

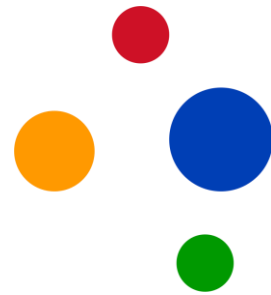
Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable



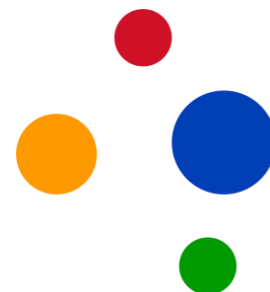
Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

PREDLOGA MERIA ZA SCENARIJE IN MODULE





(ta stran je namenoma prazna)



PREDLOGA MERIA ZA SCENARIJE IN MODULE

GLAVNI UREDNIK

Carl Winsløw

AVTORJA BESEDILA

Britta Jessen, Carl Winsløw

PREGLEDI, UREJANJE IN LEKTORIRANJE ANGLEŠKE RAZLIČICE

Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

DIZAJN

Irina Rinkovec

PREVOD V SLOVENŠČINO

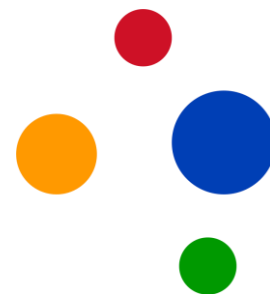
Kristijan Cafuta, Mojca Suban

Projekt MERIA, februar 2018.

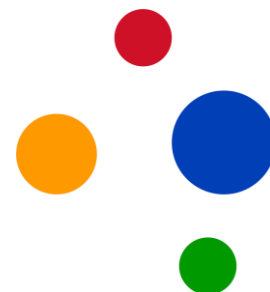
www.meria-project.eu

Ta dokument je zaščiten z licenco za prosto uporabo avtorskih del.

Vsebina dokumenta odraža zgolj mnenja avtorjev. Evropska komisija ne odgovarja za kakršno koli uporabo informacij, ki jih vsebuje ta dokument.

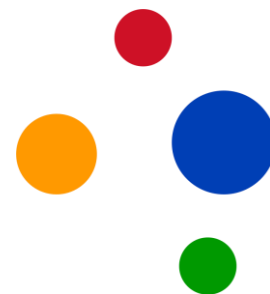


(ta stran je namenoma prazna)



Kazalo

Uvod	2
1. Predloga za MERIA scenarij	3
2. Predloga za MERIA modul	4
Učni scenarij.....	4
Pojasnilo glede materialov za dijake	4
Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk.....	4
Opažanja iz prakse.....	4
Orodja za evalvacijo	4
Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME	4
3. MERIA scenarij in modul: Povečanje ploščine	5
Učni scenarij.....	5
Pojasnilo glede materialov za dijake	10
Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk.....	10
Opažanja iz prakse.....	12
Orodja za evalvacijo	13
Predlogi za nadaljnje preiskovanje ploščine in raztega	13
Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME	14



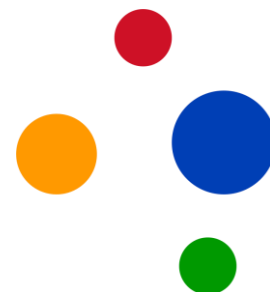
Uvod

Eden glavnih rezultatov projekta MERIA bo niz novih predstavitvenih učnih scenarijev in modulov, ki bodo temeljili na teoretični podlagi, predstavljeni v publikaciji *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*.

Scenarij opisuje didaktično situacijo in pripadajoče metode poučevanja. Opisuje cilje učne ure glede na področje učnega načrta, specifične standarde znanja (pričakovane dosežke) in kompetence, ter zagotavlja jasno strukturo učne ure v skladu s Teorijo didaktičnih situacij (TDS).

Modul zraven učnega scenarija vsebuje tudi spremljajoča pisna in elektronska gradiva, kot na primer naloge za dijake ali elektronske delovne liste. Vsebuje tudi jasno utemeljitev izbire problema (oziroma problemov) in metod poučevanja iz vidika Učenja matematike v realnem kontekstu (RME). Poleg tega modul vsebuje tudi izkušnje in dosežke, ki so bili zbrani ob izvajanju scenarija, vključno s potencialnimi prednostmi in pomanjkljivostmi za dijake s specifičnim predznanjem.

Ta knjižica vsebuje predlogi, ki opisujeta strukturo scenarija in modula, ter en primer scenarija in modula, imenovan *Povečanje ploščine*. Ta vzorčni scenarij je bil preizkušen v pridruženih šolah v vseh štirih partnerskih državah (informacije o šolah so na voljo na spletni strani projekta). Informacije v modulu temeljijo na podatkih in povratnih informacijah, ki jih je projektna skupina zbrala pri teh izvedbah vzorčnega scenarija.



