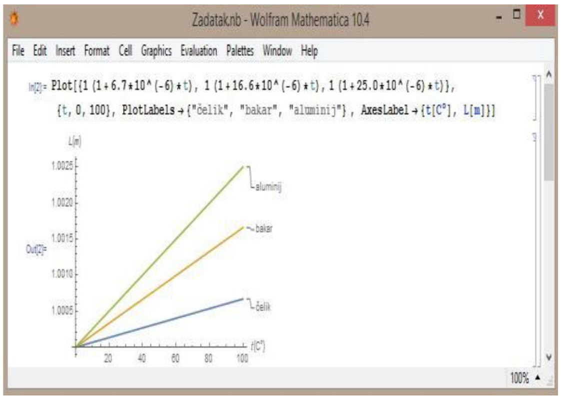
Givet nogle metalstænger af forskellige materialer men alle med samme længde ved 0 °C på 1 m.

Længden på en metalstang ændrer sig med temperaturen og sammenhængen er givet ved $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$,

hvor L_0 er længden ved 0 °C, α er længdeudvidelseskoefficienten, og t er temperaturen målt i °C.

Længdeudvidelseskoefficienten oplyses for

- Stål: $6.7 \cdot 10^{-6}$ / °C
- Kobber: $16.6 \cdot 10^{-6}$ / °C
- Aluminium: $25.0 \cdot 10^{-6}$ / °C



a) For hvert af de tre materialer skal du bestemme forskriften for funktionen, der bestemmer længden af metalstangen som en funktion af temperaturen målt i °C .

Begrundelser for og RME-perspektiver på scenariet

Et af grundprincipperne bag RME er kontekstens rolle i at give eleverne mulighed for at udvikle (foreløbige) matematiske ideer. I dette scenarie er intentionen med cykelfabrikken som kontekst at invitere eleverne til at kreere formler og grafer og at ræsonnere med stykker af grafer. Disse ræsonnementer foregriber introduktionen til den stykkevist definerede funktion.

Man kan inkludere andre kontekster som behandlet ovenfor. Eleverne forventes at udvikle fleksible og anvendelige matematiske færdigheder i arbejdet med matematik i anvendelse.

Relevans og anvendelighed:

Vi betragter følgende perspektiver:

Økonomi fra den virkelige verden: Denne viden er relateret til:

- Lineære fænomener (taxaudgifter, udgifter til telefoni og internet, hastigheder, leje af lokaler m.v.)
- Økonomiske modeller (økonomiske modeller kan være lineære og ikke-lineære fx virksomheders indkomst, fortjeneste, gennemsnitsomkostninger, inflation m.v.)
- Introduktion til optimering

Videregående undersøgelser: Viden og færdigheder relateret til dette emne er relevant inden for mange discipliner:

- Lineære fænomener dukker op overalt inden for videnskab. Endvidere er linearisering af ikke-lineære problemstillinger en alment anvendt metode til løsning af problemstillinger, hvis det er muligt. Vi beregner ofte lineære regressions- og korrelationskoefficienter for at producere en lineær model og til at teste lineariteten af et datasæt, selvom det ikke vides at stamme fra en lineær sammenhæng.
- Alle skulle gerne kunne organisere et budget i det daglige liv i tabeller med penge, som man tjener og bruger til beslutningstagning og fremtidig planlægning. Desuden er det at drive en virksomhed umulig uden økonomisk modellering.
- Optimering af processer anvendes rutinemæssigt af virksomhedsledere. Lineær programmering, også kaldet lineær optimering, er en metode til at opnå det bedste resultat vha. en matematisk model (såsom at opnå maksimalt overskud eller de laveste omkostninger inden for planlægning, produktion og transport), hvis afgrænsninger er repræsenteret ved lineære sammenhænge. Optimering i forbindelse med transporten af et produkt eller af en tjeneste fra leverandør til kunde udføres af virksomhedens ledelse af forsyningskæden (Supply Chain Management).

- Det er muligt at lave en algoritme eller et computerprogram, der kan løse problemstillingen fra scenariet eller mere generelle problemstillinger.

Undersøgelsesfærdigheder

I scenariet om stykkevist lineære funktioner erfarer eleverne betydningen af en række undersøgelsesfærdigheder inden for matematisk modellering: transformering af data fra den virkelige verden til et matematisk sprog, organisering af data, repræsentationer af data, at finde en optimal løsning, at formulere en anbefaling og at samarbejde og samt kommunikation.

Hvorvidt, disse færdigheder konkret italesættes over for eleverne, afhænger i vid udstrækning af, hvordan læreren involverer eleverne i tilbagemeldingen om metoderne i valideringsfaserne, når grupperne bliver bedt om at præsentere deres arbejde. Desuden kan de indgå i den følgende formuleringsfase. I disse tilfælde foreslår vi, at lærerne noterer sig måden, der præsenteres, for at gøre disse undersøgelsesfærdigheder eksplicitte og give feedback, så de kan returneres til eleverne i de opfølgende lektioner.

Potentiale til et forløb:

Scenariet om lineære funktioner kan være del i en længere række af lektioner om lineære fænomener, økonomiske modeller og lineær optimering.

Forudsætninger: Til sådan et forløb forventes eleverne at være fortrolige med lineære funktioner og ligninger.

En introduktion: en kontekst med en stor åben problemstilling som foreslået i scenariet. Variationer af de supplerende problemstillinger som foreslået ovenfor kunne bruges i de efterfølgende lektioner.

RME-perspektiv

Horisontal matematisering: en tabel, der viser omkostningerne, bruges til at åbne en snak om situationen eller konteksten. Eleverne laver en første uformel model af situationen som fx $((udgifter\ per\ cykel\ \cdot 50000) \cdot antal\ \text{år}) + prisen\ for\ at\ bygge\ fabrikken$ og begynder at bruge et sprog, der foregriber matematiske optimeringsmetoder "*omkostninger per cykel*", "*tid til at genoprette en investering*". Denne matematisering af fabrikkens kontekst i matematikkens verden giver mange muligheder for at videreudvikle og institutionalisere den tilsigtede viden med scenariet, der bygger på elevernes bidrag. Eleverne forsøger at finde en løsning i grupper og udarbejder en præsentation af deres resultater. Læreren guider diskussionen om ligheder og forskelle mellem disse præsentationer for at nå frem til konklusionen.

Vertikal matematisering: Den matematik, der er involveret i problemstillingen, skal føres et skridt videre. Lav en generel hypotese eller algoritme for at finde optimale omkostninger for data givet i tabellen. Desuden kan modellen laves mere abstrakt eller generel (se nedenfor under videregående undersøgelser).

Konklusion og refleksion og forslag til videregående undersøgelse: Eleverne reflekterer, integrerer ideer, skaber begreber konkret og får eksplicitte færdigheder.

En opfølgende lektion kan yderligere undersøge, hvad scenariets konklusion(er) fortæller os om de første løsningsforslag i grupperne: Hvad var nyttige ideer? Hvilke kunne forbedres? Hvordan kan vi lave en generel hypotese eller algoritme for at finde optimale omkostninger for de givne data i tabellen? Hvilke strategier eller måder at arbejde på hjalp dig med at komme frem til dine resultater?

Kvadratiske funktioner

MERIA-modulet "Bremselængde"

Scenarie:

Tilsigtede viden	Der er en kvadratisk sammenhæng mellem bremselængden og bilens hastighed lige umiddelbart før der bremses.
Bredere kompetencemål	Kvadratiske funktioner og deres karakterisering ved at have en konstant anden afledet (anden differensen for kvadratiske følger dvs. kvadratiske funktioner på heltal), eller ved at have en konstant voksende eller aftagende første afledet (differenser for kvadratiske følger). *Tværfaglige færdigheder*: eleverne skal arbejde med variable størrelser fra fysik og få en forståelse for, hvad der foregår (bygger bro mellem de to verdener i forhold til notation og arbejdsgang). *Undersøgelsesfærdigheder*: eleverne skal analysere data og søge efter mønstre i tabellerne med tal. Dernæst begrunde deres opdagelser (argumentation) i en præsentation for klassen (beregninger dominerer arbejdsprocessen, så de skal have lavet et resume af deres tilgang i præsentationen).
Nødvendige matematiske forudsætninger	Basisviden om funktioner, sammenhængen mellem konstant hastighed og afstand, gennemsnitshastighed, konvertering fra enheden km/t til m/s og omvendt.
Tid	90 minutter
Niveau	1.g – og kan betragtes som spor lagt ud til fx differensligninger eller andre dele af de valgfrie emner[2]
Materialer til rådighed	Ark med tabel til udfyldning, lommeregner, computer, millimeterpapir.

Problemstilling: I et byområde med en folkeskole klager skolebørnenes forældre over, at der er en upassende fartgrænse i området med skolebørn. En gruppe hensynsløse bilister siger, at forældrene ikke har grund til bekymring, da de – bilisterne – bremser i tide.
Du er blevet bedt om at undersøge sammenhængen mellem bremselængden og bilens hastighed lige før der bremses. Rådgiv borgmesteren om hvilke

2 Materiale om differensligninger kan fx findes i temahæftet *"Diskret analyse – Fra talfølger til integralregning"* af Jan Agentoft Nielsen udgivet af Matematiklærerforeningens Bogsalg, 2016

konsekvenser det vil få, hvis hastighedsgrænsen ændres. Understøt dit råd med fx tabeller og grafer.

Betragt en bil, der bremser således, at hastigheden aftager med 10 km/t for hver 0.4 sekunder. Brug den udleverede tabel til at organisere dine beregninger, observer og begrund derpå dine svar, så godt du nu kan.

	Tid (sek.)	Ændring i hastighed mens der bremses (km/t)	Gennem-snitshas-tighed (km/t)	Gennem-snitshas-tighed (m/s)	Tidsinter-val Δt	Distancen kørt mens der bremses Δd (m)
	t = 0 til t = 0.4	v = 40 til v = 30	35			
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Distancen kørt under bremsning i alt (m)						

Hastigheden lige umiddelbart før der bremses* (km/t)	40							
Bremselængden (m)								

*herefter betegnet som begyndelseshastigheden, og altså forstået som den hastighed bilen har lige umiddelbart før der bremses.

Fase	**Lærerens handlinger inkl. instruktioner**	**Elevers handlinger inkl. reaktioner**
Devolution (didaktisk) 10 minutter	Læreren inddeler eleverne i grupper á 3-4 personer. Læreren giver problemstillingen til eleverne. Det sikres, at eleverne forstår antagelsen om en konstant aftagende hastighed, mens der	Eleverne lytter, snakker om deres ideer og svarer på spørgsmål.

	bremses. Ligeledes drøftes ideen med at inddele tiden i små tidsintervaller, som gør, at man kan approksimere bevægelsen til at være en bevægelse med konstant (gennemsnits)hastighed. Endelig tjekker læreren, om eleverne har forstået de forskellige begreber i tabellen, grundrelationen mellem hastighed, tid og afstand, samt hvordan man konverterer fra enheden km/t til m/s. Ligeledes plantes ideen, at hastigheden 40 km/t kunne erstattes med andre hastigheder (svarende til den sidste række i tabellen). Læreren bemærker over for eleverne, at de er frie til at bruge deres egne strategier. Ligeledes må de bruge deres IT-værktøjer. Eleverne får udleveret et arbejdsark med opgaven og tabellen. Hvis de ikke selv har en lommeregner eller computer, udstyres de med en lommeregner – evt. kan de bruge deres telefoner, og millimeterpapir stilles også til rådighed. Eleverne får 20 minutter til at undersøge, hvordan hastigheden og afstanden ændrer sig og til at lave nogle konklusioner om, hvordan sammenhængen mellem dem er.	
Handling (adidaktisk)	Læreren cirkulerer rundt og observerer, hvordan eleverne arbejder og uden at blande sig.	Eleverne diskuterer i deres grupper om forskellige strategier.

20 minutter	Hvis tilfældet skulle blive, at mange grupper starter med at lave en helt ny tabel for hver nye hastighed, så kan læreren bede om en kort snak i plenum, hvor eleverne bedes om at forklare, hvordan de har arbejdet med tabellen. Sandsynligvis vil mindst én gruppe indse, at de kan bruge de forudgående beregninger, når de skal deducere sig frem til bremselængden for andre hastigheder og ud fra tabellen aflæse bremselængden for lavere hastigheder. Dette kan bruges som en feedback for alle andre grupper.	De gør tabellen færdig ved at bruge lommeregnere eller computer, eller plotte punkter ind i et koordinatsystem (på computer eller papir) m.v. De taler om nøjagtigheden og vælger forskellige starthastighede Gruppens medlemmer kan have forskellige ideer og undersøger dem individuelt. Eleverne vil måske bruge beregninger, grafer eller fysikkens love til at komme frem til en konklusion: - Bremselængden ændrer sig ikke med en konstant størrelse - Sammenhængen mellem begyndelseshastigheden og bremselængden er ikke-lineær - Når begyndelseshastigheden bliver større, så vokser bremselængden også men ikke proportionalt Nogle elever bemærker måske, at den 2. differens er (tilnærmet) konstant og bruge rekursionsmetoden til beregninger.
Formulering (didaktisk) 10 minutter	Læreren går rundt til hver gruppe og beder dem om at præsentere kort, hvad de er nået frem til. Hvis eleverne sidder fast, kan læreren stille spørgsmål og diskutere deres ideer.	Eleverne præsenterer kort deres arbejde og stiller spørgsmål til de andres præsentationer.

	Grupper, der har forskellige ideer internt i gruppen, bedes fokusere på én af strategierne, som så skal bruges til en generalisering samt præsentation for resten af klassen (på grund af manglende tid). Læreren minder eleverne om, at målet med denne aktivitet er at finde ud af, hvordan bremselængden hænger sammen med begyndelseshastigheden for at kunne lave forudsigelser og for at kunne give ordentlig rådgivning til borgmesteren. Derfor bedes eleverne forberede deres råd til borgmesteren omkring konsekvenserne ved at ændre hastighedsgrænsen og understøtte deres råd med tabeller og grafer eller andet.	
Handling og formulering (adidaktisk) 20 minutter	Læreren observerer.	Eleverne prøver at generalisere deres beregninger og observationer. Nogle af dem vil muligvis ændre strategi for at kunne generalisere deres tilgang til problemstillingen. Eleverne forbereder deres råd til borgmesteren.
Validering (didaktisk) 25 minutter	Læreren beder eleverne om at præsentere og sammenligne deres strategier.	Eleverne præsenterer deres arbejde, lytter, stiller spørgsmål og drøfter andre strategier og løsninger.
Institutionalisering (didaktisk) 5 minutter	Læreren fremhæver de matematiske ligheder og forskelle i elevernes strategier. Det forklares, hvorfor nogle strategier ikke vil give et bevis for at sammenhængen er kvadratisk, men kan være nok så	Eleverne lytter og forbinder deres løsning med en generel kvadratisk funktion.

	overbevisende ud fra grafer og en formel produceret vha. CAS-værktøj. Læreren introducerer den kvadratiske funktion.	

Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden:

Eleverne vil udfylde tabellen med data (v, d).

	Tid (sek.)	Ændring i hastighed mens der bremses (km/t)	Gennemsnitshastighed (km/t)	Gennemsnitshastighed (m/s)	Tids-interval Δt	Distancen der er kørt, mens der bremses Δd (m)
	t = 0 til t = 0.4	v = 40 til v = 30	35	$\frac{175}{18}$	0.4	$\frac{35}{9}$
	t = 0.4 til t = 0.8	v = 30 til v = 20	25	$\frac{125}{18}$	0.4	$\frac{25}{9}$
	t = 0.8 til t = 1.2	v = 20 til v = 10	15	$\frac{25}{6}$	0.4	$\frac{15}{9}$
	t = 1.2 til t = 1.6	v = 10 til v = 0	5	$\frac{25}{18}$	0.4	$\frac{5}{9}$
Distancen kørt under bremsning i alt (m)						$\frac{80}{9}$

Hastigheden lige før der bremses (km/t)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Bremselængden (m)	5	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$

Eller med decimaler for eksempel:

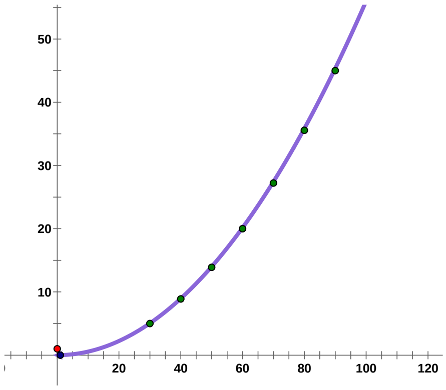
Hastigheden lige før der bremses (km/t)	30	40	50	60	70	80	90	100
Bremselængden (m)	5	8.89	13.89	20	27.22	35.56	45	55.56

Ved at kigge på data i tabellen kan de konkludere:

- Bremselængden bliver større, når begyndelseshastigheden øges.
- Sammenhængen mellem bremselængde og begyndelseshastighed er ikke-lineær, da $\frac{\Delta d}{\Delta v}$ ikke er konstant.
- Hvis begyndelseshastigheden fordobles, så bliver distancen fire gange større. Hvis begyndelseshastigheden bliver 3 gange mindre, så bliver distancen 9 gange mindre.
- Eleverne kan tegne et punktplot (v, d) og konkludere, at sammenhængen muligvis er kvadratisk. De kan opskrive den kvadratiske funktion

$$\mathrm{d}(v) = av^2 + bv + c$$

og bestemme de ukendte koefficienter a, b, c ved hjælp af data fra tabellen ved at løse et ligningssystem. De vil her få en tilnærmet løsning. Strategien vil ikke give et bevis for at sammenhængen er kvadratisk.



