Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA SKABELON FOR SCENARIER OG MODULER

(denne side er med vilje blank)

MERIA SKABELON FOR SCENARIER OG MODULER

REDAKTØR
Carl Winsløw

TEKST SKREVET AF
Britta Jessen, Carl Winsløw

REDIGERING OG KORREKTURLÆSNING
Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

DESIGN OG LAYOUT
Irina Rinkovec

Projekt MERIA, februar 2018.
www.meria-project.eu

(denne side er med vilje blank)

Indholdsfortegnelse

Introduktion

Et af hovedresultaterne af projektet MERIA vil være et sæt nye showcase-undervisningsscenarier og moduler, der vil være baseret på den teoretiske baggrund, der er præsenteret i *MERIA Håndbog i undersøgelsesbaseret matematikundervisning*.

Et *scenarie* beskriver en didaktisk situation og tilhørende undervisningsmetoder. Det beskriver lektionens læringsmål inden for læreplanernes rammer, en konkret tilsigtet viden og kompetencer og giver en klar struktur for lektionen med udgangspunkt i Teorien om didaktiske Situationer. Et *modul* indeholder derudover skriftlige og digitale materialer, der følger med undervisningsscenariet såsom elevernes produkter eller digitale regneark.

Modulet indeholder en eksplicit begrundelse for valg af problem(er) og undervisningsmetoder, et perspektiv fra teorien Realistisk Matematikundervisning (Realistic Math Education - RME), erfaringer og resultater fra kontrollerede implementeringer, herunder potentielle gevinster og faldgruber for studerende med specifikke forudsætninger.

Dette hæfte indeholder en skabelon, der beskriver strukturen i et scenarie og et modul samt et eksempel med titlen *Arealforhold*. Dette eksemplariske scenarie har været afprøvet på skoler, fra alle fire lande, der deltager i projektet (information om skolerne er tilgængeligt på projektets hjemmeside), og informationerne i modulet er baseret på de data og de tilbagemeldinger, som projektgruppen har fået fra lærere og elever fra disse afprøvninger.

1. Skabelon for et MERIA-scenarie

<table>
<tr><td>Tilsigtede viden</td><td colspan="3">En præcis formulering af det matematiske mål.</td></tr>
<tr><td>Bredere kompetencemål</td><td colspan="3">Kompetencer ud over de kernestoffaglige som f.eks. mulige anvendelser, ræsonnement. Men det kan også være en bredere indsigt i nogle begreber, der er involveret i opnåelsen af den tilsigtede viden.</td></tr>
<tr><td>Nødvendige matematiske forudsætninger</td><td colspan="3">Præcis formulering af hvilken matematisk viden, hvilke færdigheder og kompetencer eleverne forventes at have for at kunne arbejde med problemstillingen.</td></tr>
<tr><td>Niveau</td><td colspan="3">Klassetrin, niveau og/eller elevernes alder</td></tr>
<tr><td>Tid</td><td colspan="3">Et estimeret tidsforbrug og antal lektioner (angivelse af lektionslængden i parentes).</td></tr>
<tr><td>Materialer til rådighed</td><td colspan="3">Alle former for hjælpemidler, eleverne får til rådighed.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Problemstilling: En præcis formulering af problemstillingen, som læreren overdrager til eleverne (muligvis efter nogle forudgående forberedende aktiviteter).</td></tr>
<tr><td></td><td>Lærerens handlinger inklusiv instruktioner</td><td>Elevernes handlinger og reaktioner</td><td>Observationer fra implemen-teringen</td></tr>
<tr><td>Devolution (didaktisk)
Tidsestimat</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Handling (adidaktisk)
Tidsestimat</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Formulering (didaktisk/adidaktisk)
Tidsestimat</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Validering (didaktisk/adidaktisk)
Tidsestimat</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Institutionalisering (didaktisk)
Tidsestimat</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Mulige veje eleverne vil opnå den tilsigtede viden</td><td colspan="3">- Vær matematisk eksplicit omkring de strategier, som eleverne ville følge.
- Få understreget, hvornår en strategi vil være ved brug af CAS-værktøj og hvornår det blot er vha. Papir og blyant.
- Ligeledes bør tænkes på konkrete specialtilfælde, some lever ville tage udgangspunkt i.</td></tr>
<tr><td>Forslag til videre studier</td><td colspan="3">- Hvilke mulige anvendelser eller generaliseringer er der af det undersøgte begreb?</td></tr>
</table>

Liste over yderligere materialer	- Elevernes produktioner (fotos af tavlen, rapporter opgaver, posters osv.). - Formulering af afleveringsopgaver, rapporter eller andre produktkrav til elevernes med udgangspunkt i lektionen. - Tabel til registrering af elevernes valgte strategier. - Videoer

Bemærk: faserne devolution og institutionalisering kan gentages, men bør ikke gentages for ofte i en didaktisk situation.