1. Predloga za MERIA scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Natančna matematična formulacija cilja učne ure.		
Splošni cilji	Širši dosežki kot so na primer kompetence, možne uporabe utemeljevanje itd.		
Potrebno matematično predznanje	Natančna formulacija matematičnih znanj, veščin in kompetenc, ki bi jih dijaki naj imeli (preden se bodo ukvarjali s to situacijo).		
Letnik	Starost dijakov oziroma letnik.		
Trajanje	Predvideno trajanje in/ali število učnih ur.		
Potrebni material	Vse vrste potrebnih pripomočkov.		
Problem: Natančna formulacija glavnega problema, ki ga učitelj »prenese« na dijake (po možnosti po kakšni pripravljalni dejavnosti).			
Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov	Opažanja med izvedbo
Devolucija (Prenos) (didaktična) Ocenjeno trajanje			
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) Ocenjeno trajanje			
Formulacija (Zapis ugotovitev) (didaktična/adidaktična) Ocenjeno trajanje			
Verifikacija (Potrditev) (didaktična/adidaktična) Ocenjeno trajanje			
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) Ocenjeno trajanje			
Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	- Bodite matematično eksplicitni glede strategij, ki jih dijaki lahko izberejo. Ne pozabite poudariti, kdaj se lahko strategija razdeli na scenarij z uporabo IKT ali brez IKT (z uporabo samo pisala in papirja), kakor tudi če strategija zahteva, da se pogleda kakšen poseben primer.		

Opomba: fazi devolucije in institucionalizacije se lahko ponovita, vendar se ne smeta ponavljati prepogosto v eni situaciji.



2. Predloga za MERIA modul

Učni scenarij

Kratek opis scenarija napisan v obliki tabele. Ne pozabite, da skupaj s cilji scenarija (standardi znanja) navedete trajanje scenarija, navodila in možne različne strategije dijakov. Stolpec za opažanja med izvedbo v modulu izpustimo.

Pojasnilo glede materialov za dijake

V tem razdelku je treba navesti kratko razlago o uporabi dodatnih materialov s predstavitevijo vseh možnih materialov ali virov (izročki, (elektronski) delovni listi, kocke, in ostali artefakti) ter predlaganjem, kako jih uporabiti v določeni fazi. Nekateri materiali so lahko namenjeni samo učiteljem.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

V tem razdelku so opisane možne variacije skupaj s priporočili glede tega, kaj se sme spremeniti in kaj ne bi smeli spremeniti. Variacije lahko temeljijo na spremembi didaktičnega okolja - miljeja (sprememba uporabe IKT, dodajanje ali odstranjevanje matematičnih predmetov ali artefaktov), didaktično trajanje (določena faza je lahko krajša oz. daljša) ali organizacija razrednega dela posamično, v parih oziroma v skupinah. Nadalje je treba razpravljati o vplivu in posledicah variacij glede na kontekst, v katerem naj bi se realizirale, in črpati iz izkušenj ob testiranju scenarija.

Opazanja iz prakse

Tukaj so opisana glavna opažanja in refleksije opazovanja izvedb scenarija. To pomeni opis manj uspešnih strategij in predlogi o tem, kdaj in kako posredovati, ter opis strategij z različno stopnjo uspešnosti. Kolikor se da, naj bo podprto s podatki (fotografije dijakovih izdelkov, nalog itd.).

Orodja za evalvacijo


Navedeni so pripomočki za evalvacijo v obliki naloge (ali več preprostih nalog) tik po izvedbi scenarija, ki naj bi jih dijaki znali rešiti, če so dosegli učni cilj scenarija. Prav tako so lahko navedeni predlogi za nadaljnje preiskovanje na področju pričakovanih dosežkov scenarija. Možne strategije, navedene v scenariju, se lahko med izvajanjem scenarija uporabijo kot »orodje za preverjanje«. Če učitelj ustvari list s seznamom strategij, lahko beleži, katere skupine sledijo kateri strategiji, in če je kakšna od pomembnih strategij izpuščena. Seznam se lahko obravnava med izvajanjem scenarija, kakor tudi uporabi po učni uri za refleksijo.

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Izdelana predstavitev, kako je mogoče s scenarijem doseči standarde znanja. Nadalje je mogoče obravnavati elemente RME, kot so: izbira matematičnih standardov znanja (pričakovanih dosežkov), pomembnost in uporabnost, preiskovalne veščine in možnosti za sklop zaporednih učnih ur (zagotavljanje zgodbe za celotno poglavje ali predstavitev "širše slike").

3. MERIA scenarij in modul: Povečanje ploščine

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Če stranice večkotnika povečamo z določenim faktorjem k , se njegova ploščina poveča s faktorjem k^2 .
Splošni cilji	Samostojno algebrsko in geometrijsko razmišljanje, formuliranje splošnih trditev in dokazov na podlagi formul za obsege in ploščine različnih likov, po možnosti vključno s sinusno funkcijo in z upoštevanjem aditivnosti ploščine, če večkotnik razdelimo na več delov. Pojem podobnih večkotnikov.  Če so dijaki vajeni dela z <i>Predstavitev dijaka, Hrvaška</i> informacijsko-komunikacijsko tehnologijo: postavljanje hipotez v grafičnem okolju in njihova uporaba kot izhodišče za dokaz. <i>Več o pomembnosti, perspektivi in nadaljnjem razvoju tega scenarija na straneh 14–15.</i>
Potrebno matematično predznanje	Dijaki morajo imeti določeno predznanje iz računanja ploščine večkotnikov, npr. trikotnikov in štirikotnikov. Poznati morajo še: Podobnost, uporaba koeficienta podobnosti pri večanju večkotnika.
Letnik	Dijaki, stari od 15 do 16 let
Trajanje	90 minut, dve učni uri
Potrebni material	Kemični svinčnik ali nalivno pero, milimetrski papir, ravnilo, žepno računalno, informacijsko-komunikacijska tehnologija kot npr. GeoGebra. Morda tudi mobilni telefon (za delo s slikami). Uporaba tehnologije ni nujna, lahko pa izboljša izkušnjo dijakov.