- Efter konklusionen at sammenhængen kunne være kvadratisk, vil eleverne kunne bestemme sammenhængen vha. CAS-værktøjet og lave kvadratisk regression. De vil få en tilnærmet løsning, og strategien vil heller ikke her være et bevis for, at sammenhængen er kvadratisk.
- Ud fra tabellens data kan eleverne generalisere beregningerne:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5} + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5} + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5} + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5}$$

$$d_{40} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8.89$$

$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{50} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13.89$$

$$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{60} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9+11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9}\big(1+3+\cdots+(2n-1)\big) = \frac{5}{9} \cdot n^2$$

En vigtig konklusion er, hvis eleverne observerer, hvor mange tidsintervaller der skal til, før bilens hastighed er nået til 0 dvs. bilen er bremset helt. Så hvor mange gange skal der trækkes 10 fra begyndelseshastigheden v_0:

$$v_0 - 10n = 0 \Longrightarrow n = \frac{v_0}{10}$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180}{v_0}^2 \approx 0.0056{v_0}^2$$

I denne formel substitueres v_0 i enheden km/t for at få distancen i meter.

- Eleverne kan bruge lommeregnere og skrive data i tabellen som decimaltal. Resultaterne vil ikke være eksakte, og det vil være svært for dem at opdage mønstre.

De følgende punkter er det meget usandsynligt at elever i Danmark i 1.g vil kaste sig ud i, men det kan naturligvis ikke udelukkes. Vi medtager det her som inspiration til valgfrie emner eller videre arbejde, evt. i samspil med andre fag.

- Eleverne kan bruge informationen, at begyndelseshastigheden aftager med 10 km/t for hver 0.4 sekunder. Herfra kan de beregne, at hastigheden vil aftage med 25 km/t for hvert sekund, eller med 6.94 m/s for hvert sekund hvilket betyder, at accelerationen er $a = 6.94$ m/s². Hvis de har haft fysik, kan de bruge formlen:

  $v = v_0 - at,\ d = v_0 t - \frac{a}{2}t^2$.

  De benytter en vigtig konklusion: hvis vi kigger på bremselængden, så søger vi det øjeblik, hvor hastigheden er nul. Fra den første formel med $v = 0$ får de $t = \frac{v_0}{a}$, og sætter dette ind i det andet udtryk og får:

  $d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.8} = 0.072v_0^2$.

  I denne formel kan v_0 substitueres i m/s for at få distancen i meter.

- Hvis eleverne beregner accelerationen i km/t² vil de få:

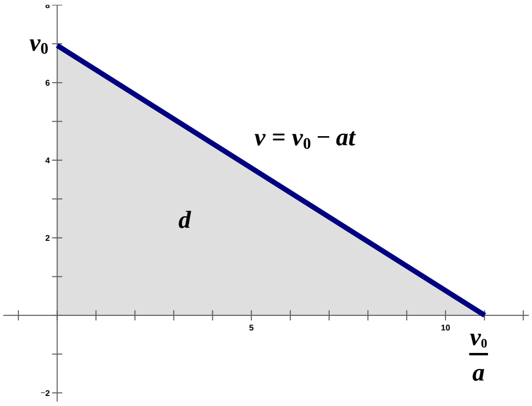
  $a = 90000$ km/t², derpå substituere v_0 i km/t og få distancen i kilometer.

$d = \frac{v_0^2}{180000}$, eller i meter $d = \frac{v_0^2}{180}$.

- Eleverne kan tegne en v-t-graf og beregne distancen som arealet under grafen:

  $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0.072v_0^2$.

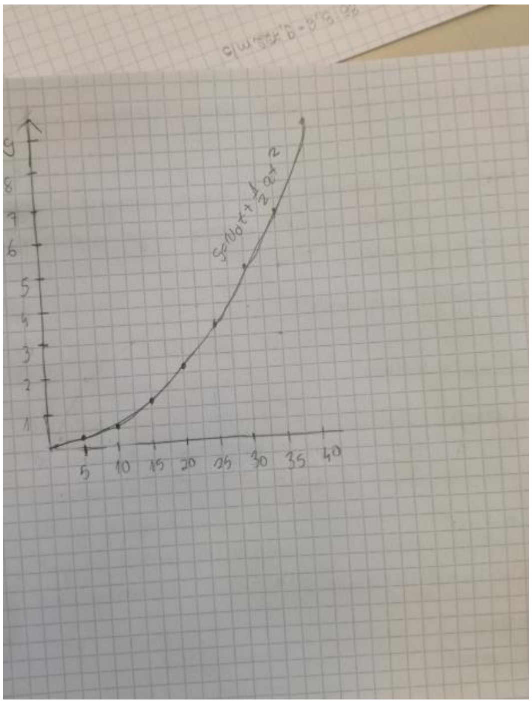
  I denne formel substitueres v_0 i m/s.



Forklaringer til materialerne

Læreren kan benytte en PowerPoint-præsentation, når problemstillingen stilles til eleverne, og eleverne vil få udleveret tabellen, som de skal udfylde. Målet er at få dem opmuntret til at observere 0.4 sekunders intervallerne, gennemsnitshastigheden i disse intervaller (i km/t og m/s) så vel som den estimerede tid i det pågældende tidsinterval. De vil beslutte sig for at summe distancerne sammen til hastigheden bliver nul. Antallet af rækker i tabellen vil derfor ændres og eleverne vil beslutte sig for, hvor mange rækker de har brug for.

I den anden tabel vil de ud over den foreslåede hastighed på 40 km/t vælge andre hastigheder for at observere på egen hånd. I handlingsfasen vil eleverne bruge tabellen. Hvis udfyldelsen af tabellen for de forskellige begyndelseshastigheder tager for lang tid, så kan det tilrådes, at der laves en arbejdsdeling. Eleverne bør indse, at de kan bruge de foregående beregninger, når de skal bestemme bremselængden for andre begyndelseshastigheder, samt at aflæsning af bremselængden kan gøres direkte i tabellen for begyndelseshastigheder, der er lavere. I tilfælde af at en del af eleverne starter op på en helt ny tabel for hver nye begyndelseshastighed hen over de 20 minutters adidaktiske fase, så kan man som lærer med fordel afbryde klassens arbejde for en kort stund i plenum at spørge grupperne, hvordan de har arbejdet med tabellen og derved nå frem til, hvordan man let kan komme videre fra 40 km/t. Der vil højst sandsynligt være mindst én gruppe, der har indset systemet, som kan bruges som feedback til alle andre grupper.



For at tegne graferne kan eleverne bruge millimeterpapir/ternet papir eller computere.

Hvis elever skulle nå i mål med at konkludere eksistensen af summen $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$, kan de tilbydes terninger til visuelt at nå frem til et bevis uden ord. I en dansk kontekst er det usandsynligt, at eleverne vil nå frem til en sådan sum. Vi har bevaret dette for at vise, hvordan vi måske kan udfordre dygtige elever ved at bede dem regne eksakt i tabellen og se, hvor langt de kommer. Det bliver næsten Georg Mohr-lignende opgaver i dette tilfælde.

Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable

Nogle dele af scenariet kan ændres. I dette kapitel vil vi liste de didaktiske variable eller dele af scenariet, der kan ændres, samt lærerens interventioner, som bør implementeres i nogle bestemte situationer.

Men ved gennemførelsen af scenariet bør de tænkte didaktiske og adidaktiske faser overholdes, og handlingsfasen skal holdes adidaktisk. Ligeledes er det vigtigt at gennemføre en valideringsfase, hvor eleverne vil evaluere de præsenterede løsninger. Så disse elementer i strukturen er vigtige at holde fast.

Det didaktiske miljø: Problemstillingen kan præsenteres på forskellige måder. Læreren kan tale om problemstillingens indhold, kan bruge præsentationen (Appendix A) eller en video. Hastigheden på 40 km/t er valgt vilkårligt og kan erstattes af andre, men for at kunne se mønstrene i tabellen tilrådes det at vælge hastigheder, der er et multiplum af 10. Hastighedsændringen på 10 km/t for hver 0.4 sekunder er valgt, så det er realistisk samtidig med, at eleverne får mulighed for at se mønstrene. Det anbefales, at man holder fast i denne værdi.

Tabellen er tænkt til at hjælpe med at organisere dataene, men bør ikke betragtes som et krav, da eleverne kan nå generelle konklusioner uden at beregne bremselængden for bestemte hastigheder (især hvis de har kendskab til fysik). Tabellerne er lavet som skitser, så eleverne selv skal vurdere, hvor mange rækker de skal foretage beregningen for i den første tabel, og hvilke hastigheder der skal indgå i den anden.

Læreren bør undgå at give præcise tabeller for at eleverne sættes i stand til at udvikle undersøgelsesfærdigheder. Eleverne kan opfordres til at bruge matematikprogrammer til tegning, visning og beregninger, men scenariet kan implementeres uden brug af computer. Læreren kan lave materialer til brug af matematikprogrammer. Hvis en lærer laver materialer, skal man huske på, at matematikprogrammet kun hjælper med beregning og visning af resultaterne, men det giver ikke konklusioner.

Varigheden af de enkelte faser kan skræddersys til eleverne, men afvigelserne bør ikke være for store.

Hvis grupperne i løbet af *den adidaktiske fase* ikke har fundet en generel formel, der forbinder bremselængden med begyndelseshastigheden, kan læreren stille følgende spørgsmål:

- Kan du se et system i værdierne for bremselængderne, du er kommet frem til?
- Er det muligt at repræsentere resultaterne grafisk? Og hvordan kan du koble det du ser grafisk med det algebraiske udtryk?

- Hvis du har bestemt bremselængden for forskellige begyndelseshastigheder, da du udfyldte tabellen, kan du så gøre det samme for et helt generelt v i stedet for et konkret?
- Hvilke formler fra fysik kunne være nyttige?
- Hvordan kan CAS-værktøjet være behjælpelig med at bestemme formler eller sammenhænge?

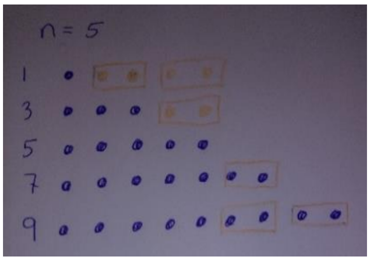
Hvis eleverne i en gruppe ikke kan komme i gang, kan læreren lede dem videre med spørgsmål, men ikke spørgsmål der leder frem til en løsning, men blot kan sætte dem i gang fx med at producere data via tabellen.

Det er ikke nødvendigt, at læreren bliver ved gruppen, indtil eleverne har svaret på de stillede spørgsmål. Man kan med fordel tænke disse små situationer hos eleverne som små devolutionsfaser med fokus på en begrænset problemstilling og give eleverne mulighed for at fortsætte deres arbejde adidaktisk med handlingsfasen og formuleringsfasen.

Læreren bør ikke animere til yderligere spørgsmål og bør heller ikke foreslå svar. Man forfalder herved til at lede eleverne frem til en løsning men tager muligheden fra eleverne for at arbejde adidaktisk.

For grupper der har problemer med at vise formlen: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

kan læreren give hjælp, fx følgende:



- Præsenter hvert tal i summen med prikker og observer.
- Sæt summen lig med S, og skriv den to gange men i omvendt rækkefølge: først fra første til sidste tal og derpå fra det sidste tal til det første.

Det er ikke nødvendigt, at eleverne beviser formlen i den adidaktiske fase.

Det er værd at finde ud af, at den observerede værdi for summen er lig med n^2, og beviset kan derefter udføres didaktisk i valideringsfasen.

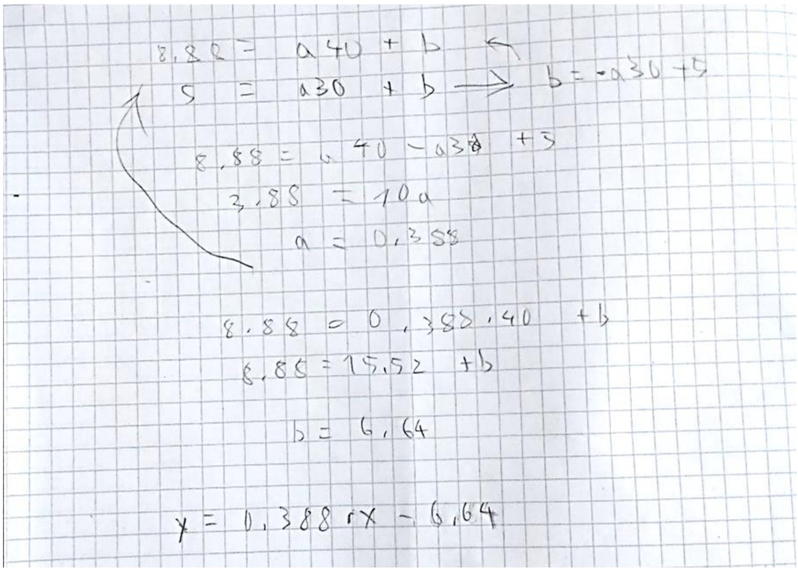
Eleverne skal selv vælge begyndelseshastigheder og vil højst sandsynligt vælge hastigheder som 50, 60, 70 ... km/t. Hvis de vælger hastigheder, der ikke er et multiplum af 10, vil de få problemer med at bestemme det tidspunkt, hvor hastigheden er 0, fordi det ikke vil være et helt multiplum af 0.4 sekunder. I dette tilfælde vil det blive svært at se mønsteret i tabellen. I valideringsfasen kan de betragtede hastigheder drøftes.

Resultaterne for bremselængden vil eleverne enten vælge at få skrevet som brøker eller decimaltal. Decimaltallene er kun approksimationer, så nogle mønstre bliver derfor svære at se. Forskellen på disse to præsentationer af resultaterne kan også drøftes i valideringsfasen.

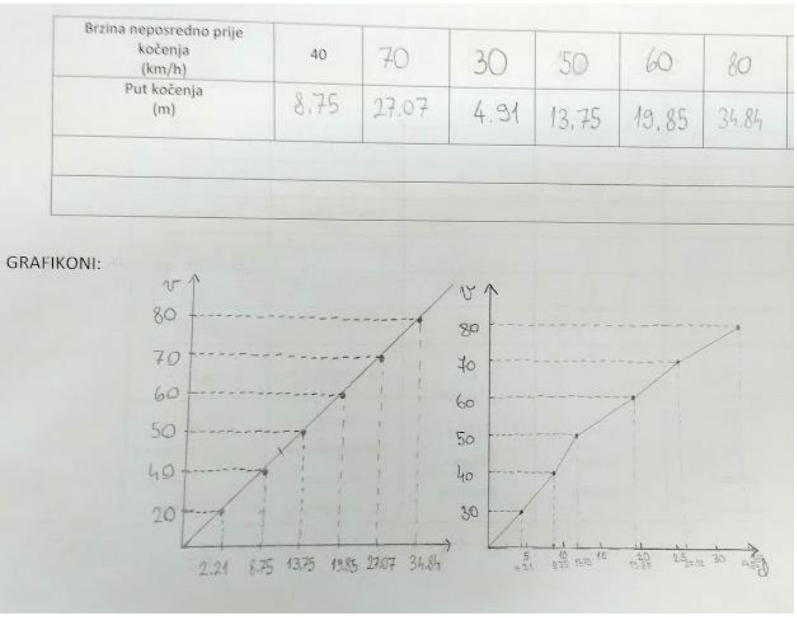
I *institutionaliseringsfasen* er det vigtigt, at størsteparten (hvis ikke alle) strategier, som har været oppe at vende i klasselokalet, er blevet koblet med hinanden.

Observationer fra klasserummet

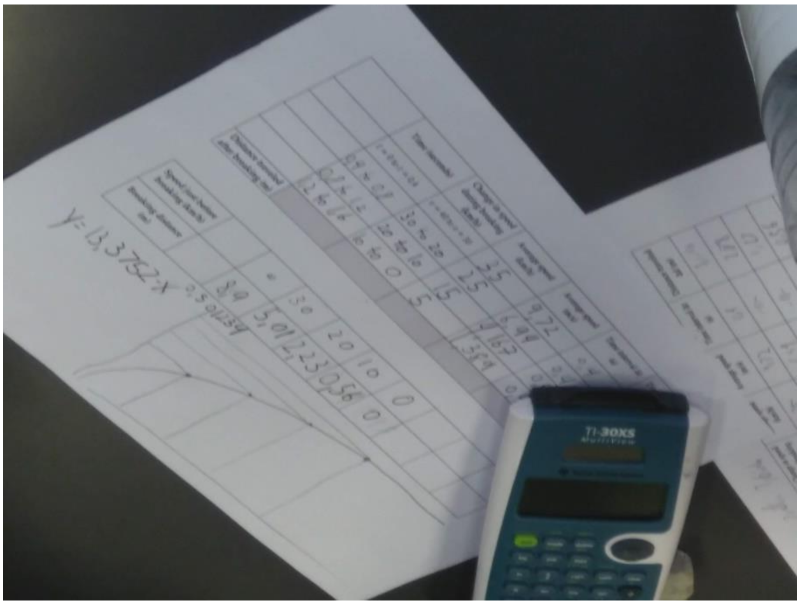
I nogle grupper får eleverne lavet fejl i beregningerne og får dermed den forkerte bremselængde for nogle begyndelseshastigheder. I den første formuleringsfase kan læreren bede eleverne fra de forskellige grupper sammenligne deres resultater og få korrigeret de forkerte svar.