2. Skabelon for et MERIA modul

Scenariet

En kort beskrivelse af scenariet er skrevet i en tabel. Husk at skrive et tidsestimat, instruktioner og forskellige mulige elevstrategier sammen med målet for scenariet. Søjlen med observationer vil udelades i modulet.

Forklaring af materialer

I dette afsnit gives der en kort forklaring på, hvordan man bruger de yderligere materialer, med en præsentation af hvert materiale eller ressource (opgaveark eller lignende, (elektroniske) regneark, terninger, klodser eller andre genstande) og forslag til, hvordan man bruger materialerne i en bestemt fase. Nogle af ressourcerne vil muligvis kun være for læreren.

Variationsmuligheder baseret på didaktiske variable

Dette afsnit indeholder beskrivelser af, hvordan man kan variere scenariet sammen med anbefalinger til hvad der kan ændres og hvad der ikke bør ændres. Variationerne kan være en ændring af miljøet (ændrer f.eks. inddragelsen af CAS, tilføjer eller fjerner nogle matematiske objekter eller genstande), tidsestimaterne på faserne (en fase kan gøres kortere eller længere) eller organiseringen af arbejdsformen så eleverne arbejder individuelt, i par eller i grupper. Endvidere bør virkningen og konsekvenserne af variationer diskuteres ud fra den kontekst, de skal realiseres i - og trække på erfaringer fra testen af scenariet.

Observationer fra klasserummet

Her skal de vigtigste observationer og refleksioner fra testimplementeringerne af scenariet deles. Dette betyder en beskrivelse af mindre vellykkede strategier og forslag til, hvornår og hvordan man griber ind, beskrivelse af strategier med forskellige succesniveauer understøttet af data (foto af elevernes arbejde, opgaver osv.).

Evalueringsværktøjer

Det kan være en fordel at have et evalueringsværktøj i form af en hurtig opgave givet f.eks. i den sidste del af lektionen som en lille test af, om eleverne har nået læringsmålet for scenariet. Ligeledes at komme med forslag til andre problemstillinger, som kan bruges til den samme tilsigtede viden. De mulige strategier, der foreslås i scenariet, kan bruges som et ”kontrolværktøj” i løbet af lektionen. Hvis læreren opretter et ark med listen over strategier, kan han / hun bemærke, hvilke grupper der følger hvilken strategi, og om der er nogle vigtige, der er udeladt. Dette kan adresseres i scenariet, men kan også bruges efter lektionen til refleksion.

Begrundelser for og RME-perspektiver på scenariet

En detaljeret præsentation af, hvordan den tilsigtede viden kan nås vha. scenariet. Ligeldes kan RME-elementer adresseres, som f.eks. valg af den tilsigtede matematiske viden, relevans og anvendelighed, undersøgelsesfærdigheder og potentiale til et helt forløb (give forslag til hvordan scenraiet kan indgå i et forløb inden for et overordnet emne eller give en præsentation af "et større billede").

3. MERIA scenariet og modulet: Arealforhold

Undervisningsscenariet

<table>
<tr><td>Tilsigtede viden</td><td>Når sidelængden på et polygon forstørres med en vis factor k, vil arealet af polygonen forstørres med faktoren k^2.</td></tr>
<tr><td>Bredere kompetencemål</td><td>Eleverne skal selvstændigt kunne ræsonnere algebraisk og geometrisk og formulere generelle påstande og beviser baseret på formler for omkreds og arealer af forskellige former, og gerne med inddragelse af sinusfunktionen så vel som additiviteten af arealet, når et polygon opdeles. Begrebet ligedannede polygoner.

Elevpræsentation fra denne situation i Kroatien.

Hvis eleverne er vant til at arbejde med computere: At generere hypoteser i et grafisk miljø og bruge det som et udgangspunkt for et bevis.</td></tr>
<tr><td>Nødvendige matematiske forudsætninger</td><td>Eleverne skal kunne beregne arealet af polygoner og herunder triangulering af 4-kanter.
Ligeledes skal de have kendskab til ligedannethed og at forstørre et polygon med en skalafaktor.</td></tr>
<tr><td>Tid</td><td>90 minutter (2 lektioner).</td></tr>
<tr><td>Niveau</td><td>1.g (elever på ca. 15-16 år).</td></tr>
<tr><td>Materialer til rådighed</td><td>Blyant og papir, millimeterpapir, lineal, et matematisk værktøj, der kan tegne og måle polygoner (fx GeoGebra eller Ti-Nspire), en enhed som kan manipulere billeder (smartphone, pc eller tablet). Brugen af teknologi er strengt taget ikke nødvendigt, men får i høj grad eleverne til at føle sig fortrolige med miljøet.</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 