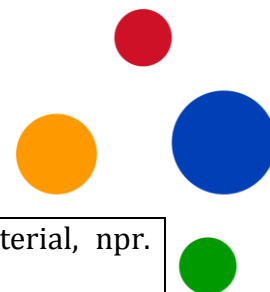


Problem:

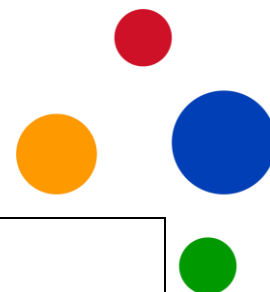
Oglejte si obe sliki. Če ju odprete na svojem pametnem telefonu ali računalniku, ju lahko enostavno povečate z vlečenjem. Kaj se zgodi s ploščino dela slike, ki jo pokriva piramida oz. črna stavba, ko sliki povečamo?



Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija (Prenos) (didaktična) 2 min	Učitelj najprej preveri predznanje dijakov tako, da postavi naslednji vprašanje: »Kaj moram vedeti, da lahko določim ploščino trikotnika? Oziroma ploščino katerega koli drugega večkotnika? Ni možen samo en odgovor, lahko navedete več različnih odgovorov oziroma možnosti.« Dijake prosi, da zapišejo odgovor na list papirja. Za to imajo na voljo 2 minuti.	Dijaki sprejmejo nalogo in po potrebi kaj vprašajo, da se prepričajo, da razumejo nalogo pravilno.
Reševanje (Delovanje) v kombinaciji s Formulacijo (Zapisom ugotovitev) (adidaktična) 2 min	Učitelj hodi po razredu in spremlja, kakšne ideje so zapisali dijaki.	Dijaki zapišejo formule, kot so $S_{pravokotnika} = d \cdot v,$ $S_{trikotnika} = \frac{v \cdot b}{2},$ $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}.$ <p>Omenijo lahko, da lahko ploščino izračunamo kot vsoto ploščin trikotnikov, na katere lahko razdelimo večkotnik. Druge metode: štetje kvadratkov na milimetrskem papirju ali metode z uporabo računalnika.</p>
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 5 min	Učitelj prosi nekatere dijake, da predstavijo svoje ugotovitve. Zapišejo in narišejo jih na tablo. Za predstavitev učitelj izbere dijake, ki so imeli raznolike ideje. Učitelj prosi ostale dijake, da postavljajo vprašanja ali komentirajo predstavitev.	Dijaki poslušajo predstavitev sošolcev in jih prosijo za dodatno razlago ter komentirajo ugotovitve, zapisane na tabli, oz. razpravljajo o njih.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 min	Učitelj povzame vse predstavljene načine določanja ploščine večkotnikov in po potrebi dopolni zapise na tabli (če so dijaki kaj povedali, niso pa zapisali).	Dijaki poslušajo in nekateri bodo morda delali zapiske, vendar to ni obvezno.
Devolucija (Prenos) (didaktična)	Dijake razdelimo v skupine po 3, vendar jih spodbujamo, da v začetku delajo individualno.	Dijaki poslušajo in po potrebi postavljajo dodatna vprašanja.

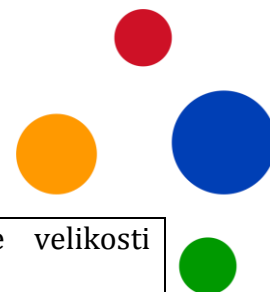


<p>2 min</p>	<p>Učitelj dijakom zastavi problem glede ploščine dela slike pri večanju slike in jih vpraša, če ga razumejo.</p> <p>Dijakom nato priskrbi (oz. jih prosimo, da prinesejo) karirast papir, milimetrski papir, škarje, ravnilo, žepno računalo in računalnik z ustrezno programsko opremo (ki jo običajno uporabljajo pri pouku).</p> <p>Dijakom pove, da imajo na voljo 15 minut časa, da formulirajo odgovor z utemeljitvijo, ki ga bodo kasneje predstavili sošolcem.</p>	<p>Vzamejo potrebni material, npr. papir, ravnilo itd.</p>
<p>Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 15 min</p>	<p>Učitelj kroži po razredu in beleži, katere strategije so si izbrali dijaki. <i>V samostojno reševanje dijakov se ne vmešava, razen če treba razjasniti problem.</i></p>	<p>Dijaki začnejo preizkušati nekatere od strategij v svoji skupini.</p> <p><i>Glej spodaj Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja.</i></p>
<p>Formulacija (Zapisom ugotovitev) (adidaktična) 10 min</p>	<p>Učitelj prosi skupine, da izberejo en odgovor na dani problem tako, da člani skupine predstavijo svoje ideje in o njih razpravljajo (nekatere skupine so morda že prej začele s to dejavnostjo, če so bili člani brez idej ali pa so dvomili o njih).</p> <p>Učitelj opazuje skupinsko delo, da lahko načrtuje predstavitve.</p>	<p>Dijaki na kratko predstavijo svoje delo. Nekateri dijaki bodo morda preskočili predstavitev svojega dela z argumentom, da so uporabili podobne strategije kot drugi člani skupine.</p> <p>Skupine pripravijo predstavitev rešitve problema.</p>
<p>Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 20 min</p>	<p>Učitelj pokliče skupine, da druga za drugo predstavijo rešitve – začnejo z bolj praktičnimi in ohlapnimi formulacijami in končajo z najbolj splošnimi argumenti.</p> <p>Dijake spodbuja, da med predstavitvami drugih skupin postavljajo podrobnejša vprašanja.</p> <p>Če nobena skupina ne postavlja vprašanj in se učitelju zdijo deli</p>	<p>Dijaki predstavijo svoje rešitve po najboljših močeh, nato pa poslušajo in postavljajo podrobnejša vprašanja, če ne razumejo drugih predstavitev.</p>