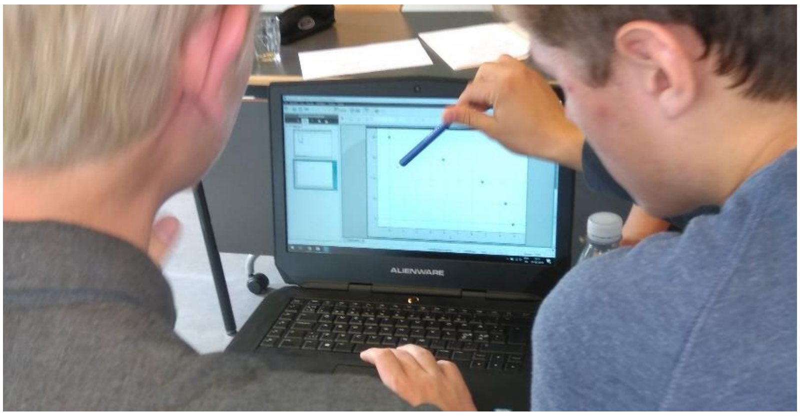
Nogle elever antog, at sammenhængen mellem begyndelseshastigheden og bremselængden var lineær. De brugte tabellens data til at bestemme den lineære funktion.



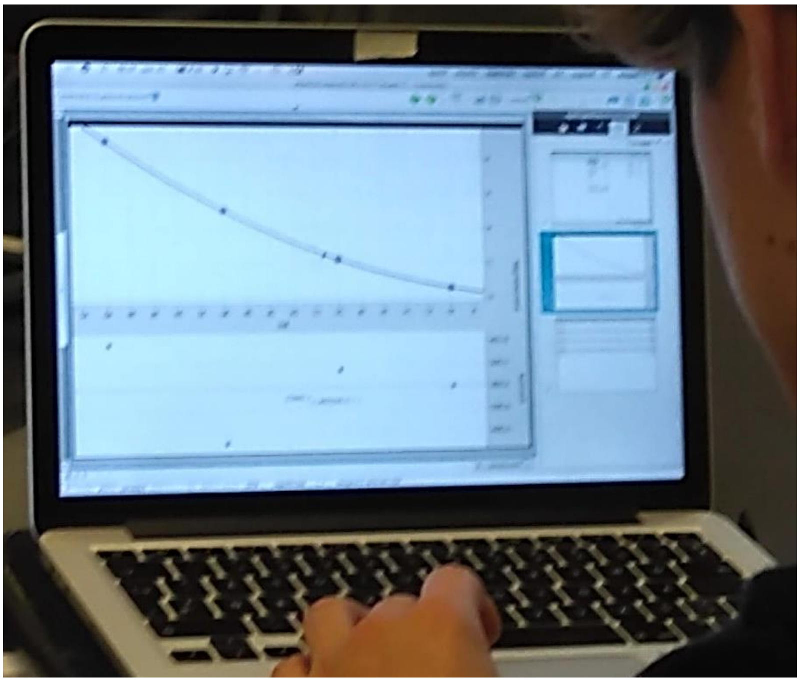
Nogle grupper prøvede at lave punktplots, så punkterne lå på en ret linje eller som grafen for en stykkevist lineær funktion. I tilfælde som dette kan læreren spørge eleverne, om de kan forklare, hvorfor sammenhængen skulle være lineær. Ligeledes kunne der spørges efter, hvad der er karakteristisk for den lineære funktion, og om data i tabellen understøtter denne viden. Eleverne skulle her gerne indse, at sammenhængen ikke er lineær, idet differenskvotienten ikke er konstant.



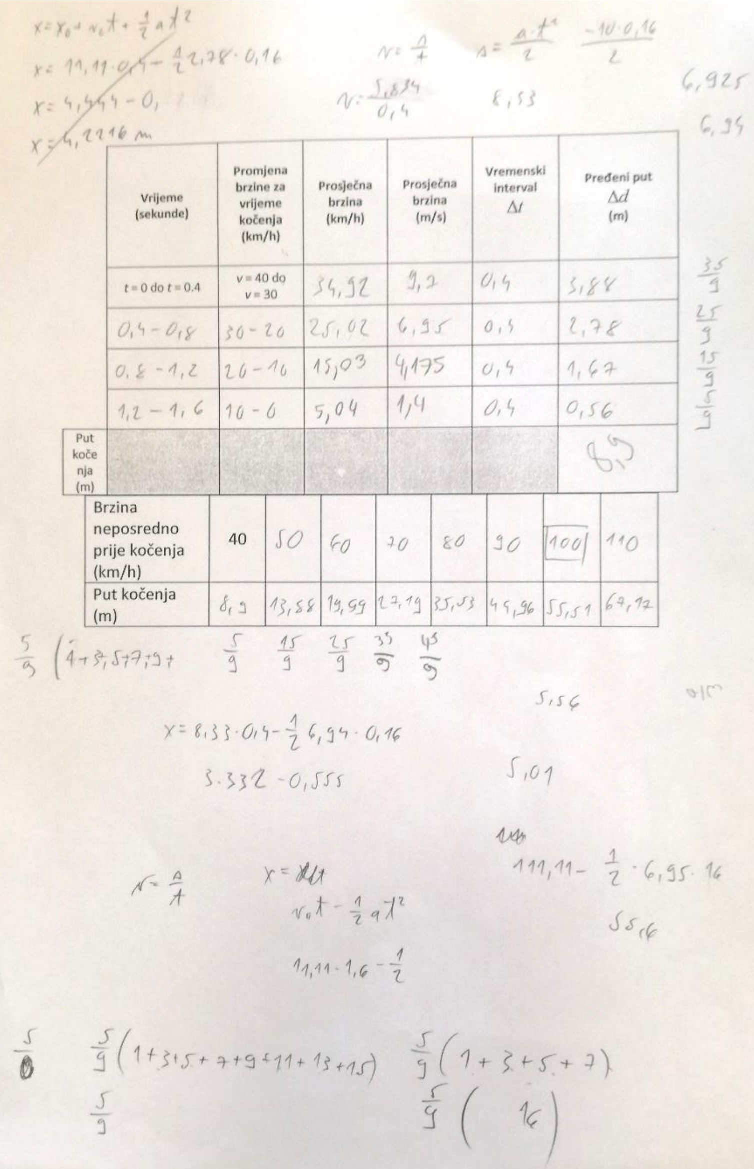
Nogle elever fik også sat distancen som uafhængig variabel og afsatte distancen på 1. aksen



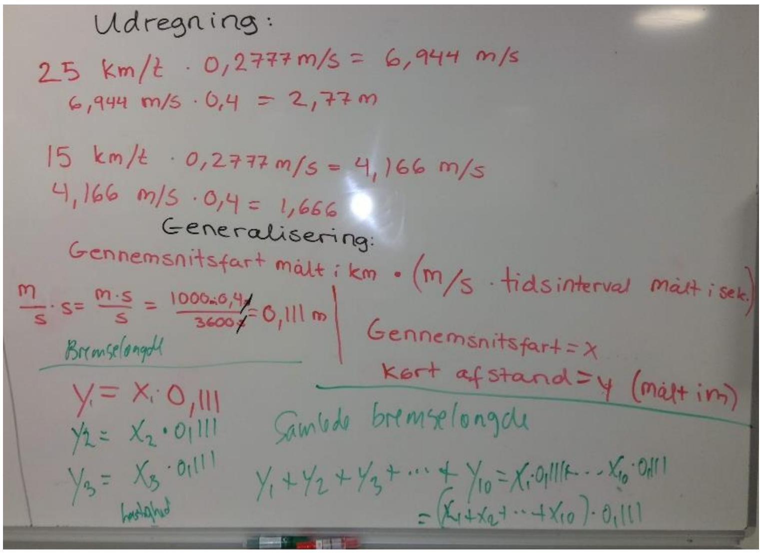
Nogle elever brugte CAS-værktøjer.



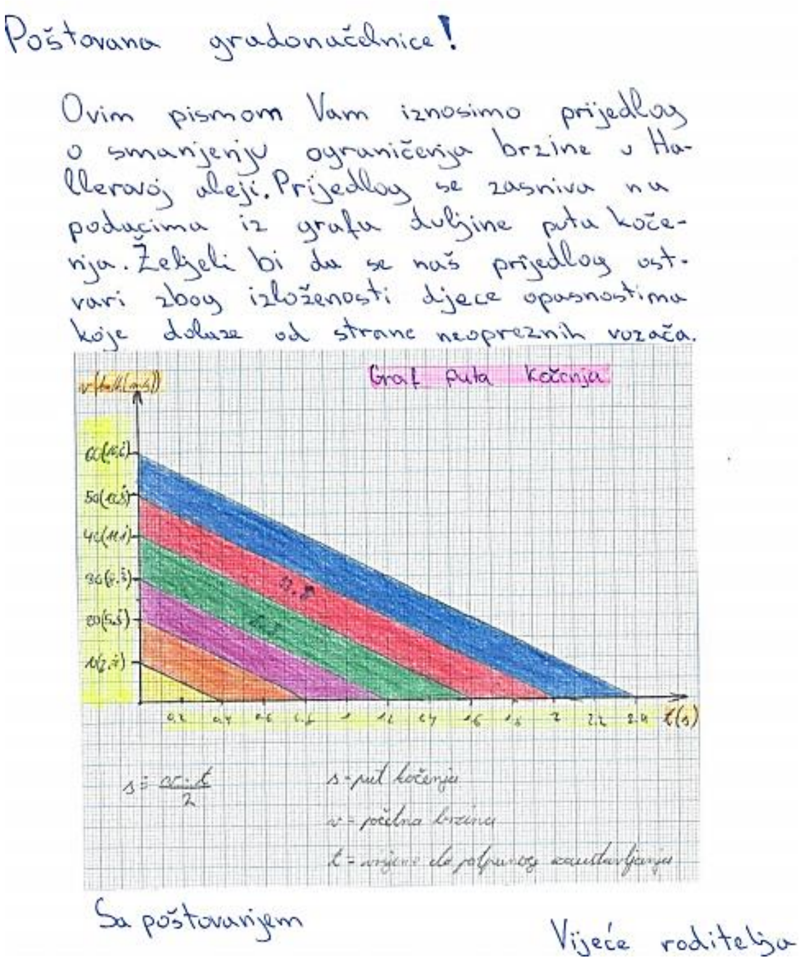
Efter at have konkluderet at sammenhængen kunne være kvadratisk, bestemte eleverne sammenhængen vha. kvadratisk regression.



I nogle grupper brugte eleverne brøker og kom frem til summen af fortløbende ulige tal.



Her har eleverne fundet frem til summen af nogle andre følger. I dette tilfælde skulle læreren afslutte deres arbejde i institutionaliseringsfasen (lærerens arbejde er vist med grønt).



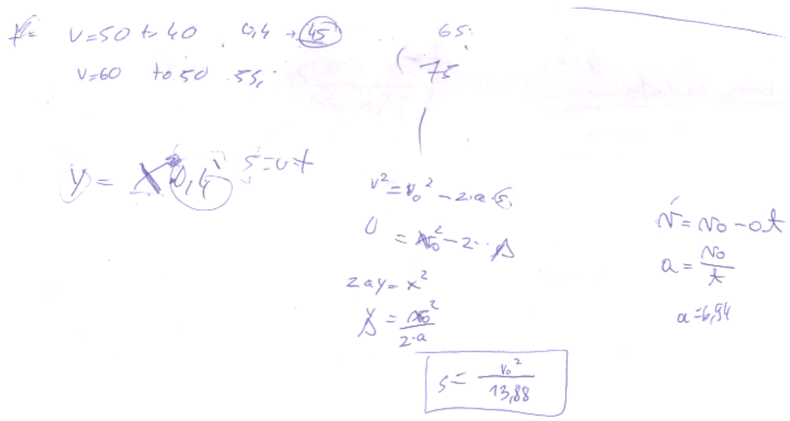
Poštovana gradonačelnice!

Ovim pismom Vam iznosimo prijedlog o smanjenju ograničenja brzine u Hallerovoj aleji. Prijedlog se zasniva na podacima iz grafa duljine puta kočenja. Željeli bi da se naš prijedlog ostvari zbog izloženosti djece opasnostima koje dolaze od strane neopreznih vozača.

Sa poštovanjem

Vijeće roditelja

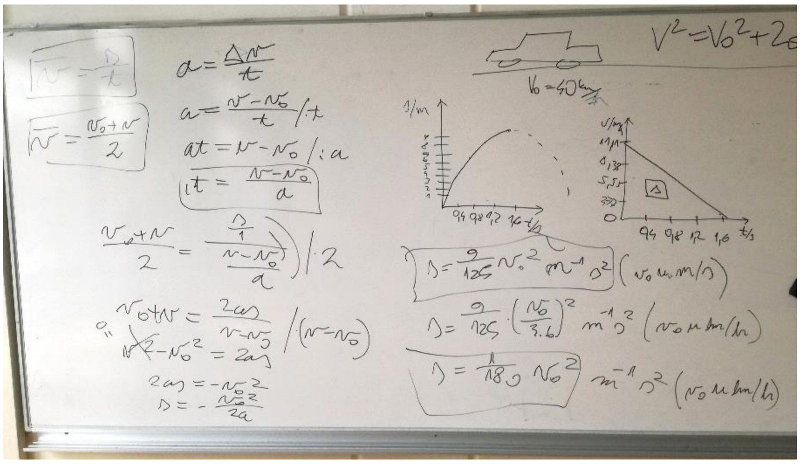
Denne figur viser en gruppe elevers v-t-graf for forskellige begyndelseshastigheder og deres beregning af bremselængden som arealet under grafen. I dette tilfælde skulle læreren fortsætte ideen i institutionaliseringsfasen og tegne grafen for et generelt v.



Her har nogle elever kombineret formlerne $a = \frac{\Delta v}{t}$, $\bar{v} = \frac{s}{t}$ og $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$, og fået

$v^2 - v_0^2 = 2as$ (1).

Da hastigheden v=0, når vi har bremselængden s, så følger det, $s = -\frac{v_0^2}{2a}$, hvor accelerationen her er et negativt tal, da der bremses.



Formel (1) i ovenstående eksempel kan opnås ved at isolere tiden t i formlen $v = v_0 + at$ og indsætte udtrykket i $s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ eller de kender allerede formlen fra fysik.

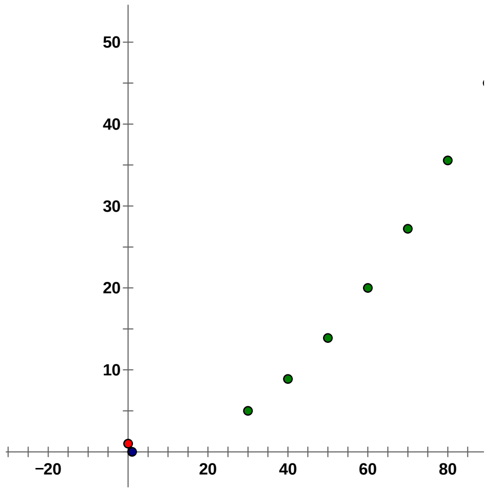
Hvis eleverne bruger formel (1) vil de nå frem til den kvadratiske sammenhæng mellem bremselængden og begyndelseshastigheden uden at beregne konkrete værdier. Elever med denne tilgang til problemet vil højst sandsynligt være langt hurtigere færdig end de andre grupper. Her kan man bede disse elever om at være kritiske over for data i tabellen (fx hvorfor er gennemsnitshastigheden relevant data?), eller få til opgave at vise forholdet mellem bremselængde og starthastighed grafisk, at forberede en forklaring på vigtigheden af hastighedsgrænsen nær skolerne eller at undersøge afhængigheden af den totale bremselængde og starthastigheden (Se punktet *Forslag til yderligere problemstillinger for kvadratiske funktioner*)

Konklusion

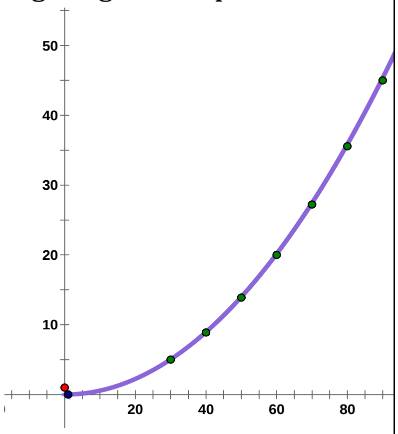
Vi kan se, at nogle elever drager konklusioner ved kun at kigge på tallene i tabellen, mens andre prøver at beskrive sammenhængen mellem bremselængden og hastigheden umiddelbart før der bremses. Se tabellen nedenfor:

<table>
<tr><th>Tal</th><th>Sammenhænge</th></tr>
<tr><td>Eleverne beregner bremselængden for nogle få hastigheder fx 40 km/t og 70 km/t og konkluderer, at bremselængden er for lang, hvis bilen kører 70 km/t, så derfor vil de anbefale en hastighed på 40 km/t.</td><td>Eleverne konkluderer ved at kigge på tallene, at der ikke er en lineær sammenhæng (for højere hastigheder vil der være en mere drastisk ændring i distancen, hvis hastigheden ændres).</td></tr>
<tr><td>Eleverne fylder flere datapunkter ind i tabellen fx
<table><tr><td>Fart (km/t)</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr></table></td><td>Eleverne kigger på tallene i tabellen og konkluderer, at sammenhængen kunne være kvadratisk, fordi hvis vi fordobler hastigheden</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>Bremse-længde (m)</td><td>5</td><td>8.89</td><td>13.89</td><td>20</td><td>27.22</td><td>35.56</td><td>45</td></tr>
</table>
De vil lave deres anbefaling på baggrund af tabellens tal.
</td>
<td>fra 30 til 60 km/t, så vil distancen firdobles.</td>
</tr>
<tr>
<td>
Eleverne indtegner punkterne i et koordinatsystem og bygger deres anbefaling på baggrund af plottet.