Problemstilling:
Betragt de to billeder. Hvis du åbner din smartphone eller computer, kan du let trække i billedet for at forstørre det. Men hvad sker der med arealet af pyramiden eller den sorte bygning, når du forstørrer billedet?</td></tr>
</table>

Fase	**Lærerens handlinger inkl. instruktioner**	**Elevers handlinger inkl. reaktioner**
Devolution (didaktisk) 2 minutter	Læreren starter med at spørge: Hvad har man brug for at vide, for at kunne bestemme arealet af en trekant? Eller arealet af andre polygoner? I må gerne give mere end ét svar. Skriv svarene på et stykke papir. I får 5 minutter.	Eleverne lytter og stiller muligvis opklarende spørgsmål for at sikre sig, at de forstår opgaven.
Handling og formulering (adidaktisk) 2 minutter	Læreren går rundt i lokalet og noterer sig, hvilke forskellige ideer eleverne bringer på banen og skriver ned på papir.	Eleverne skriver formler som fx: $A_{firkant} = l \cdot h$, $A_{trekant} = \frac{h \cdot b}{2}$, $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}$. De bemærker muligvis også, at arealet af et polygon kan bestemmes vha. triangulering. Andre metoder kunne være at tælle tern eller computerbaserede metoder.
Validering (didaktisk) 5 minutter	Læreren vælger en rækkefølge, i hvilken eleverne præsenterer de forskellige strategier, der er repræsenteret i lokalet. Læreren beder klassen stille spørgsmål til eller at kommentere fremlæggelserne.	Eleverne lytter til præsentationerne og beder om en uddybning, kommenterer eller diskuterer ideerne, der er fremlagt.
Institutiona-lisering (didaktisk) 2 minutter	Læreren opsummerer de forskellige måder, hvorpå man kan bestemme arealet af et polygon.	Eleverne lytter.
Devolution (didaktisk) 2 minutter	Eleverne inddeles i grupper á 3, men starter med at arbejde individuelt. Eleverne får 15 minutter til at forberede deres eget svar på spørgsmålet i problemstillingen. Læreren spørger ind til, om opgaven er forstået. Eleverne udstyres med (eller bedes medbringe) papir, millimeterpapir, saks, lineal, lommeregner og/eller computer med CAS-program.	Eleverne lytter og stiller opklarende spørgsmål om nødvendigt. De vælger de materialer, de ønsker at benytte som fx lineal og papir.

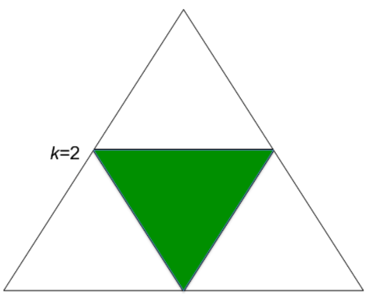
Handling (adidaktisk) 15 minutter	Læreren cirkulerer rundt i lokalet og noterer hvilke strategier, eleverne vælger. Læreren griber ikke ind med mindre der er opklarende spørgsmål i forhold til problemstillingen.	Eleverne prøver nogle forskellige strategier, som er vist længere nede, i deres grupper.
Formulering (adidaktisk) 10 minutter	Læreren beder grupperne blive enige om, hvilket af svarene fra de individuelle løsninger, de vil præsentere og diskutere. Læreren undersøger gruppernes arbejde for at kunne organisere præsentationerne.	Eleverne giver en kort præsentation af deres arbejde, og forbereder præsentationen af den valgte strategi.
Validering (didaktisk) 20 minutter	Læreren kalder grupperne op en efter en startende med den mest praktiske og vagt formulerede og slutter af med de mest generelle argumenter. Klassen opmuntres til at stille uddybende spørgsmål sammen med læreren under de andres præsentationer.	Eleverne laver deres præsentationer, lytter og stiller opklarende spørgsmål, hvis andres præsentationer er uklare.
Devolution (didaktisk) 2 minutter	Læreren beder elever forklare ligheder og forskelle mellem de forskellige svar på problemstillingen, der er præsenteret ved tavlen. Hvilken er den "*mest brugbare*" og hvorfor? Grupperne får 15 minutter til dette.	Eleverne lytter.
Handling/ Formulering (adidaktisk) 15 minutter	Læreren observerer argumenterne, som formuleres i grupperne.	Eleverne bygger deres argumenter fx på eksempler, beregninger eller algebraiske manipulationer.
Validering (didaktisk) 15 minutter	Læreren bruger sin viden om det individuelle arbejde i grupperne til at sekvensere og vælge forskellige svar blandt præsentationerne, så alle strategier bliver præsenteret.	Grupperne præsenterer deres svar ved tavlen. De andre grupper stiller opklarende spørgsmål eller tilføjer kommentarer, når dette er relevant.
Institutiona-lisering (didaktisk) 5 minutter	Læreren opsummerer ved at understrege de forskellige strategier.	Eleverne lytter og tager måske notater.