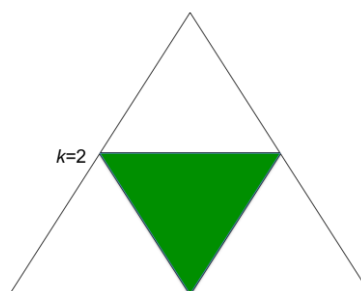


	predstavitev nejasni ali pa odkrije napake, vprašanja zastavi učitelj.	
Devolucija (Prenos) (didaktična) 2 min	Učitelj prosi skupine, da razložijo povezave in razlike med predstavljenimi rešitvami. Katera je »najbolj uporabna« in zakaj?	Dijaki poslušajo.
Reševanje (Delovanje) v kombinaciji s Formulacijo (Zapisom ugotovitev) (adidaktična) 15 min	Učitelj kroži po razredu in opazuje, kaj si dijaki zapisujejo in o čem se pogovarjajo.	Dijaki lahko gradijo argumente na konkretnih primerih, izračunih ali z algebrskimi pristopi.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 10 min	Učitelj na podlagi opazovanja dela posameznih skupin določi zaporedje različnih predstavitev odgovorov. V primeru uporabe podobnih postopkov se bo učitelj morda odločil, da vse skupine ne bodo predstavile svojega dela.	Skupine predstavijo svoje odgovore in jih zapisujejo na tablo. Preostale skupine po potrebi postavljajo dodatna vprašanja in komentirajo.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 min	Učitelj naredi povzetek tako, da izpostavi različne strategije in ponovno poudari povezanost strategij in kako se medsebojno podpirajo. Prav tako izpostavi, da so morda v nekaterih primerih določene strategije ustreznejše – lahko poda nove primere. Rešitev poda v obliki ustaljenega splošnega zapisa in izpostavi, kako se to vidi v različnih rešitvah dijakov.	Dijaki poslušajo in nekateri bodo morda delali zapiske.

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	<ul style="list-style-type: none"> ○ Risanje večkotnikov na milimetrskem papirju, štetje števila prekritih kvadratkov na originalni in povečani sliki (brez eksplicitne uporabe koncepta koeficienta podobnosti). ○ Risanje na poljubnem listu papirja, merjenje osnovnice b in višine v z ravnilom, da bi izračunali ploščino s pomočjo formule $S = \frac{v \cdot b}{2}$ (ponovno brez uporabe koeficienta podobnosti). ○ Eksperimentiranje z različnimi koeficienti podobnosti (2, 3, 0.5 itd.):
---	---



- Algebraično na podlagi primerov (različne velikosti trikotnikov).
- Gornja strategija se lahko izvede s pomočjo IKT.
- S pomočjo milimetrskega papirja. Nariše različne oblike, se jih poveča in prešteje pokrite kvadratke.
- Z risanjem trikotnikov na papir in uporabo ravnila za merjenje stranic ter računanjem dobljene ploščine.
- Oblike se lahko nariše s pomočjo IKT, npr. Geogebra. Stranice in ploščine se lahko izmerijo s pomočjo ustreznega ukaza, odvisno od uporabljenega programa.
- Risanje trikotnikov in izrezovanje iz papirja. Če je povečava celo število k , potem lahko majhen trikotnik vstaviš v povečanega k^2 - krat.



- Z uporabo IKT: nariši večkotnik, povleci ga, dokler se ne poveča za določen koeficient, in ukaži programu, da izračuna ploščine. Na primer, dijaki lahko uporabijo program »The Geometer's Sketchpad« za povečavo slik in opazujejo, kaj se dogaja s ploščino.
- Na podlagi opisanih eksperimentov lahko sklepamo naslednje:
 - Če povečamo dolžino stranice pravokotnega trikotnika (z višino v in osnovnico b) s koeficientom podobnosti k , potem bo nova višina znašala $k \cdot v$ in osnovnica $k \cdot b$. To pomeni, da se ploščina poveča s koeficientom k^2 , saj je $S_2 = \frac{1}{2} \cdot kv \cdot kb = k^2 \cdot S_1$, pri čemer je S_1 ploščina prvotnega trikotnika.
 - Za poljubni trikotnik z višino v in osnovnico b je potreben argument, zakaj se višina poveča na $k \cdot v$. To lahko storimo, če si pogledamo dva pravokotna trikotnika, ki skupaj sestavljata splošen trikotnik.
 - Če povečamo dolžino stranice poljubnega trikotnega (s stranicami a, b in vmesnim kotom γ) s koeficientom podobnosti k , potem lahko prvotno ploščino izračunamo kot $S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$. Povečana ploščina je tedaj $S_2 = \frac{1}{2} \cdot ka \cdot kb \cdot \sin \gamma = k^2 \cdot S_1$.
 - V primeru enakostraničnih trikotnikov lahko uporabijo formulo $p = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ in podobno odkrijejo, da se ploščina poveča s koeficientom k^2 , če se a poveča s koeficientom k .