</td>
<td>
Eleverne indtegner punkterne i et koordinatsystem og konkluderer, at sammenhængen kunne være kvadratisk på baggrund af grafen, de har tegnet gennem punkterne.



</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>Eleverne konkluderer, at der er en kvadratisk sammenhæng og bestemmer sammenhængen vha. kvadratisk regression.</td>
</tr>
<tr>
<td>Eleverne konkluderer, at der er en kvadratisk sammenhæng og bestemmer koefficienterne for sammenhængen ud fra tal i tabellen.</td>
</tr>
<tr>
<td>Eleverne argumenterer for at bevise, at der er en kvadratisk sammenhæng. (se under Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden).</td>
</tr>
</table>

Selvom beregninger og indsamling af data er vigtigt i dette scenarie, så skulle eleverne gerne føle behov for at undersøge nærmere, hvilken sammenhæng der er. Hvis alle elever er tilfredse med svaret opnået ved kun at kigge på tallene, så bør læreren drøfte hvad det betyder at *"bestemme sammenhængen"* mellem to størrelser i institutionaliseringsfasen.

Evalueringsværktøjer

Ved lektionens slutning eller i begyndelsen af næste lektion kan man give eleverne følgende opgaver:

1) To biler passerer ned ad gaden. Hastigheden for den ene er tre gange større end hastigheden for den anden. Vil bremselængden for den hurtigste bil være tre gange større end for den langsomste? Begrund dit svar.

   Svar: Nej. Bremselængden er proportional med kvadratet på hastigheden umiddelbart før der bremses. Derfor vil bremselængden for den hurtigste bil være 9 gange længere end den langsomste.

2) Et motorkøretøj bevæger sig med en hastighed på 80 km/t. Hvilken hastighed skal hastigheden reduceres til, hvis bremselængden skal være 4 gange mindre?

   Svar: Da bremselængden er proportional med kvadratet på hastigheden, så skal hastigheden halveres dvs. reduceres til 40 km/t.

3) Bremselængden påvirkes af såvel begyndelseshastigheden som af vejrforholdene på vejen. En dag blev der lavet en måling, og man fandt frem til, at et motorkøretøj med hastigheden 40 km/t stoppede efter 10 m. Efter hvor mange meter vil motorkøretøjet stoppe, hvis forholdene er som før men begyndelseshastigheden er 70 km/t?

   Svar: Bremselængden er proportional med kvadratet på begyndelseshastigheden, så vi antager at dette kan skrives $d(v_0) = kv_0^2$ *for en konstant k. I denne opgave vil det betyde, at* $d(40) = 10$*. Indsættes dette i udtrykket ovenfor, så kan vi bestemme konstanten k:*

   $k = \frac{d}{v_0^2} = \frac{1}{160}$*. Et motorkøretøj, der kører med hastigheden 70 km/t vil stoppe efter:* $d(70) = \frac{70^2}{160} = 30.625 \approx 30.6\ m.$

Forslag til yderligere problemstillinger vedrørende kvadratiske funktioner

1. Den totale bremselængde for et motorkøretøj består af to dele: reaktionslængden og bremselængden.
Distancen, som bilen når at køre, fra føreren ser et behov for at bremse, til det øjeblik der faktisk trykkes på bremsen, kaldes reaktionslængden. Førerens reaktionstid er 1 sekund og kan være længere alt efter føreren og hans tilstand (fx sygdom, træthed, alder, påvirkning af stoffer eller alkohol). Antag en bilist er under påvirkning af alkohol (0.5 g/l alkohol i blodet) og har en reaktionstid på 1.5 s. Vi antager at bilen kører med konstant hastighed i det tidsrum bilisten bruger på at reagere.

Distancen, som et motorkøretøj når at køre, fra føreren starter med at bremse, og til køretøjet holder stille, kaldes bremselængden. Bremselængden afhænger primært af hastigheden, umiddelbart før der trykkes på bremsen (den såkaldte begyndelseshastighed), vejbetingelserne og kan også afhænge af køretøjets tilstand. Ser vi bort fra køretøjets tilstand, så kan bremselængden beregnes ved formlen: $s = \frac{v^2}{254\mu}$,
hvor s er bremselængden, v er begyndelseshastigheden i kilometer pr. time, og μ er friktionskoefficenten, som afhænger af vejbetingelserne:

Friktionskoefficienten $\boldsymbol{\mu}$	Tør vej	Våd vej
Ny asfalt	0.7 – 0.8	0.5 – 0.6
Gammel og beskidt asfalt	0.6 – 0.7	0.25 – 0.45
Grusvej eller små sten	0.6 – 0.7	0.3 – 0.5
Sne	0.2 – 0.4	
Is	0.05 – 0.1	

a) Undersøg hvordan reaktionslængden afhænger af begyndelseshastigheden for en bilist med reaktionstiden 1 sekund og for en bilist med reaktionstiden 1.5 sekunder.

b) Bestem hvordan bremselængden afhænger af begyndelseshastigheden på tør vej, våd vej og vej dækket af sne.

c) Bestem hvordan den totale bremselængde afhænger af begyndelseshastigheden for forskellige reaktionstider og vejbetingelser.

2. Hvor mange diagonaler har en firkant, femkant, sekskant og n-kant?

3. Hvor mange stykker pizza kan du få, hvis du skærer pizzaen 2, 3, 4, …, n gange?

4. Den ligesidede trekant med sidelængden n cm er opdelt i ligesidede trekanter med sidelængden 1 cm. Hvor mange er der?

5. Beskriv boldens bane, hvis der skydes en bold mod kurv i basketball.

Begrundelser for og RME-perspektiver på scenariet

Relevans og anvendelighed

Scenariet om bremselængder relaterer til erfaringer fra hverdagen og til en viden knyttet til køretøjers bevægelse og opbremsning. Eleverne bliver opmærksomme på, at hastigheden umiddelbart før bremsning har en effekt på bremselængden. Viden og færdigheder relateret til emnet om kvadratiske sammenhænge er til stede inden for mange andre områder også.

Undersøgelsesfærdigheder

Det undersøgelsesbaserede er inkluderet i alle faserne. Gennem elevernes arbejde med problemstillingen vil de genere eksempler, eksperimentere systematisk, organisere data, formulere hypoteser, finde og verificere formler, samarbejde og kommunikere. Undersøgelsesfærdighederne bør inkluderes i den feedback, der gives i valideringsfasen samt institutionaliseringen.

Potentiale til et forløb

Dette scenarie kan være en del af et forløb om kvadratiske sammenhænge og egenskaberne for kvadratiske følger og funktioner.

Forudsætninger: det forudsættes, at eleverne forstår funktionsbegrebet og i særdeleshed den lineære funktion. Skal der arbejdes med aritmetiske følger og deres egenskaber, så skal eleverne have kendskab til begrebet følger.

Introduktion: en kontekst med en bil der bremser, kan bruges som en bred åben problemstilling, der involverer modulet.

RME-perspektiv

Horisontal matematisering: det matematiske sprog introduceres for at kunne drøfte hele situationen. Eleverne laver den første uformelle model af situationen – scenariet med bremselængder og kvadratiske sammenhænge introduceres.

Vertikal matematisering: matematikken der indgår i problemstillingen skal føres et skridt videre. Modellen er lavet mere kompakt og generel. Eleverne undersøger mønstre i tallene og i deres summer.

Eleverne betragter kvadratiske følger og det karakteristiske ved kvadratiske følger: De første differenser er lineære og den anden differens er konstant. Endvidere er summer af udtryk i lineære (aritmetiske) følger kvadratiske følger. Generaliseres dette til kvadratiske funktioner, så er den første afledede lineær, og den anden afledede er konstant. Endvidere er det ubestemte integral af en lineær funktion kvadratisk.

Mål for tendenser i observationssæt

MERIA-modulet ”Jobannonce”

Scenarie:

Tilsigtede viden	At kunne bestemme, skelne mellem og træffe beslutninger ud fra forskellige mål for tendenser i et observationssæt (aritmetisk middelværdi, typetallet og median).
Bredere kompetencemål	At opnå en bredere kompetence i at analysere observationssæt, træffe og vurdere beslutninger baseret på argumenter samt præsentationskompetencer.
Nødvendige matematiske forudsætninger	Eleverne kan beregne den aritmetiske middelværdi og har kendskab til begrebet gennemsnit. Ligeledes er de i besiddelse af grundlæggende færdigheder i brug af computer: Excel-regneark eller lignende (fx Google sheets, Open Office eller regneark i et CAS-værktøj). De skal vide, hvordan man bruger grundlæggende kommandoer til at beregne summer og gennemsnit samt kunne repræsentere data grafisk (histogrammer, punktplots, boksplots m.v.).
Tid	45 minutter (kan udvides til 90).
Niveau	Primært start 1.g.
Materialer til rådighed	Computer og passende software (Excel, Google Sheets, Open Office, GeoGebra, CAS ...). Datasæt, der i det følgende omtales som *'lønningsliste'*. Datasættet tilføjes som en Excel-fil.

Problemstilling:
Tre virksomheder annoncerer efter nye medarbejdere. For at give potentielle ansøgere en ide om indkomstmulighederne i virksomheden informerer annoncen ansøgerne om den gennemsnitlige månedsløn. I materialet lønningslister.xlsx3 kan du se lønnen til disse tre virksomheder.

I hvilket firma vil du søge arbejde? Forklar og giv matematiske grunde for din beslutning. Overvej følgende: Hvilket eller hvilke tal vil opsummere hele sættet? Hvilken løn fordeler medarbejderne i to grupper af samme størrelse? Brug en grafisk repræsentation af data til at hjælpe dig med at træffe en beslutning.

3 Eleverne vil her modtage en Excel-fil med data. Disse kan ses i Bilag sidst i bogen.

Fase	**Lærerens handlinger inkl. instruktioner**	**Elevers handlinger inkl. reaktioner**
Devolution (didaktisk) 5 minutter	Læreren præsenterer problemstillingen for eleverne og giver dem et link til *Excel-arket* med data (3 lønningslister). Læreren inddeler klassen i grupper á 2-3 elever.	Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål.
Handling (adidaktisk) 20 minutter	Læreren cirkulerer rundt og observerer og hjælper kun i tilfælde af tekniske vanskeligheder (ikke ved brug af programmet). Han noterer sig de forskellige strategier og tilgange, som eleverne vælger.	Eleverne diskuterer i grupperne, hvilke hjælpemidler de vil bruge, hvilken matematik samt hvordan de vil organisere arbejdet.
Formulering (adidaktisk) 5 minutter	Læreren beder eleverne om at organisere deres arbejde og formulere beslutninger.	Eleverne organiserer deres arbejde og opsummerer.
Validering (didaktisk / adidaktisk) 10 minutter	Læreren udpeger nogle elever til kort at præsentere deres løsninger og beslutninger. Grupper med forskellige strategier bør vælges.	Eleverne giver korte forklaringer på, hvad de har gjort. De andre elever lytter og diskuterer beslutningen.
Institutionalisering (didaktisk) 5 minutter	Elevernes arbejde opsummeres og generaliseres: Datas indflydelse på den aritmetiske middelværdi, medianen og typetallet samt fordele og ulemper ved disse målstørrelser. Vær opmærksom på, at denne situation ikke kun har én løsning, men resultatet skal være de forskellige oplysninger, som hver af vurderingerne og beslutningerne giver.	Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål.

Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden

- Nogle elever vil muligvis straks vide, hvad de skal gøre, og starter med at repræsentere data grafisk vha. de værktøjer, de er fortrolige med samt benytter analyseværktøjer til at beregne den aritmetiske middelværdi og medianen for hver lønningsliste. For dem er det centrale punkt at observere, diskutere og konkludere hvad der sker, når de fjerner nogle af de store observationer fra analysen. De vil finde frem til, hvordan det vil påvirke den aritmetiske middelværdi samt medianen og på baggrund af dette nå frem til en beslutning om, hvilken virksomhed, de vil vælge.
- Nogle elever vil lave tabeller og på egen hånd konstruere formler til beregning af den aritmetiske middelværdi og medianen. De får brug for at sortere data, summere data, tælle dem og opdage, hvordan man kan bestemme medianen, når antallet af observationer er et ulige antal. Disse elever skal i tabellerne observere, hvordan der i de sorterede data, især i lønningsliste C, er nogle store observationer i forhold til resten af datasættet og undersøge, hvad der sker med den aritmetiske middelværdi og medianen med og uden de store lønninger. Som en konsekvens vil de lære noget om fordele og ulemper ved disse målstørrelser.
- Nogle elever vil kun repræsentere lønningslisterne grafisk og træffe en beslutning på baggrund af figurerne. Disse elever vil bruge boksplots, hvor de kan aflæse den nødvendige information om medianen og træffe den rigtige beslutning. Ligeledes er outliers lette at få øje på i boksplottet, og de vil konkludere, hvilken effekt de har på den aritmetiske middelværdi og medianen.
- Nogle elever vil tegne diagrammer ud fra data og tælle antallet af outliers manuelt. Ud fra diagrammerne vil de få en ide om middeltallet, hvis de store observationer dvs. outliers vil blive fjernet fra observationssættet. Måske vil de derpå sortere observationerne og få et bedre overblik over lønfordelingen og drage deres konklusioner.

For at eleverne kan blive i stand til at bestemme typetallet, kan man opfordre eleverne til at afrunde lønningerne eller gruppere dem (i sidstnævnte bliver det så typeintervallet de kan bestemme). De kunne derpå repræsentere de nye data i fx et histogram og afbilde frekvensklasserne. Derpå kunne de bestemme typetallet for hver lønningsliste (enten vha. værktøjer i computerprogrammet eller ved at aflæse på histogrammet) og forbedre deres tidligere beslutning om, hvilket firma de vil vælge, uanset hvilken metode de brugte til at bestemme den aritmetiske middelværdi og medianen.

Forklaringer til materialerne

Eleverne får udleveret et datasæt bestående af tre observationssæt givet ved lister af månedslønninger (”*lønningslister*”) for 50 ansatte for tre forskellige virksomheder, og for hver virksomhed en beregnet gennemsnitsløn. Observationerne er ikke sorteret. Det forventes, at eleverne når frem til at sortere data og få tegnet nogle diagrammer.

For at gøre opgaven mere attraktiv for eleverne kan virksomhederne navngives med spændende navne, eller opgaven kan præsenteres som en annonce fra hver af de tre virksomheder publiceret i en avis.

Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable

Datasættet kan udleveres digital eller både på papir og digitalt. Papirformatet kan bruges som introduktion til problemstillingen og en første brainstorm, men det er obligatorisk med computeren i dette scenarie.

Variationer er mulige i forhold til, hvordan man vil organisere klassen. Par eller grupper af tre anbefales, idet der arbejdes med computer.

I forhold til tidsrammerne kan der laves variationer i handlings- og formuleringsfasen.

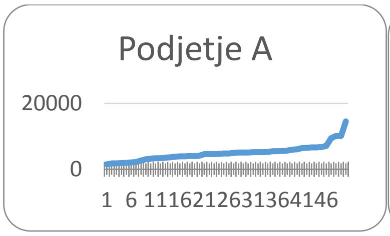
For ikke at skulle ændre i den tilsigtede viden anbefales det at arbejde med observationssættet uændret. Dog kan man overveje at sortere data på forhånd, hvis man skønner, at eleverne har for svært ved at bruge Excel eller andre programmer til at bearbejde data. En anden mulighed er at udvide arbejdet med en aktivitet, der ligger før selve arbejdet med scenariet, der introducerer eleverne til Excel eller det program, man vil arbejde i.

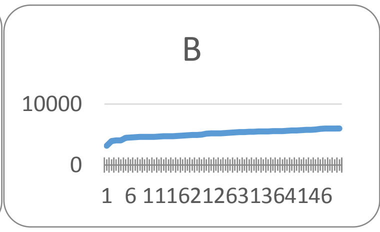
Hvis eleverne allerede er fortrolige med diverse nøglebegreber for tendenserne i et datasæt, så kunne man udvide den tilsigtede viden med følgende:

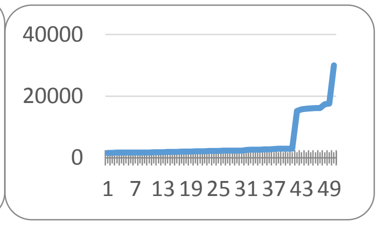
- Introducere begreberne varians og spredning
- Kvartilsættet som et mål for spredning
- Grafiske repræsentationer (boksplot)

Observationer fra klasserummet

Eleverne sorterede observationssættene og præsenterede dem grafisk på følgende måder:

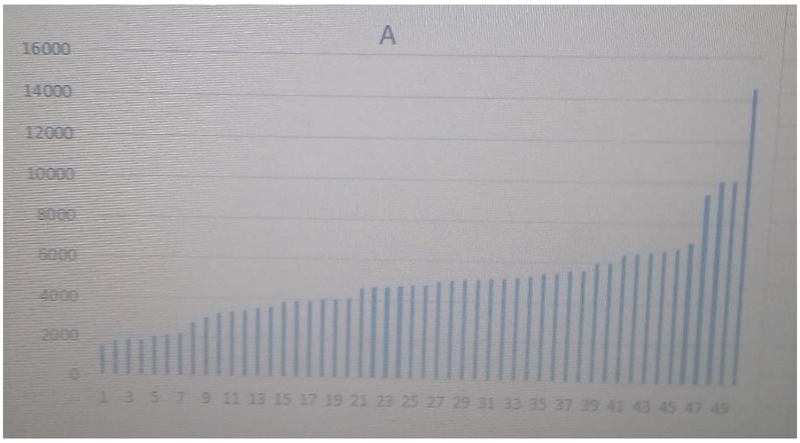




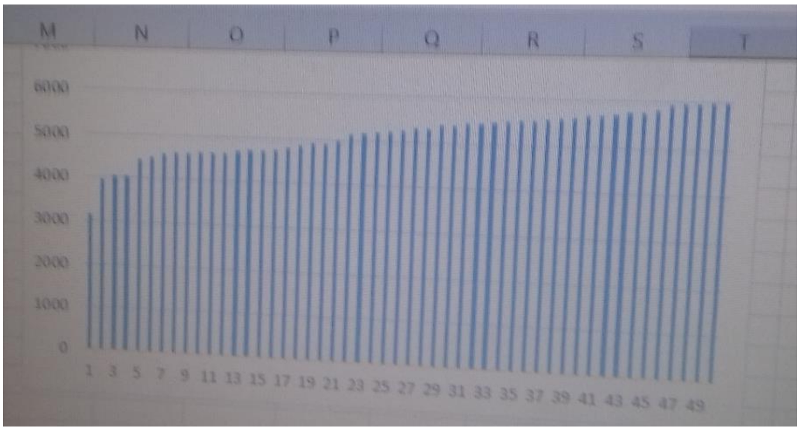


På 1. aksen var de ansatte og på 2. aksen månedslønnen.