	Læreren formulerer, hvordan strategierne er relaterede og understøtter hinanden, selv om nogle strategier foretrækkes i visse tilfælde (fx nye eksempler). Læreren formulerer det tilsigtede mål i sin generelle form og peger på, hvordan det fremgår af de forskellige løsninger, som eleverne foreslår.	

Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden

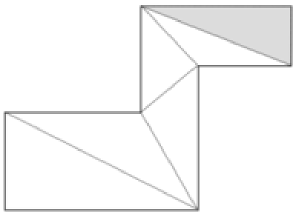
I det følgende vises forskellige tilgange, man kunne forestille sig eleverne ville have.

- Polygonerne tegnes på ternet papir og der tælles tern på den oprindelige og den forstørrede figur (uden eksplicit brug af begrebet forstørrelsesfaktor).
- En vilkårlig trekant tegnes på et stykke papir og grundlinjen b og højden h måles med en lineal for at arealet kan beregnes vha. formlen $A = \frac{h \cdot b}{2}$ (igen uden begrebet skala- eller forstørrelsesfaktor).
- Der eksperimenteres med forskellige skalafaktorer (2, 3, 0.5 osv.), som leder eleverne frem til hypoteser som fx, at anvendelsen af en faktor 2 medfører, at arealet vokser med en faktor 4.
    - Kan realiseres algebraisk ud fra eksempler (de vælger selv trekantens størrelse).
    - Ovenstående strategi kan gennemføres vha. CAS-værktøj.
    - Det kan realiseres vha. ternet papir, hvor forskellige former tegnes, forstørres og derpå tælles antallet af tern, som figuren dækker.
    - Det kan realiseres ved at der tegnes trekanter på papiret, anvendelse af linealen til at måle sidelængderne og beregning af arealerne.
- Formerne kan tegnes vha. CAS-værktøjer som fx GeoGebra. Sidelængderne og arealerne kan bestemmes vha. værktøjerne i CAS-programmet. Trekanterne tegnes og klippes ud af papiret. Hvis forstørrelsen er et heltal k, så kan den lille trekant ligge k^2 gange i den forstørrede trekant.



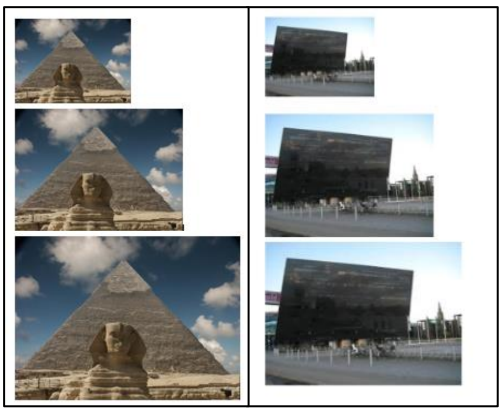
- CAS: Tegner polygonen og trækker i den indtil den er forstørret passende og bruger programmet til at bestemme arealet. For eksempel kan eleverne bruge geometrisk sketchpad til at forstørre billedet og observere, hvad der sker med arealet.

- Baseret på eksperimenterne beskrevet ovenfor, kan følgende ræsonnement udvikles:
  - Hvis vi øger sidelængden i en retvinklet trekant (som har højden h og grundlinjen b) med en faktor k, så vil den nye højde blive $k \cdot h$ og den nye længde blive $k \cdot b$. Dette betyder, at arealet øges med en faktor k^2, da $A_2 = \frac{1}{2} \cdot kh \cdot kb = k^2 \cdot A_1$, hvor A_1 er arealet af den oprindelige retvinklede trekant.
  - I en generel trekant med højden h og grundlinjen b skal man argumentere for, hvorfor højden øges til $k \cdot h$. Dette kunne gøres ved at betragte de to retvinklede trekanter, som tilsammen danner den generelle trekant.
  - Hvis vi øger sidelængden i en vilkårlig trekant (hvor to sider a, b er oplyst samt den mellemliggende vinkel C) med en faktor k, så vil arealet af den oprindelige trekant kunne beregnes ved $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$. Arealet af trekanten med de forøgede sidelængder kan beregnes ved
  $$A_2 = \frac{1}{2} \cdot ka \cdot kb \cdot \sin(C) = k^2 \cdot A_1$$
  - Hvis vi betragter en ligesidet trekant, så kan vi bestemme arealet ved formlen $A = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$. Så hvis her s forøges med faktoren k, så vil arealet forøges med en faktor k^2.
  - På billedet til højre ses en opdeling af et polygon i trekanter. Generelt kan polygoner opdeles i trekanter, og man kan beregne arealet af polygonen som summen af trekanternes arealer vha. metoderne beskrevet ovenfor.



  - Man kan benytte sig af Herons formel:
  $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
  Dette kræver, at eleverne kan omskrive algebraiske udtryk, der indeholder rødder og potenser.