	<ul style="list-style-type: none">○ V primeru slike na desni strani (in drugih večkotnikov) razdelite večkotnik na trikotnike in izračunajte vsoto ploščin z uporabo nekaterih omenjenih metod za trikotnike.○ Lahko uporabijo Heronovo formulo:$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$Ta možnost zahteva, da dijaki znajo operirati z izrazi s koreni in potencami.
--	--

Pojasnilo glede materialov za dijake

Sliki, ki jih dijaki dobijo v začetku, sta izhodišče za fazo reševanja. Koncept povečevanja in zmanjševanja slik na mobilnem telefonu ali računalniku je dijakom znan. Lika na slikah bi opredelili kot trikotnik in trapezoid. Trapezoid lahko prekrijemo s trikotniki in na ta način problem prevedemo na povečevanje trikotnikov. Vseeno pa je potreben dokaz. Če dijaki tega prej ne omenijo, mora o tem učitelj spregovoriti v zadnji fazi devolucije. V Dodatku A lahko najdete tri različne velikosti slik, ki jih lahko uporabite za predstavitev problema dijakom.

Če so dijaki in učitelj vajeni dela z IKT, se lahko slika vključi v IKT (npr. GeoGebro) in se elektronski dokument deli z dijaki. Lahko premislimo o tem, da bi oglišča trikotnika označili/poimenovali zaradi sintakse računanja ploščine z IKT oz. zaradi premikanja oglišč. Dodatki B, C in D vsebujejo primere učnih listov v GeoGebri in Geometer's Sketchpadu kjer lahko dijaki eksperimentirajo s ploščinami različnih večkotnikov.



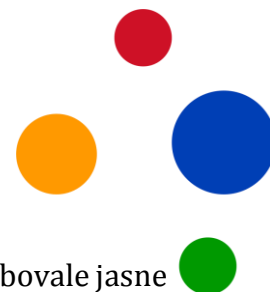
Dijaki delajo z milimetrskim papirjem in trikotniki (Hrvaška)

Če dijaki poznajo le osnovne pojme v zvezi z liki in njihovimi merami, naj like rišejo na milimetrski papir in določajo ploščino s preštevanjem kvadratkov. Za povečevanje oblike in ohranitev kotov bodo dijaki izrezali like iz papirja in jih uporabili pri risanju povečanih likov. Za to bodo potrebovali škarje in ravnila. Na sliki vidimo dijaka, ki sta na milimetrski papir oblikovala svoje like in jih povečevala.

Če je dijakom lažje delati s konkretnimi modeli večkotnikov (npr. trikotnikov), jim je potrebno te modele pripraviti. Modeli pomagajo dijakom, da ugotovijo, kako se ploščina poveča v primeru, če je faktor povečave naravno število. Od tu lažje naredijo prehod na simbolno reprezentacijo problema.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

V didaktičnih fazah mora biti poudarek na formulaciji dijakov in njihovi potrditvi. V didaktični fazi ne bi smeli biti podani namigi za rešitev. V tem poglavju govorimo o tem, kaj bi lahko spremenili (didaktične spremenljivke).



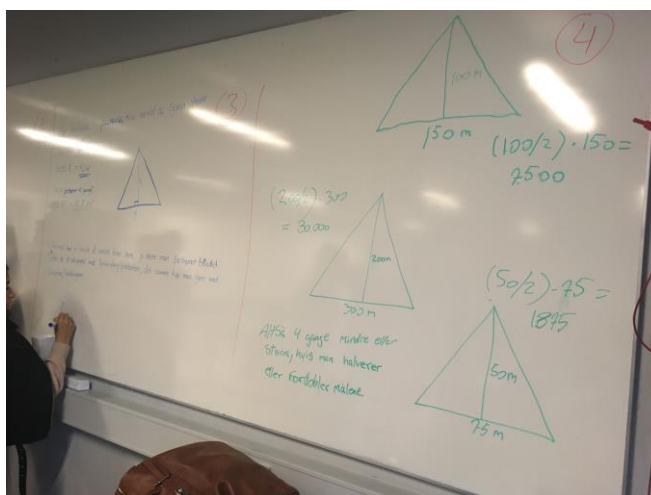
Didaktično okolje (Milje): Lahko bi izbrali druge slike, ki pa naj bi še vedno vsebovale jasne slike trikotnikov in večkotnikov (ne pa pravokotnikov). Dijake bi morali vzpodbujati, da uporabijo IKT, vendar je v primeru uporabe dinamičnih učnih listov s slikami potrebno vzpodbujati tudi delo s formulami. Morda bodo dijaki prišli do ugotovitve, da se ploščina poveča s faktorjem k^2 , ne bodo pa znali najti algebrske utemeljitve. To lahko naredimo pri naslednji uri. Če boste uporabili elektronske delovne liste, se izognite dodatnim namigom (npr. izpolnitvi preglednice).

V fazi potrditve je pomembno, da dijaki v čim večji meri sami najdejo in popravijo napačne strategije in formule. Učitelj proces lahko podpira z vprašanji: Ali lahko ponoviš, kar je bilo pravkar povedano? Je to pravilno? Zakaj tako misliš? Od kod to veš? Ali to velja za oba lika? Za vse like? Kako sta povezani formuli $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$ in $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$? Vprašanja, ki jih učitelj zastavi, so odvisna od predznanja dijakov in njihovih sposobnosti.