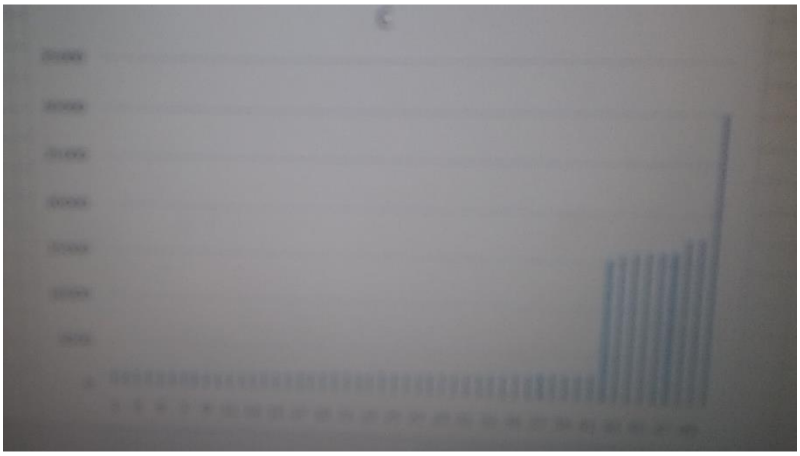
Andre grafiske præsentationer af data satte igen de ansatte på 1. aksen og lønnen på 2. aksen. Eksemplerne nedenfor viser forskellige tilgange til repræsentationer, og som på sin vis giver en information om forskellene mellem virksomhederne.



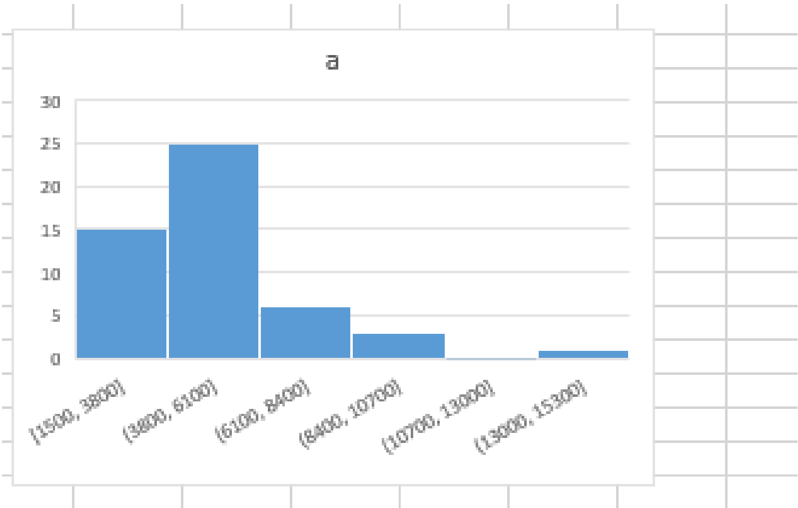
En graf fra virksomhed A, der klart viser den ene ekstreme værdi (løn).

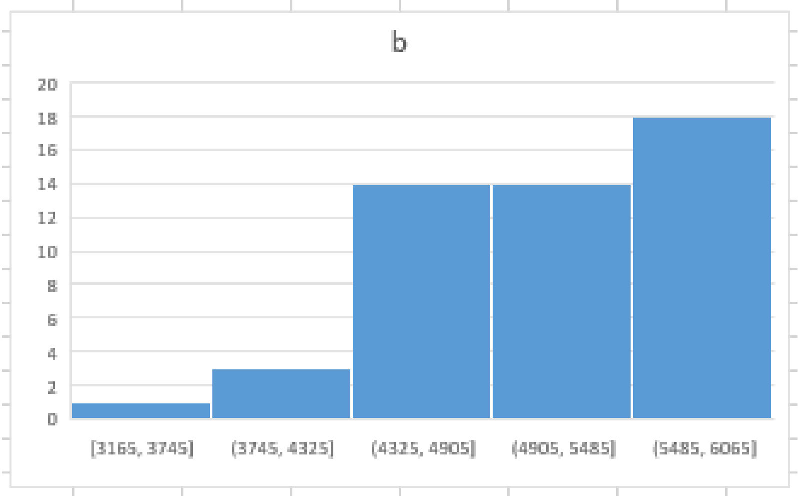


En tilsvarende graf for virksomheden B, som viser en mere jævn spredning og med færre lave lønninger. En af eleverne favoriserede denne virksomhed til et første job, da man her straks ville tjene en pæn løn.



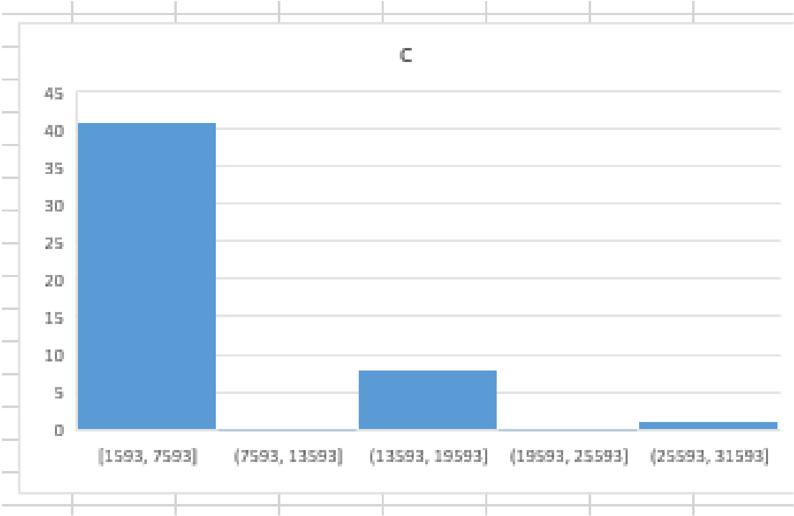
Grafen for virksomheden C viser et stort antal lave lønninger og få højere lønninger og en enkelt ekstrem. En ambitiøs elev sagde, at dette ville være den fortrukne virksomhed. Flere har nævnt denne, da man her har mulighed for at opnå en pæn løn og dermed mulighed for udvikling.

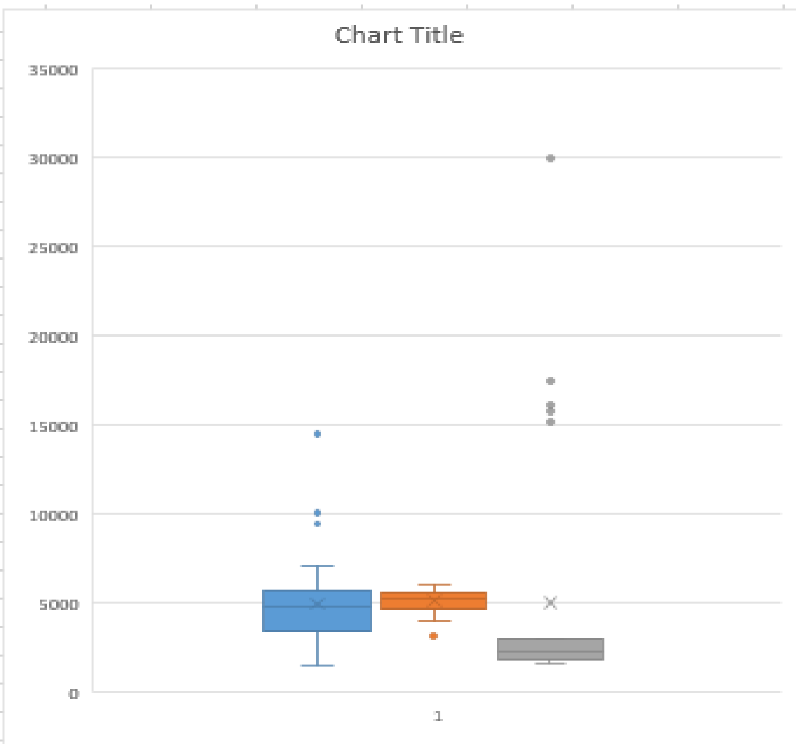




Eleven her havde allerede lidt erfaringer på forhånd i forhold til at analysere data og havde grupperet lønningerne for hver virksomhed og repræsenteret observationssættene i et histogram.

Som en tilføjelse lavede eleven også et boksplot til brug for at træffe en beslutning.





Eksemplerne i det følgende viser nogle forskellige præsentationer af elevernes resultater af deres beregnede nøgletal:

odločili smo se za B, ker je najmanjša plača 3165.

Najbližja povprečni plači:

– A: 5064 → A: najbolj opredeli

– B: 5160 B:

– C: 2979 C:

Eleverne søgte efter den løn i datasættet, som var tættest på middeltallet oplyst i Excel-arket som det bedste valg i forhold til at repræsentere datasættet.
Deres bedste valg var B, fordi den laveste løn i denne virksomhed var den højeste blandt de tre firmaer.

Povprečna plača:

PODJETJE A: 4940 €

PODJETJE B: 5138 €

PODJETJE C: 4992 €

Kje bi se zaposlili?

V podjetju B

Zakaj?

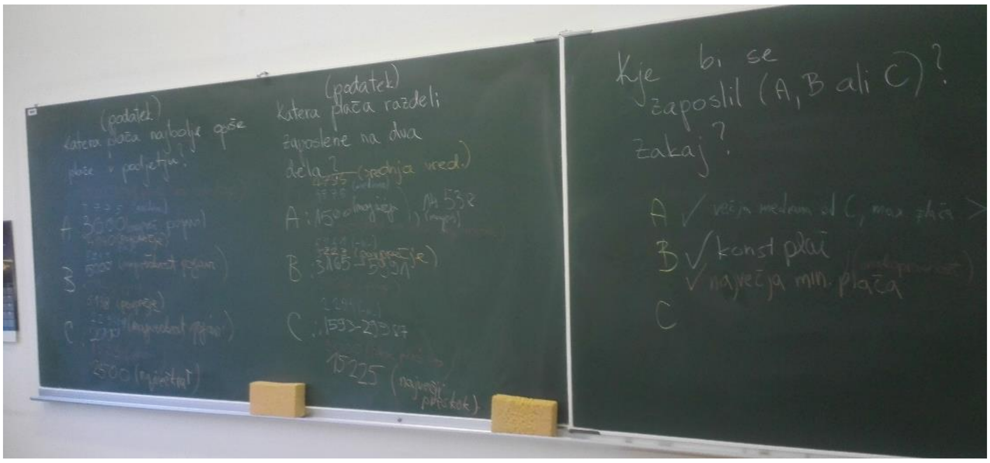
Ker je manj odstopanja od povprečne plače.

Eleverne skriver de givne middelværdier, og deres valg er B, fordi lønningerne i det pågældende selskab har de mindste forskelle fra middelværdien.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	31	4563			13	4998			3	2115
26	18	4632			6	5160			9	2115
27	11	4635			29	5172			12	2205
28	21	4698			38	5208			38	2238
29	15	4755			39	5223			24	2271
30	4	4794			14	5259			23	2316
31	44	4953			17	5310			14	2343
32	34	5064			19	5331			36	2349
33	28	5094			23	5406			17	2355
34	36	5118			24	5406			37	2367
35	24	5133			43	5445			7	2595
36	8	5166			44	5451			15	2631
37	1	5211			31	5487			1	2646
38	13	5265			22	5511			29	2646
39	35	5454			33	5538			46	2757
40	39	5457			27	5550			27	2799
41	37	5580			16	5568			34	2871
42	9	5634			9	5586			31	2925
43	41	5991			20	5637			6	2940
44	17	6063			28	5670			21	2973
45	12	6459			30	5673			30	2979
46	49	6531			47	5700			39	15225
47	25	6585			18	5766			16	15753
48	22	6660			3	5778			22	15909
49	47	6759			32	5826			48	16086
50	45	7101			41	5943			8	16104
51	42	9450			11	5967			47	16158
52	43	10113			36	5976			25	17421
53	14	10131			4	5979			13	17550
54	19	14538			15	5991			33	29987
55	median	4775			median	5241			median	2294

De gule markeringer har eleverne lavet for at opdele listen af lønninger i to lige store dele og fandt medianen ved at bruge Excel. De valgte virksomheden B, fordi den havde den største gennemsnitsløn og ligeledes den største median.

Læreren benyttede de forskellige beregninger til sammenligning og diskussion ved at dele dem på tavlen:



Evalueringsværktøjer

Ved timens afslutning eller i den efterfølgende lektion med klassen, kan man fx stille eleverne nogle spørgsmål som eksemplerne vist for at evaluere i hvilket omfang den tilsigtede viden har rodfæstet sig hos eleverne.

1. Bestem middeltallet, medianen og typetallet for de to observationssæt:

   a) 4, 4, 4, 5, 6, 6, 20

   b) 4, 4, 4, 5, 6, 19

   Svar: a) Middeltal = 7, Median = 5, Typetal = 4, b) Middeltal = 7, Median = 4.5, Typetal = 4

2. I en virksomhed har næsten alle medarbejderne samme løn undtagen direktøren, som tjener 10 gange så meget som en almindelig medarbejder.

   a) Hvad er et godt nøgletal at benytte til at beskrive de centrale tendenser i observationssættet? Begrund dit svar.

   Svar: Medianen, fordi en outlier svarende til direktørens løn får en stor indflydelse på gennemsnittet, men ikke på medianen.

3. Nedenstående data er udfaldet af en test af 45 elever, hvor 100 point er det højst opnåelige pointtal.

81	71	70	72	83
59	32	92	95	61
69	59	91	84	73
74	66	77	70	67
65	58	59	78	93
95	50	62	67	92
65	54	90	92	79
62	75	83	98	71
83	67	59	46	64

   a) Find middeltallet, medianen og typetallet for observationssættet.

   b) Tænker du, at medianen vil repræsentere datasættet korrekt? Begrund dit svar!

   c) Dit resultat af testen er 58. Hvilken måling vil du bruge til sammenligning, når du vil rapportere resultatet til dine forældre?

   Svar: a) Typetallet = 59, Median = 71, Middeltallet = 72.3, b) Medianen vil være det bedste, eftersom 32 point i testen ligner en outlier, c) Typetallet vil være det bedste mål for en elev, der ønsker at præsentere sit resultat fra testen som ikke afvigende meget fra de andre i klassen.

4. Du har fundet tre forskellige sommerferiemål, og de eneste data du har om stederne, er de centrale nøgletal til beskrivelse af tendenserne i et observationssæt bestående af de daglige temperaturer hen over 90 sommerdage målt i °C ved middagstid:

	A	B	C
Middeltal	32.5	32	33
Median	26	32	26
Typetal	20	31	26

a) Hvad fortæller disse tal om klimaet på de tre forskellige feriemål?

Svar: Klimaet på feriemål B er det mest stabile, da middeltal, median og typetal er stort set ens. Feriemål A har et klima, der varierer meget. Da middeltallet er noget større end medianen, betyder det, at der er meget varme dage. Og da typetallet ligger noget under medianen, som jo angiver temperaturen på halvdelen af dagene, så må de varme dage være virkelig varme. Så kan man ikke tåle for meget varme, vil det være risikabelt at tage til feriemål A. Feriemål C har temperaturer typisk omkring 26 grader og halvdelen af dagene ligger på 26 grader eller over. Med et middeltal på 33 grader er de varmeste dage også godt varme, men risikoen for meget kølige dage risikerer man ikke i samme grad som ved A.

Forslag til yderligere problemstillinger vedrørende tendenser i et observationssæt

Det næste skridt kunne være at lave en lignende aktivitet som i scenariet men i en anden kontekst:

- Givet karakterlister for en klasse (anonymiseret). Hvilke nøgletal kunne bedre opsummere deres karakterer?
- Fokus kunne rette sig mod forskellige repræsentationer af data som fx grafer, boksplots og histogrammer og inkludere begrebet spredning fx ved at give grafer med lønninger i stedet for tabeller med rå data og give samme opgave som i dette scenarie at skulle vælge den virksomhed, man helst ville arbejde i.
- Man kunne også bede eleverne finde på situationer, hvor hverken middeltal, typetal eller median kunne sige noget centralt om observationssættet.