Forklaringer til materialerne



De to billeder vist i præsentationen af problemstillingen dvs. i devolutionsfasen skulle gerne engagere eleverne. Eleverne er bekendt med ideen om at zoome ind og ud på et billede på computere og mobiltelefoner. De to valgte figurer kan karakteriseres som en trekant og en trapezoide. Det sidste billede kan opdeles i trekanter, og spørgsmålet kan dermed reduceres til et spørgsmål om at forstørre en trekant. Men dette kræver et argument. Læreren skal adressere

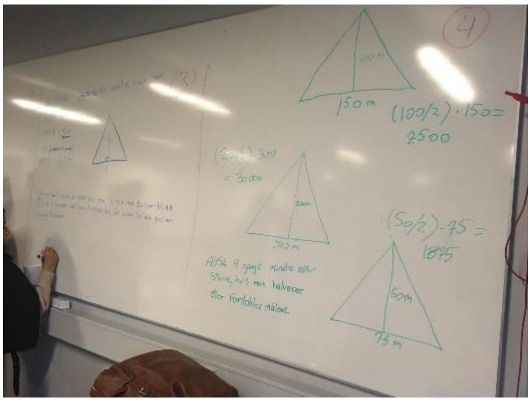
dette behov i den sidste devolution, hvis eleverne ikke af sig selv har nævnt det forud for denne fase.
Man kunne uddele et sæt af billeder til eleverne med tre forskellige størrelser af det samme billede for at illustrere problemstillingen. Gerne hvor skalafaktoren både kan være et heltal og ikke et heltal.

Hvis eleverne og læreren er vant til at arbejde med CAS i undervisningen, kan billedet sættes ind i programmet (fx GeoGebra), og man kan dele den elektroniske fil med eleverne. Man kan overveje at markere punkterne i hjørnerne, hvis syntaksen til beregning af området skal indarbejdes i det elektroniske regneark, eller hvis hjørnepunkterne skal være bevægelige. Som lærer kan man udarbejde en fil, der gør det muligt at eksperimentere sig frem.
Er eleverne kun fortrolige med de grundlæggende begreber om figurer og deres størrelser, kan det være nødvendigt at lade dem starte med at tegne figurerne på ternet papir og lade dem tælle tern. For at kunne forstørre figurerne og bevare vinklerne, kan eleverne få brug for at klippe deres figur ud, så de kan benytte denne til at tegne den forstørrede figur. Derfor behovet for at have sakse og linealer med til klassen.
Billedet viser elever, der lavede deres egne figurer på ternet papir.

Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable

Fokus i de didaktiske faser bør være på elevernes formuleringer og valideringen af dem. I de adidaktiske faser må der ikke gives ledetråde til løsningen på problemstillingen. I det følgende diskuteres hvilke ændringer, der er mulige i de ovenstående tilgange (didaktiske variable).
Det didaktiske miljø: billederne kunne være nogle andre, men de bør stadig vise en trekantet form og en 4-sidet form (noget ikke-trekantet). Eleverne kan opfordres til at bruge CAS. Men hvis man har integreret et dynamisk regneark med billederne, så bør det sikres, at arbejdet også kræver arbejde med formler. De kan dermed få mulighed for at nå frem til, at arealet er øget med en faktor k^2, men er ikke nødvendigvis i stand til at udvikle et algebraisk argument. Dette kan gøres i en opfølgende lektion. Hvis man designer et regneark, bør ledetråde undgås fx ved at lave tabeller, der blot skal udfyldes.
I *valideringsfasen* er det vigtigt, at forkerte strategier eller formler korrigeres – så vidt muligt af andre elever. Læreren kan engagere resten af klassen med spørgsmål til visse elever som fx: *Kan du gentage, hvad der lige blev sagt? Er dette korrekt? Hvorfor tænker du det? Hvor ved du dette fra? Er det anvendeligt på begge figurer? På alle typer af figurer? Hvad er sammenhængen mellem*
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$ *og* $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$? Hvilke spørgsmål, der stilles, afhænger af, hvad der er foregået forud i timen og elevernes forkundskaber.
Fasernes *længde* kunne tilpasses elevernes arbejde, men bør ikke forlænges meget.