Trajanje faz se prilagodi delu dijakov, vendar se faze naj ne podaljšujejo preveč.

V prvi in drugi didaktični fazi dijakom ne povemo, kaj morajo odkriti in kaj je faktor povečevanja (koeficient podobnosti). Če učitelj ni prepričan, kakšno je predznanje dijakov, naj jim zastavi vprašanja: Kdaj so liki podobni? Kako jih lahko primerjamo? Jih je smiselno primerjati? Če večina dijakov ima potrebno predznanje, ta vprašanja zastavimo le posameznikom ali posameznim skupinam. Če pa večina nima potrebnega predznanja, se ta faza skrajša in se o vprašanjih pogovorimo skupaj z vsemi dijaki.

Učitelj naj ne predava vsaki skupini posebej. Še več, *ni potrebno*, da bi učitelj ostal s skupino, dokler ta ne pride do odgovora. Na ta razgovor lahko gledamo kot na manjšo devolucijo omejenega problema in dijaki spet rešujejo, formulirajo in potrjujejo svoje rešitve. Ne zastavljajte jim dodatnih vprašanj in ne dajajte dodatnih namigov.



Skupina dijakov predstavlja svojo rešitev na tabli. (Danska)

Intervencije v *tretji fazi* reševanja, formulacije in potrditve: Osnovna ideja ostaja enaka tistim, ki smo jih navedli prej. Če imajo posamezne skupine težavo, kako začeti, jim učitelj predlaga, naj svojo strategijo primerjajo s strategijo kakšne druge skupine. Drugo skupino in strategijo je treba pametno izbrati, da bo skupina lahko naredila smiselno primerjavo. Na to bi lahko pogledali kot na novo devolucijo malo manj odprtega podproblema.

Med *zadnjo fazo institucionalizacije*: pomembno je, da večino strategij (če ne vse), ki so jih predstavili dijaki, povežemo med seboj. Na primer, če je ena od skupin uporabila formulo $A = \frac{1}{2}hb$, druga pa $A = \frac{1}{2}ab \sin(C)$, bi morali dijaki ugotoviti, da je $h = a \cdot \sin(C)$.



Utemeljitev je potrebno podrobno zapisati, na kar naj bo učitelj pozoren že v fazi priprave na pouk. Če učitelj vnaprej predvidi, katere strategije bodo njegovi dijaki uporabili, bo skozi učno uro lažje krmaril in napovedal pot preiskovanja dijakov. Ne smemo pozabiti, da imamo pred seboj različne dijake oz. dinamični sistem, ki se lahko prilagaja miljeju in ni mogoče pričakovati, da bodo vsi dijaki dali isti odgovor!

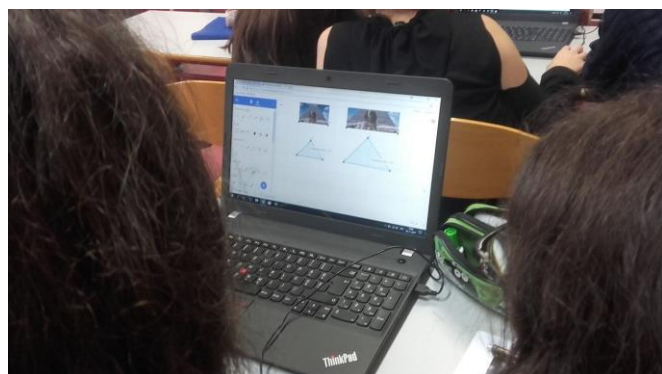
Proces preiskovanja vključuje vse faze. Dijaki bodo potrebovali več kot eno učno uro preiskovanja, da bodo usvojili tak način dela.

Nekateri učitelji si oblikujejo preglednico, v katero si beležijo različne strategije, ki bi jih lahko uporabili njihovi dijaki v fazi reševanja. Te pričakovane strategije si učitelj lahko beleži na list in vsaki doda na primer tri vprašanja za skupino, ki bi uporabila in predstavila to strategijo. Med didaktično fazo si učitelj beleži, katera skupina je uporabila katero od strategij in s pomočjo tega lažje organizira didaktično formulacijo, ki sledi v nadaljevanju.

Opažanja iz prakse

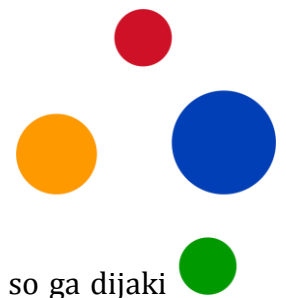
Najbolj pomembno opažanje iz prakse je, da si nekateri učitelji v vseh fazah preveč prizadevajo dijake poučevati. To uniči didaktični potencial situacije in močno ovira dijake. Opazili smo tudi, da so nekateri dijaki uporabili strategijo povečevanja in zmanjševanja z odstotki (za koliko odstotkov se zmanjša ploščina, če se stranica zmanjša za 30 %?). To bi lahko povezali s koeficientom podobnosti $k = 1,30$. V zadnji fazi formulacije in potrditve dijake vzpodbudimo, da povežejo svoj rezultat s faktorjem raztega. Skupina, ki je kot strategijo uporabila Heronovo formulo, lahko izkoristi to priložnost in ponovi pravila za računanje s potencami, koreni in oklepaji.