Eksempler:

1. Du skal tage en beslutning om, hvordan du kommer i skole: med bus, med tog eller på cykel. Du har fundet nogle data omkring transporttiden afrundet til hele antal minutter fra byens trafikselskab. Og minuttallene fra hjemmet til skolen er givet på baggrund af erfaringer.

   Du er så heldig, at både busstationen og togstationen ligger tæt på både dit hjem og din skole. Observationssættet bygger på målinger gennem et skoleår. Du kan også indtænke andre variable størrelser.

a) Træf en beslutning om din transportform og giv argumenter for dit valg.

		Bus	Tog	Cykel
Mandag	Middeltal	20	12	19
	Median	14	13	19
	Typetal	15	12	19
Tirsdag	Middeltal	19	18	19
	Median	13	12	18
	Typetal	14	13	18
Onsdag	Middeltal	18	12	18
	Median	12	13	17
	Typetal	14	12	18
Torsdag	Middeltal	19	14	18
	Median	12	12	18
	Typetal	15	13	18
Fredag	Middeltal	24	19	20
	Median	20	14	19
	Typetal	19	15	20

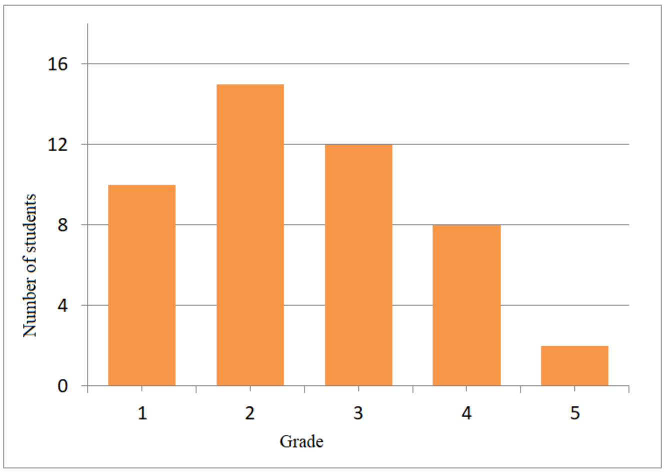
Eleverne kan drøfte situationerne ud fra deres egen synsvinkel. De kunne fx sige, at de ville tage bussen undtagen om fredagen, eller at beslutningen vil afhænge af årstiden. I tillæg til snakken kunne man forestille sig, at der er flere busafgange end togafgange. Til gengæld har man aldrig ventetid med cyklen. Endelig kan de indtænke billetpriser.

2. Histogrammet nedenfor viser et antal elevers karakterer på en skala fra 1-5.

   a) Hvilke af de tre nøglebegreber til at beskrive et observationssæt kan meget let aflæses på figuren?

   b) Bestem alle tre nøgletal og forklar din metode.

   c) Beskriv og kommenter testresultatet ved at bruge nøgletallene.



Begrundelse for og RME-perspektiver på scenariet

I dette scenarie opstår nøglebegreberne til beskrivelse af tendenserne i et observationssæt ud fra undersøgelser og strukturering af løndata. At lære fra og i en anvendelse gør det muligt for eleverne bedre at se, hvordan man bruger deres statistiske viden og færdigheder. Dette scenarie bidrager til evnen til at redegøre for statistiske resultater og at tolke dem kritisk.

I efterfølgende lektioner kan rækken af nøglebegreber udvides til varians og spredning, og man kan kigge på andre sammenhænge. Ligeledes kan man inddrage grafiske repræsentationer som boksplots og histogrammer.

Relevans og anvendelighed

At lære hvordan og hvornår forskellige begreber og grafiske repræsentationer skal bruges er specielt vigtigt inden for statistik, eftersom det bruges inden for mange forskellige fagområder

(fx eksperimentel fysik, samfundsfag, kemi, psykologi og medicin). Hertil kommer, at eleverne også i deres dagligdag ofte støder på statistik fx i aviser, i nyheder på tv og i forbindelse med karaktergivning i skolen.

Undersøgelsesfærdigheder

Det undersøgelsesbaserede element er inkluderet i alle faserne. Gennem arbejdet præsenteret i dette scenarie vil eleverne eksperimentere systematisk og organisere data, træffe beslutninger på baggrund af en analyse, samarbejde og kommunikere. I institutionaliseringen bør undersøgelsesfærdighederne ekspliciteres især at kunne organisere, strukturere og opsummere data.

Potentiale til et forløb

Scenariet kan indgå i et forløb om statistik og illustration af data.

Forudsætninger: eleverne forventes at kunne bruge Excel til elementær databearbejdning som at kunne sortere data, præsentere og udføre beregninger. Ligeledes forventes den aritmetiske middelværdi dvs. middeltallet at være kendt.

Introduktion: Problemstillingen kan introduceres ved at introducere en person, der lige har færdiggjort sit studie på universitetet og nu søger efter et job. Hun læser jobannoncer i avisen og finder tre virksomheder interessante. Hun søger efter information om lønnen på de tre virksomheder og sammenligner lønniveauet. Hvilken virksomhed bør hun vælge og hvorfor?

RME-perspektiv

Horisontal matematisering: konteksten støtter eleverne i at kunne beskrive det karakteristiske ved observationssættene med deres eget sprog frem mod en matematisering af problemstillingen. Ord, der er brugt, er fx *ekstrem*, *rækkefølge*, *variationsbredde*, *mange stort set ens*, *mange forskellige*. Der opstår også et behov for at kunne afbilde data grafisk eller organisere data i intervaller, idet store datasæt kan være svære at overskue og analysere. Dette sprog og disse repræsentationer hjælper eleverne med at træde ind i området statistik og forbinde det med en realistisk situation.

Vertikal matematisering: den forventede variation i elevernes argumenter kan bruges i valideringsfasen og institutionaliseringen til at udvikle de formelle nøglebegreber til beskrivelse af tendenserne i et observationssæt, samt hvordan de bestemmes, og hvordan de bruges. Et skridt videre kunne være i retningen af at kigge på sammenhængen mellem udseendet af graferne og nøglebegreberne, samt hvordan man effektivt kan bruge diverse programmer i statistik.

På et metaniveau er det også vigtigt at involvere eleverne i, hvordan statistik og en opsummering af data bliver brugt i den virkelige verden til at træffe beslutninger og lave forudsigelser om diverse fænomener.

BILAG – LØNSTATISTIK

Bilaget er data til MERIA-modulet ”Jobannonce”

Firma A			Firma B			Firma C	
Medarbejder	Løn		Medarbejder	Løn		Medarbejder	Løn
1	5211		1	4731		1	2646
2	2016		2	4701		2	1686
3	3579		3	5778		3	2115
4	4794		4	5979		4	1713
5	2697		5	4617		5	1677
6	1842		6	5160		6	2940
7	2154		7	4641		7	2595
8	5166		8	4446		8	16104
9	5634		9	5586		9	2115
10	1500		10	3165		10	1839
11	4635		11	5967		11	2061
12	6459		12	4863		12	2205
13	5265		13	4998		13	17550
14	10131		14	5259		14	2343
15	4755		15	5991		15	2631
16	3981		16	5568		16	15753
17	6063		17	5310		17	2355
18	4632		18	5766		18	1809
19	14538		19	5331		19	1893
20	3975		20	5637		20	1593
21	4698		21	4650		21	2973
22	6660		22	5511		22	15909
23	2085		23	5406		23	2316
24	5133		24	5406		24	2271
25	6585		25	4935		25	17421
26	1806		26	4500		26	1872
27	3210		27	5550		27	2799
28	5094		28	5670		28	1614
29	1776		29	5172		29	2646
30	3888		30	5673		30	2979
31	4563		31	5487		31	2925
32	3780		32	5826		32	1665
33	3342		33	5538		33	29987
34	5064		34	4062		34	2871
35	5454		35	4734		35	1692
36	5118		36	5976		36	2349
37	5580		37	4911		37	2367
38	3327		38	5208		38	2238
39	5457		39	5223		39	15225
40	3003		40	4764		40	1890
41	5991		41	5943		41	1695

42	9450	42	3957	42	1773
43	10113	43	5445	43	2091
44	4953	44	5451	44	1662
45	7101	45	4611	45	1735
46	4098	46	4056	46	2757
47	6759	47	5700	47	16158
48	3867	48	4593	48	16086
49	6531	49	4638	49	1989
50	3486	50	4812	50	2052

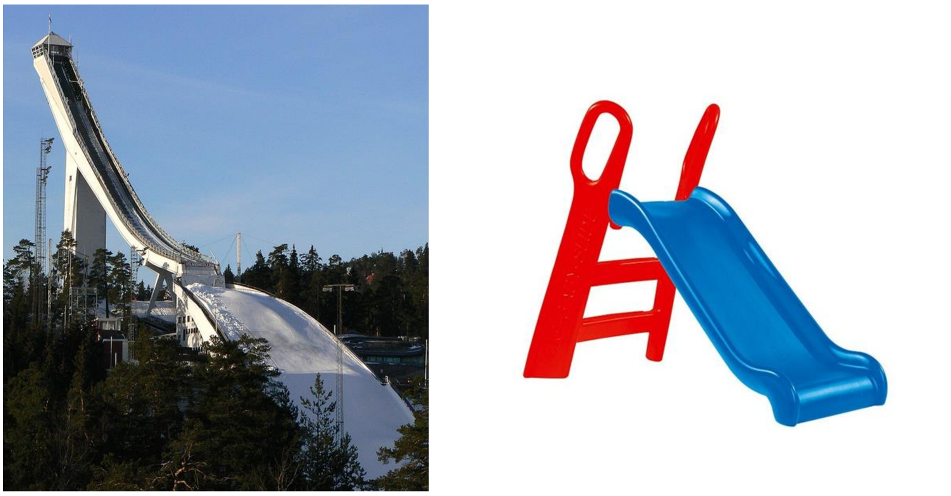
Introduktion til den afledede funktion

MERIA-modulet ”Rutsjebanen”

Scenarie:

Tilsigtede viden	At give en forståelse for konceptet for hældningen på en kurve som hældningen for en tangentlinje i et givet punkt.
Bredere kompetencemål	Matematisk modellering, bruge lineære funktioner og grafer. En meningsfuld introduktion til matematisk analyse.
Nødvendige matematiske forudsætninger	Grafer og ligninger for lineære funktioner og nogle ikke-lineære.
Tid	60-90 minutter (2 lektioner)
Niveau	Alder 16-18 år, klassetrin 1. eller 2.g (når differentialregning skal introduceres)
Materialer til rådighed	Papir og blyant, computer med grafprogrammer som fx GeoGebra, Ti-Nspire eller lignende (det er strengt taget ikke nødvendigt med computer, men kan gøre oplevelsen større).

Problemstilling:



Figur 1: Til venstre: Holmenkollen skihop i Oslo, Norge. Billedet er taget af Mathias Stang 1. februar 2007. GFDL, CC Attribution 2.5. Til højre: en rutsjebane for børn.

Betragt billederne af et skihop samt en rutsjebane. Begge har en buet del nederst og/eller ved toppen og en lige del i midten. Brug matematik til at designe en sådan form. Fokus skal være

på bare en af de buede dele og den lige del i midten. Husk, det er ikke rart at have en ujævn tur. Indfør et passende koordinatsystem og find en forskrift for den ene buede del samt den lige del af kurven. *Bemærk*: For en længere lektion med mere modelleringsaktivitet udelades denne sidste sætning fra opgavebeskrivelsen (se også under punktet *Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable)*

Fase	**Lærerens handlinger inkl. instruktioner**	**Elevers handlinger inkl. reaktioner**
Devolution (didaktisk) 5 minutter	Læreren introducerer problemstillingen. Læreren understreger, at eleverne skal designe en glat kurve, så man får en rar tur på banen. Endelig sikrer læreren sig, at eleverne har forstået, at de blot skal fokusere på den ene af enderne mht. den buede del samt den lineære del i midten.	Eleverne sidder i grupper á 2-3 personer. Eleverne bliver engagerede!
Handling (adidaktisk) 20 minutter	Læreren registrerer elevernes ideer, strategier og opdagelser. Hvis eleverne ikke indser, at de to dele skal forbindes jævnt, skal læreren tage fat i dette. Hvis der er absolut ingen ideer til en funktion, der kan forme den kurvede del efter 10 minutter, skal læreren lave en kort afbrydelse for en didaktisk sekvens, hvor eleverne skal mindes om grafernes udseende for funktionerne $f(x) = x^2$ og/eller $f(x) = \cos(x)$.	Eleverne laver en skitse og indfører et passende koordinatsystem. Elevernes tilgang kan normalt falde inden for en af følgende kategorier: 1. "*Grænselinje*" De tegner frit en linje og flytter den (forskydning og rotation), indtil det ser ud som om, der kun er ét skæringspunkt i fokusområdet. 2. "*Sekantlinje*" De vælger et punkt på kurven, som skal være det tilsigtede røringspunkt for tangenten.

	Hvis eleverne kommer med *cirkelløsningen* (se beskrivelsen i kolonnen til højre), så er et opfølgende spørgsmål: "Hvad sker der, hvis du ændrer vinklen eller punktet, hvor cirklen og linjen mødes? Hvordan vil linjens ligning så ændre sig?" Efter dette skal læreren bede eleverne fokusere på løsninger, hvor cirklen ikke anvendes som en del af kurven.	Derpå vælges et andet punkt på kurven, og der tegnes en ret linje gennem de to punkter. Det andet punkt rykkes nærmere det første for at opnå en mere glat kurve. 3. "*Lineær approksimation*" Eleverne vælger et punkt på kurven, tegner en linje og prøver herpå at justere hældningen, så den bedst passer til kurven. Nogle vil måske vælge en cirkel som kurve samt det faktum, at en tangent står vinkelret på radius. Vi kalder denne løsning for *cirkelløsningen*. I afsnittet *Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden* kan du se mere udførlige detaljer omkring disse tilgange.
Formulering (adidaktisk) 15 minutter	Læreren beder eleverne formulere deres resultater. Mens eleverne arbejder med deres præsentation, udvælger læreren grupper med forskellige tilgange til løsningen og rækkefølgen til præsentationerne.	Eleverne formulerer deres resultater i gruppen. I nogle grupper præsenterer en elev deres bud på en kurve.
Validering (didaktisk) 10 minutter	Læreren stiller spørgsmålene: "Hvordan ved vi, at vi har en god løsning?" Og "Er der en bedste løsning?" Hvis eleverne kun har brugt visuel validering, kan læreren foreslå en	Eleverne forklarer, hvorfor nogle løsninger er gode, og hvorfor nogle løsninger er bedre end andre. • *Visuel validering*: nogle grupper vil stole på deres visuelle evaluering af designet. Hvis det ser godt ud, så er det fordi, det er godt. De vil måske

	algebraisk eller en numerisk løsning til validering.	endda styrke argumentet ved at zoome ind og bekræfte deres tese. • *Algebraisk validering*: eleverne kan beregne skæringspunktet mellem den retlinede del og den "bløde" del algebraisk og måske se, at det lokalt er entydigt. • *Numerisk validering*: eleverne kan beregne $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ for to punkter på kurven og undersøge, om det tilnærmet svarer til hældningen for deres linje. Hvis eleverne har arbejdet med *cirkelløsningen* og beregnet tangentens ligning, så skal de tjekke, at de har en tangent og forklare hvorfor (geometrisk og/eller et algebraisk bevis).
Institutionalisering (didaktisk) 10 minutter	Læreren drøfter begrebet tangentlinje således, at det følger op på det, eleverne kom frem til. Læreren kan fremhæve et *eller flere* af følgende betragtninger på hældningen for en kurve i et punkt: a) Den bedste approksimation lokalt følger en visuel validering. b) En lokal entydig grænselinje og et skæringspunkt følger en algebraisk validering. c) Klassisk definition ved brug af sekanter og grænseværdien for differenskvotienten følger en numerisk validering.	Nogle elever vil måske sige noget om hældningen. Nogle vil måske bruge ordet "tangent" eller bruge værktøjet i deres CAS-værktøj. Eleverne lytter og bliver interesseret i at kunne beregne den bedste løsning på problemstillingen for vilkårlige former og kurver.

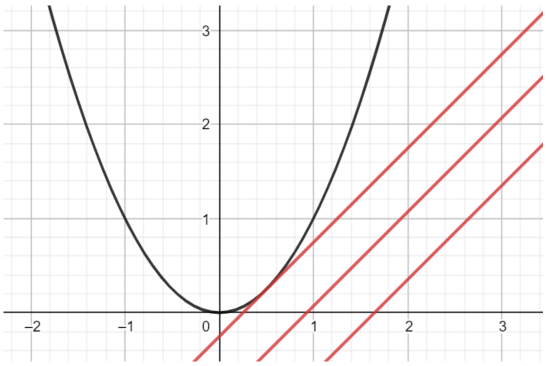
	Hvis der er dukket en *cirkelløsning* op, så drøftes tangenten for en cirkel og tangenten for andre kurver. Læreren minder om, at den bedste løsning for cirklen er tangenten, og at eleverne faktisk har tilnærmet tangenten til de andre kurver.	

Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden

Der er forskellige muligheder for, hvad eleverne gør. For eksempel:

1. *Grænselinje*-tilgangen:

Eleverne vælger for eksempel $y = x^2$



En algebraisk validering: Herfra betragtes familien af linjer på formen

$\mathrm{y} = \mathrm{x} + \mathrm{b}.$

Grænselinjen findes ved at løse ligningen dvs. her en 2. gradsligning:

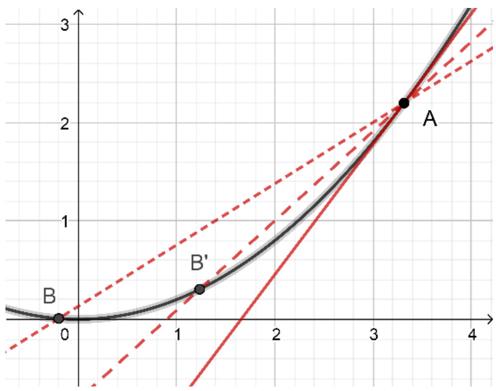
$\mathrm{x}^2 = \mathrm{x} + \mathrm{b}.$

Denne ligning har en entydig løsning, hvis diskriminanten er nul:

$1 + 4\mathrm{b} = 0.$

Dette giver en glat bane for $\mathrm{b} = -\frac{1}{4}$.

2. “*Sekantlinje*”-tilgangen: Eleverne vælger et ”fixpunkt” A på kurven, hvor tangenten skal placeres. Herpå vælger de et andet punkt B på kurven og tegner en ret linje gennem de to punkter. Herpå lader de punktet B nærme sig A for at få en mere glat overgang. Jo tættere punktet B ligger på A, jo bedre bliver approksimationen.

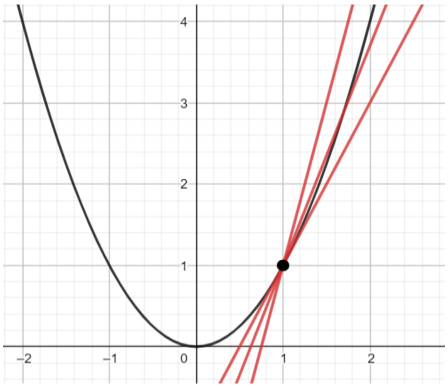


Denne tilgang fungerer bedst på computer.

3. "Lineær approksimation"-tilgangen:

For eksempel kunne eleverne vælge at arbejde med $y = x^2$ og punktet (1,1), hvor kurven ender og linjen med ligningen $\mathrm{y = ax + b}$ begynder.

De gætter måske på $a > 1$, og afprøver forskellige værdier for a (hvor $a = 2$ er den korrekte værdi).



At prøve betyder her at afprøve ved at tegne på papir eller lave grafer på computeren.

Ved at beskrive linjen ud fra ligningen $y = ax + b$, kan de udlede, at $a + b = 1$. Så for hver hældning a kan de beregne b.

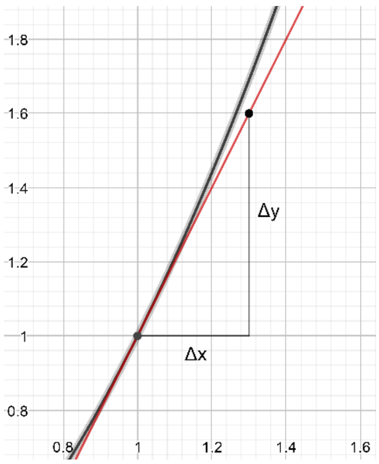
Nogle vil måske lave en tilnærmet værdi for a ved at bruge to punkter på den tegnede linje samt formlen $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

Numerisk eksempel: eleverne når måske frem til

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.6}{0.3} = 2.$$

Fra $a + b = 1$ følger $b = -1$.

Validering gøres formodentlig visuelt, men kan gøres numerisk, og her formodentlig på opfordring fra læreren, fordi metoden er meget tilsvarende.



Vælg to punkter på parablen og beregn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; for eksempel punkterne (1,1) og (1.1 , 1.21). Herfra fås $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$. Rimelig tæt på!

Eleverne kan også validere ved at bestemme skæringspunktet mellem linjen og parablen (algebraisk validering). Hvis eleverne er fortrolige med 2. gradsligninger og diskriminanten, kan de fortsætte ved at løse følgende ligningssystem:

$y = x^2$ og $y = ax + 1 - a$,

og nå frem til

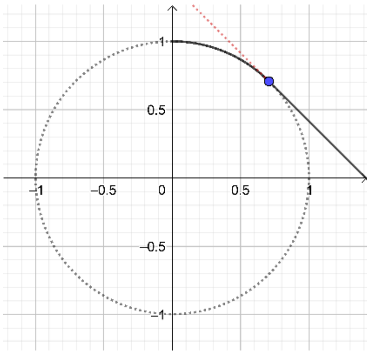
$x^2 - ax + a - 1 = 0.$

Ligningen vil have præcis én løsning, hvis diskriminanten er nul:

$a^2 - 4(a - 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$

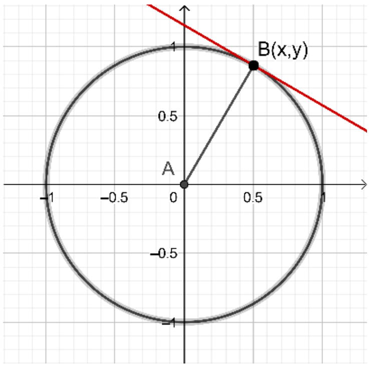
4. Cirkelløsningen:

Eleverne vælger en cirkel.



Hvis eleverne har valgt en cirkel, vælger de måske

$x^2 + y^2 = 1$ og punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, som svarer til vinklen $\frac{\pi}{4}$ i radianer. Hvis de ved, at radius i cirklen står vinkelret på tangenten, så kan de bestemme tangentens hældning til at være $a = -1$, og herfra bestemme tangentens ligning.



Hvis læreren beder dem om at vælge et andet punkt (x, y), så kunne hældningen a for tangentlinjen bestemmes ud fra hældningen på radius-linjen gennem punktet (x, y), som vil være $\frac{y}{x}$.

Derfor vil tangenthældningen være $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (generelt). Eleverne vil nok ikke arbejde på det generelle plan, men gøre det for konkrete punkter.

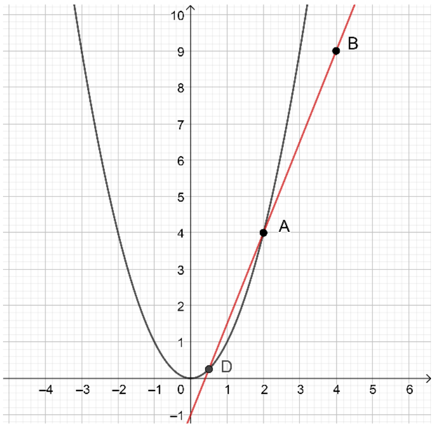
Hvis eleverne kender til vektorer, vil disse betragtninger blive noget simplere.

5. Med computer (GeoGebra eller lignende):

Hvis eleverne bruger GeoGebra eller lignende, vil de kunne benytte lignende skridt og ræsonnementer, såvel som undlade. Forskellen er, at matematikprogrammerne beregner ligningerne for linjen hurtigere og tegner en præcis repræsentation af den valgte kurve. Med computeren kan eleverne afprøve flere forskellige muligheder på mindre tid og kan derfor bemærke detaljer, som ikke ville være muligt med papir og blyant. For eksempel:

- Nogle vil måske kende til eller finde værktøjet, der kan tegne tangentlinjer.
- De ville måske få tegnet en vilkårlig ”god” linje gennem et punkt A på kurven og et andet punkt B. Derpå kan der zoomes ind for at tjekke, om det ser fint ud. De kan flytte punktet B for at opnå en bedre overgang. Ved at eksperimentere kan de nå frem til, hvad de finder, er det bedste punkt og herfra aflæse linjens ligning vha. værktøjer i matematikprogrammet.
- Nogle elever vil måske begynde at zoome ind på et punkt indtil grafen for kurven ser ud til at være en ret linje. De kan nu vælge to punkter på kurven og beregne ligningen for den rette linje igennem punkterne (eller tegne hvad der så ville være en approksimation til en tangentlinje og aflæse ligningen vha. programværktøjer).

- Eleverne vil prøve at undersøge, om deres linje har skæringspunkter med kurven (her får det betydning, om de har tegnet en halvlinje eller en linje). Nogle vil måske endda lade programmet bestemme og aflæse skæringspunktet mellem kurven og linjen.



De kunne bemærke, at når de ændrer linjens hældning ud fra et fast punkt på kurven, så ændrer de også andre skæringspunkter med kurven. Fordi de straks ser resultatet, kunne de komme til den hypotese, at den bedste løsning er, når punkterne A og D falder sammen.

Forklaringer til materialerne

Ideen med at designe en genkendelig form skulle gerne gøre eleverne interesserede i problemstillingen i devolutionsfasen og introducere en virkelighedsnær kontekst, hvor en glat kurve ud fra en intuitiv forståelse er vigtig. Hvis nogle elever ikke finder det besnærende med former som skihop eller rutsjebaner for børn, så kan man som lærer fortælle, at de samme principper gør sig gældende, når man fx konstruerer togskinner eller rutsjebaner i forlystelsesparker (fokus er at forbinde en buet del med noget retlinet). Dette kan dermed også vise eleverne, at problemstillingen er realistisk.

Bortset fra måske en computer, så kræver dette scenarie ikke særlige materialer.

Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable

Nogle af de ændringer, der kan laves i dette scenarie uden at ændre på målene, er:

Det didaktiske miljø: billederne kan vælges anderledes, men som udgangspunkt skal de tydeligt indeholde en buet og en retlinet del. Det foretrækkes, at objektet, der skal designes, består af en buet og en retlinet del og skal være så genkendeligt for eleverne som muligt.

I nogle tilfælde vil elever allerede efter få minutter i den første handlingsfase sidde fast eller ikke lave et arbejde, der involverer matematiske metoder. Som lærer kan man forstyrre arbejdet ved fx at tilføje et lille "mellemspil" i handlingsfasen for at diskutere elevernes første resultater og udfordringer med fokus på, hvad en smidig pasform kan betyde.

Hvis læreren vælger at udelade frasen " *Indfør et passende koordinatsystem og find en forskrift for den ene buede del samt den lige del af kurven*" fra problemstillingen, så kan et mellemspil tilføjes for at drøfte nødvendigheden af at indføre et koordinatsystem for at kunne matematisere problemstillingen. Ved udgangen af dette mellemspil bør eleverne have forstået, at de har behov for at arbejde i et koordinatsystem og med konkrete funktioner og deres forskrifter for den buede og retlinede del. Inden arbejdet fortsætter, tjekker læreren, hvorvidt eleverne har en ide om, hvad en god og en mindre god tilpasning med en linje betyder geometrisk (løsningerne kræver ikke bare en kontinuert men også en glat kurve). Efter mellemspillet fortsætter eleverne med handlingsfasen, som beskrevet i scenariet.

Hvilken platform eleverne arbejder på, bør være valgfrit dvs. om det er på en tablet, telefonen eller computeren, og hvilket program de anvender bør heller ikke være så altafgørende. Man kan nævne mulighederne og så lade det være op til den enkelte elev.

Længden af faserne kan tilpasses elevernes arbejde, men bør ikke ændres radikalt.

I *handlingsfasen* bør eleverne overlades til selv at finde en forskrift for den buede del. Kun hvis nogle grupper eller hele klassen ikke har nogen ide om, hvordan de kommer videre efter 10 minutter, kan læreren minde om nogle forskellige muligheder som fx $\cos x$, $\frac{1}{x}$ eller x^2 (men ikke nævne cirklen). Når eleverne har valgt en funktion til den buede del, kan handlingsfasen fortsætte.

Hvis kun nogle få elever står med en *cirkelløsning*, så kan læreren stille nogle opfølgende spørgsmål som forklaret i scenariet bare til de elever, der har arbejdet med denne tilgang for at undgå at afbryde tankerækken hos andre elever. Hvis ingen elever kommer med *cirkelløsningen*, så kan den nævnes under valideringsfasen eller institutionaliseringsfasen, men ikke før.

Observationer fra klasserummet

Nogle generelle observationer:

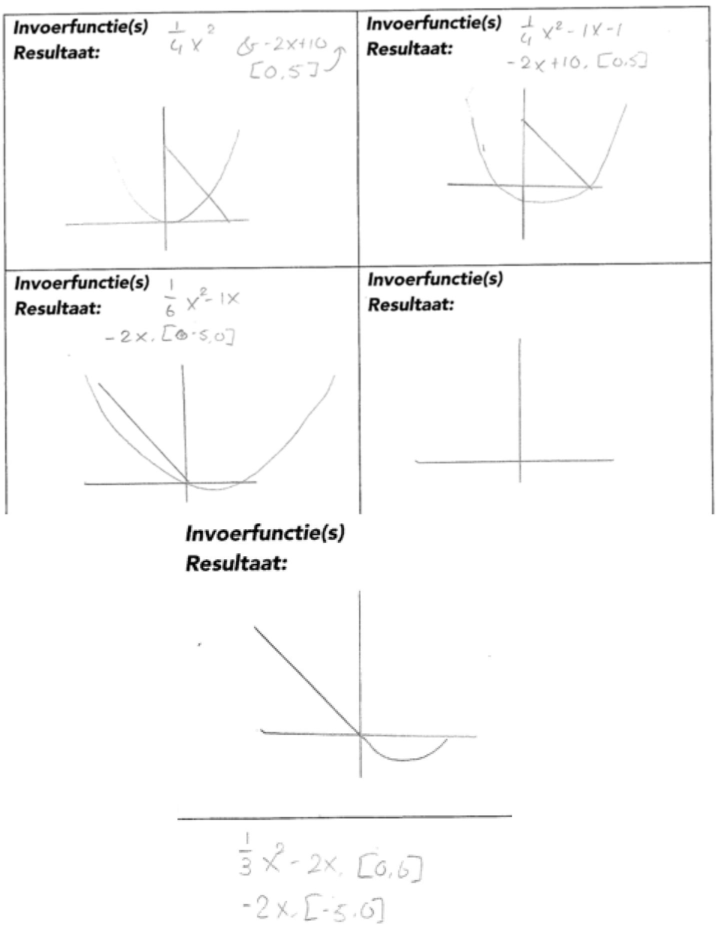
- Generelt er der taget godt imod dette scenarie af lærere og elever.
- Til tider var eleverne så fokuseret på formen af den buede del af kurven, så de skulle mindes om, at designet også havde en retlinet del, som skulle inkluderes og få sat de to dele sammen til en glat kurve.
- Nogle elever bekymrede sig om nogle praktiske forhold omkring banen, som ikke vedrørte banens glatte form, så læreren bør virkelig sikre, at eleverne har en ide om, hvad en god og en dårlig linje vil være geometrisk.
- Nogle lærere og elever brugte computer fx GeoGebra. De grupper, der brugte computer, udforskede flere ideer. Nogle elever begyndte på papir og tjekkede med computeren bagefter. Nogle gjorde det omvendt.
- I testforløbene af scenariet havde nogle elever allerede lært om den afledede funktion, og de fleste af dem indså, at de skulle bruge tangenten til løsningen.
- Nogle elever havde en diskussion om, hvad de skulle variere: parablen, linjens hældningskoefficient eller linjens skæringspunkt.
- Nogle indså ikke, at de kunne introducere en parameter fx a eller b i udtrykket

  $y = ax + b$, eller a,b eller c i udtrykket $y = ax^2 + bx + c$, eller endda en parameter for Δx.

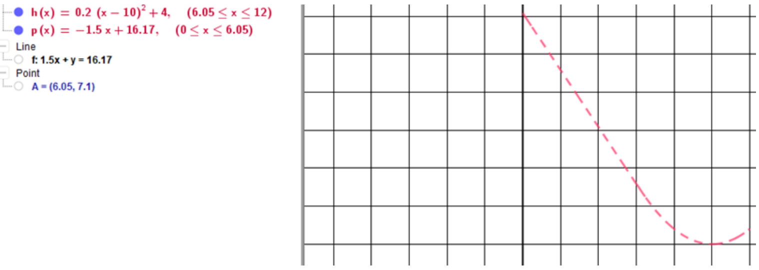
Elevernes forskellige tilgange til at designe hænger sammen med deres forskellige forståelser for, hvad en tangentlinje er.

1. "*Grænselinje*"-tilgangen: De tegner frit en linje og flytter den (forskydning og rotation), indtil det ser ud som om, der kun er ét skæringspunkt i fokusområdet.
2. "*Sekantlinje*"-tilgangen: De vælger et punkt på kurven, som skal være det tilsigtede røringspunkt for tangenten. Derpå vælges et andet punkt på kurven, og der tegnes en ret linje gennem de to punkter. Det andet punkt rykkes nærmere det første for at opnå en mere glat kurve.
3. "*Lineær approksimation*": Eleverne vælger et punkt på kurven, tegner en linje og prøver herpå at justere hældningen, så den bedst passer til kurven.

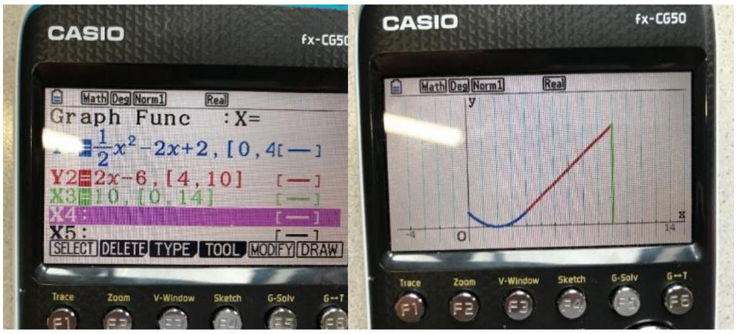
Nogle bruger en cirkel som kurve og det faktum, at radiuslinjen står vinkelret på tangenten. Denne tilgang er benævnt *cirkelløsningen* i det foregående.