Gennem de to første adidaktiske faser bør eleverne ikke fortælles, hvad de skal opdage, og heller ikke blive mindet om, hvad en skalafaktor er. Hvis læreren er i tvivl om, hvorvidt eleverne har de nødvendige matematiske forudsætninger specificeret øverst, kan læreren i stedet stille spørgsmål: *Hvornår er figurer ligedannede? Hvordan kan vi sammenligne dem? Giver det mening at sammenligne dem?* Spørgsmålene bør kun stilles til enkelte grupper eller individer, hvis det ser ud til, at resten af klassen har de nødvendige forudsætninger. Hvis størstedelen af klassen behøver at tage disse spørgsmål i betragtning, bør faserne gøres kortere og spørgsmålene stilles i plenum. Læreren skal ikke stå og stille samme spørgsmål til hver gruppe separat. Ligeledes er det ikke nødvendigt at blive ved gruppen, til de har fået svaret på de stillede spørgsmål. De stillede spørgsmål kan betragtes som en mindre devolutionsfase på en afgrænset problemstilling, og herefter skal eleverne handle, formulere og validere. Læreren skal ikke støtte med yderligere spørgsmål eller give hint til svaret.



Elevernes løsninger fra grupperne på tavlen (Danmark).

Afbrydelser i løbet af *den tredje* handlingsfase, formuleringsfase og valideringsfase: Hovedideen er tilsvarende dem ovenfor. Hvis nogle grupper finder det meget svært at komme i gang, kan læreren foreslå, at de sammenligner deres strategi med en udpeget anden gruppes strategi. Denne strategi med at sammenligne skal vælges med omhu dvs. der skal være en klar matematisk sammenhæng mellem de to strategier. Dette svarer til at give gruppen en ny problemstilling, som er en del af den overordnede.

I den afsluttende institutionalisering er det vigtigt, at de fleste (hvis ikke alle) strategier, som er blevet delt i klasserummet, tages op og relateres til hinanden. For eksempel kan en gruppe, der benytter formlen $A = \frac{1}{2}hb$ relateres med en anden gruppe, der har arbejdet med $A = \frac{1}{2}ab\sin(C)$ ved at argumentere for (og helst af en elev i gruppen) at $h = a \cdot \sin(C)$. Sådanne matematiske argumenter bør formuleres i detaljer og skrives ned af læreren før lektionens start som en del af forberedelsen på undervisningen. At betragte alle mulige forskellige strategier hjælper læreren med at navigere og forudse elevernes undersøgelsesproces.

Det er vigtigt at huske, at i en undervisningssituation interagerer man som lærer med et dynamisk system. Eleverne bør have mulighed for at tilpasse sig miljøet, så man kan ikke forvente, at de leverer de samme svar!

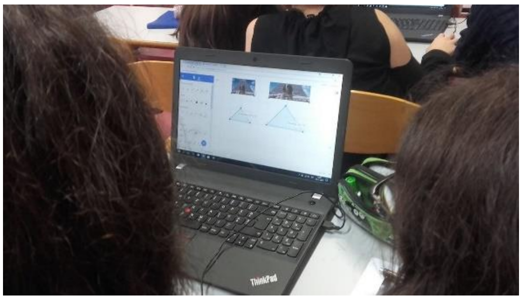
Nogle lærere laver et skema med elevernes mulige strategier til brug i den adidaktiske fase. De forventede strategier kan listes op på et stykke papir, og til hver strategi kan læreren formulere fx 3 spørgsmål, som kan være frugtbare at stille, når grupperne præsenterer en given strategi. Gennem den adidaktiske fase kan læreren bemærke, hvilke grupper, der diskuterer de forskellige typer strategier, og bruge dette til at organisere den efterfølgende didaktiske formulering.

Observationer fra klasserummet

Den vigtigste observation fra dette scenarie er, at nogle lærere har en tendens til at ville give eleverne ledetråde frem mod løsningen i alle scenariets faser. Dette ødelægger det adidaktiske potentiale i situationen og distraherer eleverne. Det blev også observeret, at nogle elever arbejdede med ideen om vækstraten (hvor mange procent vokser arealet, hvis en side vokser med 30%). Dette kan relateres til skalafaktoren $k = 1.30$. Ved den sidste formulerings- og valideringsfase kan man spørge eleverne, om de kan forbinde deres resultat med skalafaktoren. Grupperne der valgte strategien med Herons formel har her en mulighed for at få repeteret regneregler for potenser, rødder og parenteser.

Hvis læreren inviterer eleverne til at arbejde med CAS, må læreren forberede spørgsmål, der kan lede frem til matematiske argumenter fx på baggrund af algebraiske omskrivninger. Dette kan gøres ved at stille spørgsmål som *Hvad gør computeren, når den beregner arealet? Hvordan kan computeren finde de nødvendige informationer som sidelængder, når hjørnepunkterne er givet? Hvilken formel tænker du den benytter, og hvordan bestemmer den tallene ud fra de tal du får givet? Hvis computeren øger billedet 25%, hvad er det så, der bliver 25% større?*

Hvis læreren vælger at benytte andre billeder eller figurer, som nogle gør, skal det overvejes nøje, om ændringen ændrer problemstillingen. Hvis billedet tydeligt viser en tredje dimension, kan det forvirre nogle elever. Hvis hjørnepunkterne ikke kan ses, kan det være svært at bestemme sidelængden. Hvis der vælges mere komplekse figurer, kan det forvirre nogle elever og engagere andre. Derfor skal billederne vælges på baggrund af lærerens kendskab til klassen. Ikke-polygone figurer bør undgås i denne situation.