Če dijaki delajo z IKT, mora učitelj pripraviti tudi vprašanja, s katerimi bo podprl dijake, da pridejo do matematične utemeljitve. Ta vprašanja so lahko, na primer: Kako računalnik izmeri ploščino lika? Kako računalnik pridobi podatek o dolžini stranice, če so dana oglišča večkotnika? Katero formulo po tvojem mnenju uporabi računalnik in kako najde ustrezna števila? Ko računalnik poveča sliko za 25 %, kaj se v resnici poveča za 25 %?



Dijaki preiskujejo trikotnik v GeoGebri (Slovenija).

Če učitelj izbere druge slike (kot nekateri so), je potrebno dobro premisliti, da druga slika ne spremeni problema. Če slika jasno prikazuje tretjo dimenzijo, se lahko nekateri dijaki zmedejo. Če oglišča niso prikazana, je težko opredeliti dolžino stranic. Če izberete bolj zapletene oblike, se bodo nekateri dijaki zmedli, drugi pa bodo morda bolj motivirani. Izbor slike je tako zelo odvisen od učiteljevega poznavanja razreda. Dodali bi, da se je v tem primeru treba izogniti izbiri oblik, ki niso večkotniki.



Orodja za evalvacijo

Ob zaključku ure ali čim prej v eni od naslednjih ur lahko učitelj znanje, ki so ga dijaki pridobili, preveri z naslednjimi nalogami:

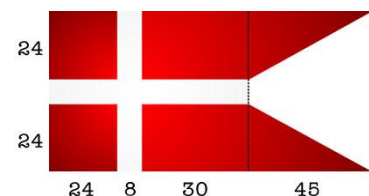
1. Prijatelj ti pove, da za konstrukcijo kvadrata, katerega ploščina je enaka polovici ploščine danega kvadrata, preprosto razpoloviš njegovo stranico. Kaj meniš ti?
Odgovor: Napačno. Če boš stranico razpolovil, bo ploščina kvadrata enaka četrtini ploščine danega kvadrata.
2. Trikotnik T ima dolžine stranic enake 3 cm, 5 cm in 7 cm. Trikotnik T^* ima enake kote, njegova ploščina pa je štirikrat tolikšna kot ploščina trikotnika T . Kolikšne so stranice trikotnika T^* ?
Odgovor: Za štirikrat tolikšno ploščino je treba stranice podvojiti: 6 cm, 10 cm, 14 cm.
3. Lik, na primer trikotnik, narišemo na papir velikosti A4. Na kopirnem stroju ga povečamo na papir velikosti A3 (s tem se ploščina podvoji). Kaj se zgodi z dolžino stranic lika?
Odgovor: Ker se ploščina podvoji, je ploščinski faktor $k^2 = 2$, pri čemer je k faktor povečave. Od tod dolžine stranic lika dobimo tako, da dolžine stranic začetnega lika pomnožimo s $k = \sqrt{2}$.

Predlogi za nadaljnje preiskovanje ploščine in raztega

Pripomočki: Papir, svinčnik, ravnilo, šestilo, žepno računalno.

Pri reševanju mora dijak jasno in temeljito zapisati, kako je prišel do odgovora.

1. Papir formata A5 dobimo tako, da papir formata A4 prepognemo na polovico. Daljša stranica papirja velikosti A4 meri 297 mm. Koliko meri krajša stranica?
2. Pravila določajo, da mora danska zastava imeti dimenzije, kot je prikazano na sliki. Priporoča se, da je širina zastave enaka $1/5$ višine droga, na katerem visi zastava. Če je enota 1 cm, je za zastavo na sliki priporočen drog z višino 280 cm. Kolikšna je ploščina zastave za drog, ki je visok 1120 cm?



3. Zlate lističe prodajajo po 27,99 \$ za 100 listov velikosti 2,2" x 2,0". Umetnik želi z zlatom prevleči črko **A** na panoju velikosti 3,5 m x 8 m. Ker je to predrago, mora pano zmanjšati tako, da se bodo stroški zlata zmanjšali za 30 %. Kolikšne dimenzije bo imel pano?
4. Božični okraski na sliki so izdelani tako, da krožne izseke zvijemo v stožce. Za manjše stožce porabimo približno 350 cm² kartona. Ocenite, koliko kartona potrebujemo za večji stožec.
5. Na zemljevidu mesta z merilom 1:7200 ima park približno površino 12 cm². Ocenite, koliko meri park v resnici.





6. Četrtošolci so se učili o trikotnikih in pri likovnem pouku izdelali sliko na levi. Širina slike je 5 cm. Na originalni sliki je ploščina majhnega rumenega štirikotnika v sredini 10 cm^2 . Kolikšna je širina originalne slike?

7. Leta 1854 je bil premer eno dolarskega zlatega kovanca spremenjen iz 13 mm na 15 mm brez, da bi se spremenila njegova masa. Za koliko odstotkov se je povečala njegova ploščina? Za koliko odstotkov se je zmanjšala njegova debelina?



8. Kaj lahko sklepate o povečanju in faktorju povečave iz umetniške slike na desni?

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Pomembnost in uporabnost

Dotaknili se bomo treh vidikov:

- *Realno življenje:* Znanje v tem scenariju je povezano z vsakdanjimi izkušnjami s povečevanjem slik ali dokumentov. Dijake moramo opozoriti na različno razumevanje zapisa »dvakrat tolikšen kot originalna slika«. Če imamo 1 m^3 peska in ga naročimo dvakrat toliko, kolikšne bodo dimenzije naročenega peska, če bi ga oblikovali v kocko: $? m \times ? m \times ? m$?
- *Področje dela:* Veliko delovnih mest zahteva znanje o povečanju za določen faktor, na primer zdravstvo (% raztopine) in arhitektura (modeli v merilu).
- *Nadaljnje možnosti:* Znanje in veščine povezane s to temo so uporabne na številnih znanstvenih področjih (npr. pri biologiji in oblikah kosti živali ter pri fiziki in ohlajanju objektov). Dodajmo še zgodovinsko-filozofsko noto za bolj družboslovno naravnane dijake: podvajanje ploščine kvadrata se pojavi v znanem Platonovem delu *Menon*.