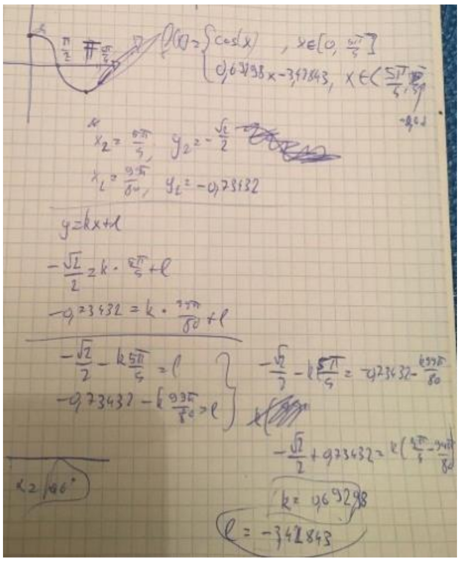
Eleverne varierer parametrene for parablen og linjen.
De når frem til en god løsning. Det ser ud til, at de fokuserer på skæringspunktet og evaluerer visuelt.



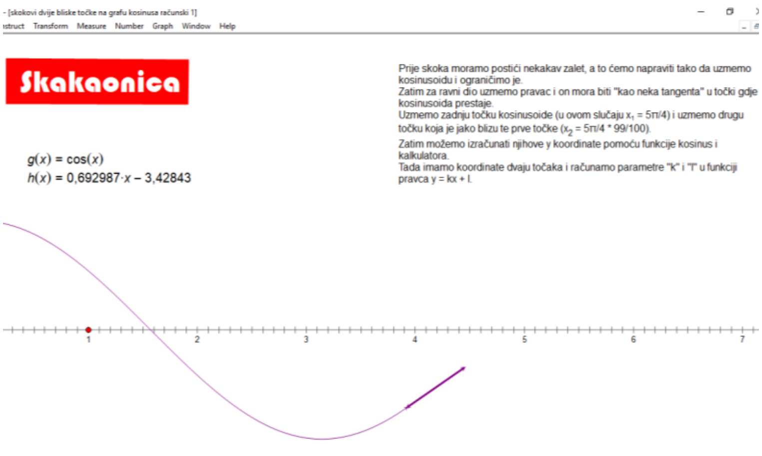
Denne gruppe varierer b i ligningen $y = ax + b$ og finder en tilnærmet løsning.



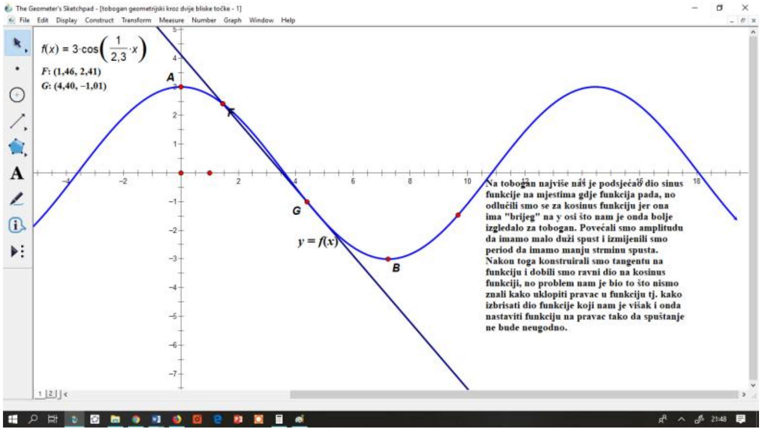
Her vises en løsning på en graflommeregner.

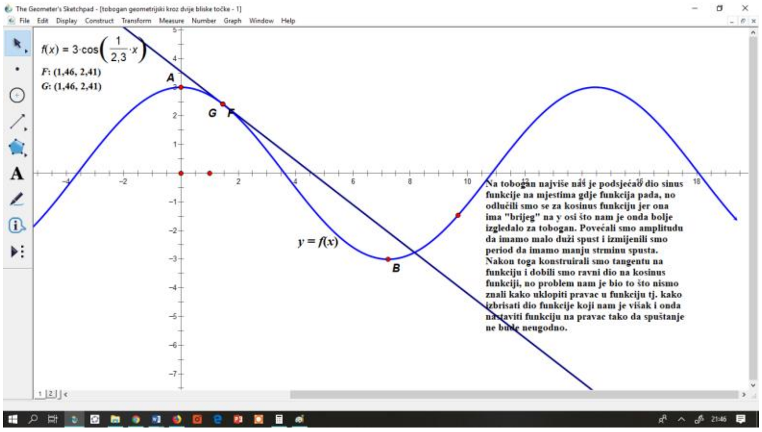


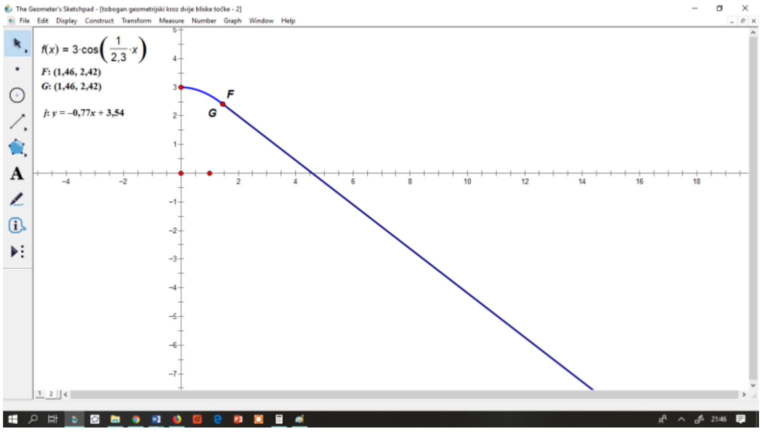
Denne gruppe brugte sekantlinjer (Se (2) ovenfor): De laver en linje gennem to nærliggende punkter på den buede del af kurven som en approksimation for den retlinede del. De bruger numeriske metoder til at bestemme en ligning for linjen. De skriver, at de vælger et punkt, hvor cosinus ender ($x = 5\pi/4$) og dernæst vælger et punkt en lille smule ved siden af ($x = \frac{99}{100} \cdot 5\pi/4$).

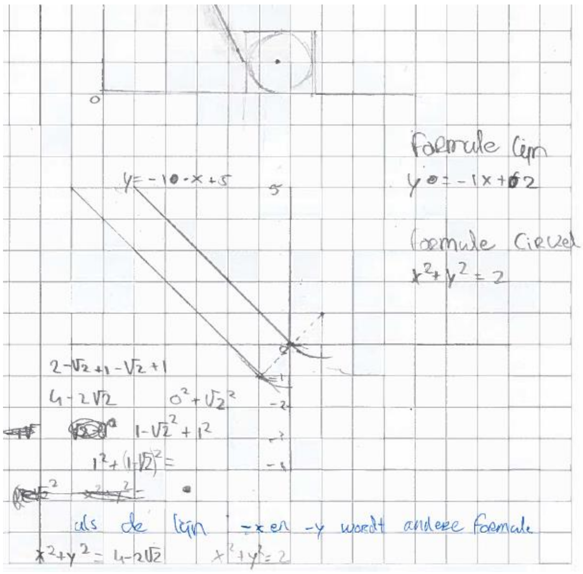


Gruppen her har også brugt sekantlinjer og aflæste ligningen på skærmen.

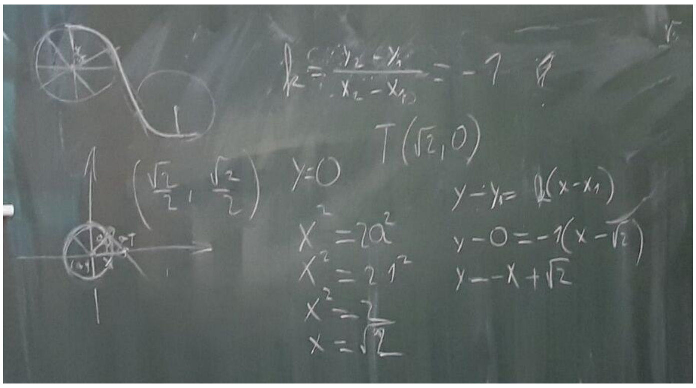




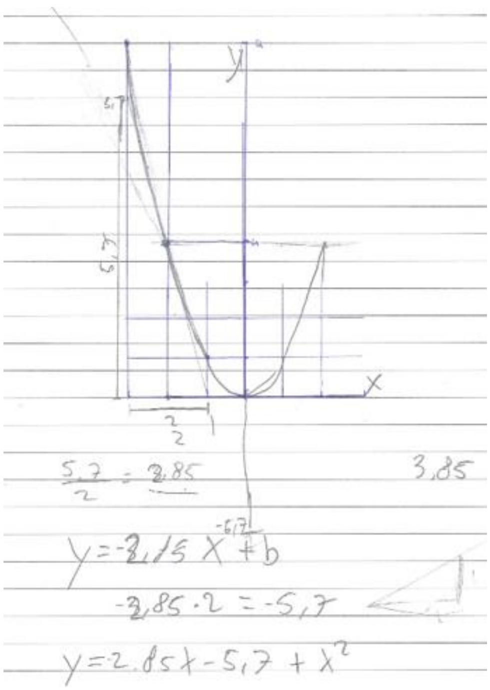




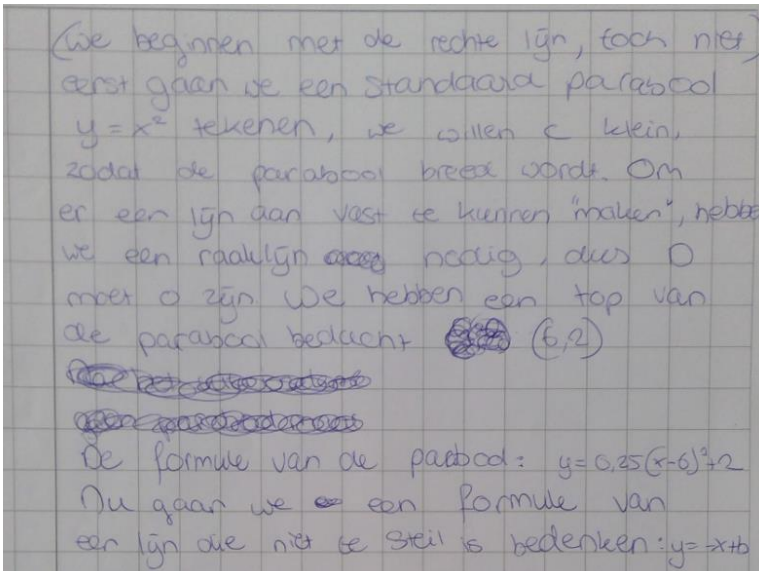
Eleverne i denne gruppe lavede cirkelløsningen.
De vidste, at tangenten står vinkelret på radius (så valideringen er geometrisk: de bruger en sætning fra plangeometrien).
Men de havde problemer med at få cirklen og linjen til at mødes ved en flytning af linjen.



Også her var der en *cirkelløsning*. De kendte punktet $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ på enhedscirklen og konstruerede en linje med hældningen -1 gennem punktet.



Denne gruppe tegnede grafen for parablen
$y = x^2$. Derpå prøvede de at få en tangent passet til i et punkt på en måde, som minder om tilgangen "Lineær approksimation". De bestemte hældningen for linjen ved at måle Δx og Δy og udregnede kvotienten. Valideringen er visuel.



(we beginnen met de rechte lijn, toch niet)
eerst gaan we een standaard parabool
y = x² tekenen, we willen c klein,
zodat de parabool breed wordt. Om
er een lijn aan vast te kunnen "maken", hebbe
we een raaklijn nodig, dus D
moet 0 zijn. We hebben een top van
de parabool bedacht (6,2)
De formule van de parabool: y=0,25(x-6)²+2
Nu gaan we een formule van
een lijn die niet te steil is bedenken: y=-x+b

En gruppe elever brugte diskriminanten til at beslutte, hvorvidt der var et skæringspunkt mellem deres kandidat til tangentlinje og parablen.
De valgte en konkret parabel med ligningen
$y = 0{,}25\,(x-6)^2 + 2$ og toppunktet $(6{,}2)$. Herfra prøvede de at bestemme parameteren b i linjen
$y = -x + b$ ved at bruge diskriminanten.

Evalueringsværktøjer

For en hurtig test, af hvilken viden eleverne har opnået, kan læreren stille følgende spørgsmål:

1. Læreren tegner en vilkårlig kurve og en linje, som tydeligvis ikke er en tangent. Der spørges hvorvidt eleverne tænker denne form er passende for en togskinne. Eleverne skal forklare hvorfor ikke.
2. Konstruer en ligning for tangenten til enhedscirklen i punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Find en tilnærmet hældning for parablen $y = x^2$ i punktet $(2{,}4)$.

Forslag til yderligere problemstillinger vedrørende den afledede funktion

1. Begrebet *grænselinje* og forskellen på denne og en tangent.
2. Euklids tangentbegreb: en linje således at ingen anden ret linje kunne klemmes ind mellem linjen og kurven.

Efter at have lært om grænseværdien for en differenskvotient som værende den afledede funktion kunne eleverne beregne formlen for den afledede funktion for $f(x) = x^2$ som værende $f'(x) = 2x$. Klassen kan drøfte hvad dette betyder for tangentlinjerne hørende til denne funktion.

Begrundelser for og RME-perspektiver på scenariet

Relevans og anvendelighed

Virkeligheden: problemstillingen er relateret til en hverdagserfaring hos eleverne. Objekterne, de skal designe, er velkendte for dem, og de ved hvad forskellene i formerne vil resultere i. Opgaven udnytter deres forudgående viden om, hvad det betyder for noget at være glat nemlig deres legemlige erfaring med at glide ned af en rutsjebane.

Arbejdslivet: eleverne lærer at designe og matematisere former de ser i den virkelige verden. De lærer at forbinde objektet de ser med en matematisk repræsentation. De simplificerer formen fra et 3-dimensionelt objekt til en kurve i 2 dimensioner. Disse færdigheder er vigtige inden for design (for eksempel inden for arkitektur) og modellering i en professionel kontekst.

Videregående studier: scenariet er en introduktion til afledede funktioner og matematisk analyse.

Undersøgelsesfærdigheder

I dette scenarie lærer eleverne at simplificere en problemstilling og anvende matematik til at beskrive den del, der er fokus på. De laver hypoteser og tester dem samt genererer eksempler og sammenligner forskellige løsningsforslag. Endelig beslutter de hvilke løsninger, der er bedst, og herunder argumenterer for den bedste løsning og kommunikerer dette til andre. Endelig kan de ekstrapolere og generalisere deres resultater.

Potentiale til et forløb

Scenariet kan indgå i et længere forløb om afledede funktioner. De matematiske forudsætninger for eleverne er at kunne afbilde funktioner, de lineære funktioner og rette linjer og eksempler på ikke-lineære funktioner.

Længere fremme i forløbet kan problemstillingen med den glatte kurve behandles med mere formelle metoder som fx grænseværdier og afledede funktioner.

Hvis der indføres implicit differentiation, kan forbindelsen til *cirkelløsningen* etableres. Anvend implicit differentiation på *cirkelløsningen* og sammenlign det med den intuitive geometriske løsning for scenariet og resultatet opnået ved *direkte* differentiation. På denne måde bliver viden valideret ved at sammenligne forskellige resultater produceret af eleverne.

RME-perspektiv

Horisontal matematisering: problemstillingen indgår i en rig kontekst dvs. er genkendelig fra elevens hverdag. Alle ved hvad der menes med en blød kurve. Eleverne inviteres til at bruge et matematisk sprog for at modellere situationen: koordinatsystem, fortolke 3-dimensionelle former for banen til en 2-dimensionel kurve samt at repræsentere kurven med ligninger.

vertikal matematisering: I nogle tilfælde vil eleverne udvikle deres ideer ved at introducere parametre og drøfte, hvad de vil parametrisere. Nogle anvender andre matematiske metoder:

algebra (diskriminanten) eller differenskvotienter (hældningskoefficienten for en ret linje). Herfra er der et stort potentiale for videre matematisering. Hvis eleverne har brugt sekantlinjemetoden, så er der en naturlig overgang til introduktionen af hældningen for en kurve som grænseværdien for en differenskvotient. Hvis de bruger algebraiske metoder og er fokuseret på beregning af skæringspunkter, så giver det anledning til at drøfte, hvorfor der skulle være et skæringspunkt (lokalt), og måske betragte multipliciteten af skæringspunktet som et første skridt til beregning af hældningen for en kurve. Hvis eleverne brugte ”zoom” som valideringsmetode, så er der en naturlig forbindelse til en lokal approksimation til hældningen for en kurve.

Når man giver mulighed for, at eleverne arbejder mere uformelt, kan løsningerne være meget forskellige. Læreren er her nødt til at finde broer fra en tilgang til en anden som et middel til at bevæge sig mod en fælles institutionalisering. Institutionaliseringen bør bygges på de ideer, som eleverne har fået frem. For eksempel har nogle elever eksperimenteret med problemstillingen i GeoGebra:

De har varieret punktet B. Læreren bemærker, at dette svarer til at variere skæringspunktet D. Dette kan være en bro mod en diskussion om differenskvotienter og grænseværdier (på en uformel måde), og måske nå frem til en definition på differentialkvotienten baseret på dette.