Elever undersøger målene i en trekant i GeoGebra (Slovenien).

Evalueringsværktøjer

Ved lektionens afslutning eller i den efterfølgende lektion kan følgende spørgsmål stilles som en hurtig test af den viden, som eleverne udviklede i arbejdet med scenariet:

1. Din ven siger, at for at kunne konstruere et kvadrat som er halvt så stort i areal i forhold til et givet kvadrat, skal du bare halvere sidelængden. Hvad tænker du?

   Svar: Forkert! Hvis du halverer sidelængden, så reduceres arealet til en fjerdedel af det oprindelige areal.
2. En trekant T har sidelængderne 3cm, 5cm og 7cm. Trekanten T^* har de samme vinkler men et areal, der er fire gange så stort, som arealet for T. Hvad er sidelængderne for T^*?

   Svar: For at få et 4-doblet areal, så skal sidelængderne fordobles, så T^* har sidelængderne 6cm, 10cm og 14cm.
3. En figur, som fx en trekant, er tegnet på et A4-papir. Trekanten forstørres ved at kopiere den på en kopimaskine fra A4 til A3 (dvs. arealet bliver fordoblet). Hvad sker der med figurens sidelængder?

   Svar: Da arealet fordobles, så ved vi, at arealfaktoren er $k^2 = 2$, hvor k er skalafaktoren. Derfor må sidelængderne være multipliceret med en faktor $k = \sqrt{2}$.

Forslag til yderligere problemstillinger vedrørende arealforhold

Redskaber: papir, blyant, lineal/målepind, vinkelmåler, lommeregner eller lignende.
Løsningerne skal indeholde grundige forklaringer på, hvordan resultaterne er opnået.

1. Papirformatet A5 er en reduktion af papirformatet A4 ved at folde A4-formatet langs midterlinjen. Den lange side på et A4-papir måler 297 mm.

   a) Hvad er længden på den korte side?

2. Guldblade sælges til en pris på 27,99$ for 100 ark af størrelsen 2,2”x2,0”. En kunstner vil forgylde bogstavet A på et reklameskilt, der måler 3,5 m x 8 m. Hun har fået besked på, at dette bliver for dyrt, men hvis hun reducerer reklameskiltets størrelse, så guldomkostningerne bliver 30% mindre, så kan hun få lov.

   a) Hvad skal størrelsen være på det reducerede reklameskilt?

3. På et bykort med skalaforholdet 1:7200 er en park estimeret til at have et areal på 12 cm^2.

   a) Giv et estimat på parkens areal i naturlig størrelse.

4. I året 1854 var diameteren på en 1-dollarguldmønt ændret fra 13 mm til 15 mm. Hvor mange % var arealet vokset?

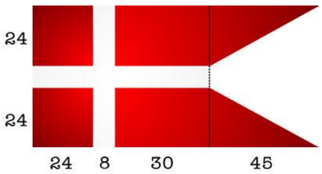
   a) Hvor mange % var tykkelsen aftaget?

5. Julepynten vist til højre er lavet ved at tegne en cirkel og indtegne en kegle. Til de små kegler bruges ca. 350 cm^2 karton.

   a) Giv et bud på, hvor meget karton der skal bruges til den store kegle.

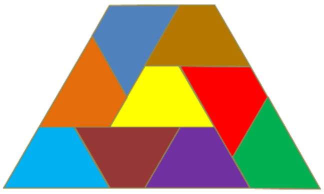
6. Regler for det danske splitflags dimensioner er vist på figuren til højre. Det anbefales, at bredden på flaget er 1/5 af højden på flagstangen. Derfor, hvis enheden er 1 cm, så er den anbefalede højde på flagstangen til flaget vist 280 cm.

   a) Hvad er arealet for et splitflag, hvor den anbefalede højde på flagstangen er 1120 cm?



7. En 4.-klasseselev lavede i forbindelse med emnet trekanter *trekantsmaleriet* vist til højre. Bredden af det viste billede er 5 cm. Arealet af den lille gule trekant i midten er på det originale billede 10 cm^2.

   a) Hvad er bredden på det originale *trekantsmaleri*?