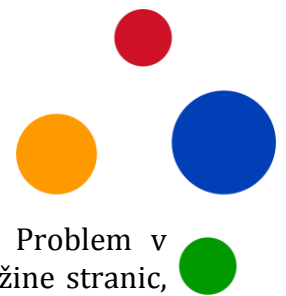
Preiskovalne veščine

Pri scenariju o ploščini dijaki razvijajo preiskovalne veščine, kot so postavljanje hipotez, podajanje primerov, sistematično preizkušanje, urejanje podatkov, iskanje in utemeljevanje formul, sodelovanje in komunikacija. V kolikšnem obsegu te veščine dejansko pridejo do izraza, je v veliki meri odvisno od tega, kolikšen pomen jim nameni učitelj pri povratni informaciji v drugi fazi potrditve, ko dijaki predstavljajo svoje delo. Nadalje so veščine lahko del formulacije in institucionalizacije. V tem primeru predlagamo, da jih učitelj nekje zapiše in se jim posveti v prihodnjih urah.

Možnosti za sklop zaporednih ur

Scenarij o ploščini je lahko del sklopa ur o povečanju v povezavi s spremembami dolžine, ploščine in prostornine geometrijskih teles.

- *Predznanje:* Za obravnavo te vsebine bi pričakovali, da dijaki poznajo formule za izračun ploščine in prostornine osnovnih matematičnih oblik, kot so trikotnik, pravokotnik, krog, kocka, valj. Prav tako je koristno, če poznajo faktor raztega in njegovo povezavo s povečevanjem ploščine, pri čemer ostanejo razmerja med dolžinami stranic enaka (podobnost).



- *Uvod:* Kontekst z bogatim odprtim problemom, ki preči modul. Problem v kontekstu, ki naravno poveže pojem povečevanja s spremembo dolžine stranic, ploščine in prostornine ter sproži vprašanja, kako so ti pojmi med seboj povezani. Možnosti vsebujejo:
 - Živali - ohlajanje in segrevanje telesa z določeno prostornino glede na površino kože;
 - Zmanjševanje zgradb za določen faktor - Mini mundus ali uporaba LEGO kock;
 - Embalaža - količina materiala za embalažo oziroma zavijanje;
 - Babuška - raziskovanje dolžine in mase lutk različnih velikosti;
 - Analiza razmerij delov telesa lutk, če bi jih povečali na naravno velikost.

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija:* Za razpravo o situaciji se uporablja matematični jezik. Dijaki si najprej ustvarijo neformalen model situacije. Nato situacijo preiskujejo z navajanjem primerov in merjenjem ter skušajo ugotoviti, kaj je bistvo. Pripravijo si predstavitev svojih ugotovitev. Učitelj vodi pogovor o podobnostih in razlikah med ugotovitvami skupin in jih vodi k sklepu, da se različne dimenzije vedejo različno. To pripelje do potrebe, da se ena od dimenzij bolj podrobno razišče, npr. ploščina.
- *Vertikalna matematizacija:* Matematika, ki jo razvijamo skozi dani primer, se razvija naprej. Model postane bolj abstrakten in splošen. Predstavi se problem s ploščino s scenarijem za ploščino. Scenarij je predstavljen v kontekstu povečevanja dveh slik, slike piramide in slike zgradbe. Kontekst povečevanja slike naravno pripelje do vprašanja o spremembi dolžine in ploščine na sliki. Vendar pa lahko tvegate, da bodo dijaki vključili tudi druge karakteristike slike (na primer: kaj se zgodi z dimenzijami piramide, če jo povečamo?) in jih to lahko zmoti, npr. kot posledice projekcije. Ta scenarij razvija razumevanje dejstva, da se ploščina spremeni s faktorjem k^2 , če se dolžine stranic povečajo za faktor k . Veščine preiskovanja, kot so navajanje primerov, urejanje podatkov, zapis in utemeljitev formule, so lahko poudarjene v fazi formulacije in institucionalizacije.

Zaključek, refleksija in predlogi za nadaljnje proučevanje

Dijaki reflektirajo svoje delo, združujejo ideje, koncepte in veščine naredijo bolj eksplicitne, učitelj poudarja ključne točke učenja.

Pri učni uri, ki sledi učni uri po scenariju o ploščini, se lahko naprej sprašujemo o tem, kaj nam ugotovitve iz scenarija povedo o začetnih ugotovitvah po skupinah: ali lahko uporabimo k^2 in preiskovalne strategije v teh kontekstih? Enega ali več začetnih problemov lahko raziščemo bolj podrobno, da bi prišli do podobnih ugotovitev v zvezi z dolžino in prostornino. Na koncu lahko pridemo do ugotovitve, da povečevanje dolžine s faktorjem k pomeni, da se ploščina oz. prostornina objekta z dimenzijo $d = 2$ oziroma $d = 3$ poveča s faktorjem k^d .