8. Hvilke konklusioner om forstørrelse og skalering kan du uddrage af *figuren nedenfor*?

Begrundelser for og RME-perspektiver på scenariet

Relevans og anvendelighed

Vi betragter følgende tre perspektiver:

- *Virkeligheden*: viden i dette scenarie er knyttet til dagligdagserfaringer med forstørrelse af fotografier eller dokumenter. Eleverne skal være opmærksomme på de forskellige fortolkninger af vendingen *"to gange så stor som det originale fotografi"*. Eller hvis der bestilles det dobbelte af 1 m^3 sand resulterer det i en kube med målene: $?m \times ?m \times ?m$ med sand.
- *Arbejdslivet*: at være i stand til at ræsonnere omkring forøgelse og effekter ved skalering med en vis faktor er relevant på mange arbejdspladser som fx sundhedspleje (%-opløsninger) og arkitekter (modeller af huse i lille format).
- *Videre studier*: viden og færdigheder relateret til dette emne dukker op i mange naturvidenskabelige fag (fx i biologi med dyreknogleformer og i fysik med afkøling af objekter). En historisk/filosofisk bemærkning til humanistisk orienterede elever: fordobling af arealet optræder i Platons berømte dialog *Menon*.

Undersøgelsesfærdigheder

I scenariet om arealforhold erfarer elever vigtigheden af undersøgelsesfærdigheder som at kunne formulere hypoteser, generere eksempler, eksperimentere systematisk, organisere data, finde og argumentere for en formel, samarbejde og kommunikere. Hvorvidt disse færdigheder udtrykkeligt er adresseret, afhænger i vid udstrækning af, hvordan læreren involverer eleverne i den anden valideringsfase om metoderne, når grupperne bliver bedt om at præsentere. Desuden kan de indgå i den følgende formulerings- og institutionaliseringsfase. I disse tilfælde foreslås, at lærerne skriver dem et eller andet sted, så der under opfølgende lektioner kan vendes tilbage til dem.

Potentiale til et forløb

Arealscenariet kan være en del af et forløb om forstørrelser og relationen til ændringer af længder, arealer og volumen af forskellige geometriske former.

- *Forudsætninger*: Til sådan et forløb forventes eleverne at være fortrolige med formler til beregning af arealer og volumen af grundlæggende figurer som trekanter, rektangler, cirkler, kuber og cylindere. Endvidere skal de være bekendte med begrebet forstørrelsesfaktor og dens sammenhæng med forøgelsen af figurer med en vis faktor bevarer formen dvs. forholdet mellem længderne samt vinklerne (ligedannethed).
- *En introduktion*: En kontekst med en rig åben problemstilling overordnet for lektionen, der naturligt forbinder forstørrelser med ændringer i længder, arealer og volumen og rejser spørgsmålet, hvordan det hænger sammen.
  Muligheder:
  - Dyr – areal/volumen af en dinosaur
  - Miniverdener – nedskalering med en faktor – konsekvenser for materialer (fx LEGO-klodser)
  - Pakkeindustri – materialer og volumen og pakkeæsker
  - Babushka- dukker (fx undersøgelse af længder og vægt)
  - Analyse af (Barbie) dukker og proportionerne, hvis de forstørres.

RME-perspektiv

- *Horisontal matematisering*: det matematiske sprog introduceres til diskussion af situationen. Eleverne former en første uformel model af situationen og undersøger sammenhængene ved at generere eksempler og måle og herfra prøve at opdage, hvad der foregår og derpå udarbejder en præsentation af deres opdagelser.
  Læreren guider diskussionen om ligheder og forskelle mellem elevernes opdagelser for at nå frem til konklusionen, at forskellige dimensioner opfører sig forskelligt. Dette føder et behov for at undersøge en af disse dimensioner i detaljer. Som arealet.
- *Vertikal matematisering*: matematikken i problemstillingen kan udvikles yderligere. Modellen gøres mere abstrakt og generel.
  Introduktion af problemstillingen om arealforhold vha. scenariet. Dette scenarie introduceres i forbindelse med forstørrelsen af to billeder - en pyramide og en bygning. Denne sammenhæng (forstørrede billeder) fører naturligt til spørgsmål om ændringen af længder og arealer i billedet. Man kan dog risikere, at eleverne også involverer karakteristika for scenerne i billedet (fx hvad sker der med dimensionerne af en pyramide, når du forstørrer billedet?), og bliver distraheret af aspekter som konsekvenserne af perspektivet i billedet.
  Dette scenarie resulterer i en forståelse af arealer, der ændrer sig med faktoren k^2, når længderne er skaleret med en faktor k . Desuden kan undersøgelsesfærdigheder som at generere eksempler, organisere data, og finde og argumentere for en formel være i fokus i formulerings- og institutionaliseringsfasen.

Konklusioner, refleksioner og forslag til videre studier:

Eleven reflekterer, integrerer ideer, gør begreber og færdigheder eksplicit. Læreren fremhæver hovedindlæringspunkter.
En opfølgende lektion kunne være en videre undersøgelse af konklusionen fra scenariet om der gælder lignende for længde og volumen. Og ved afslutningen en form for generel forståelse, at skalering af længder med en faktor k resulterer i en skalering af objekter (fx arealer eller volumen) med dimension d (fx med $d = 2$ eller $d = 3$) med faktoren k^d.