

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Workshop onderzoekend wiskunde leren

datum

organisatoren



**Universiteit Utrecht**

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Programma



15:00 – 15:30	Introductie
15:30 – 16:00	Onderzoekend wiskunde leren
16:00 – 17:00	Theorie van didactische situaties, inclusief pauze
17:00 – 18:00	Scenarios en simulatie



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Introductie

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

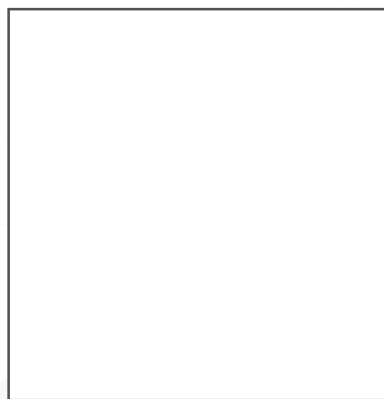
The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Voorbeeld onderzoekend leren



Vraag:

In hoeveel vierkanten kun je een vierkant opdelen?



Opdracht:

Los op. Bediscussieer met je burens welke onderzoeksvaardigheden hierbij komen kijken.



# Voorbeeld onderzoekend leren



## Vraag:

Als je een veelhoek vergroot met een factor  $k$  hoeveel groter wordt dan de oppervlakte?

Hulpmiddelen: Geogebra, polydron, pen, papier, ...

Voorkennis: oppervlakte formules voor driehoeken, vierhoeken, cirkels, etc.

## Opdracht:

Bediscussieer met je burens wat je denkt dat de strategieën van je leerlingen zouden zijn



Januari & Maanden

UTRECHTS  
STEDELIJK GYMNASIUM

Naam : \_\_\_\_\_ Cijfer : \_\_\_\_\_  
 Vak : 2  
 Datum : Zak = 51.5 Klas : \_\_\_\_\_

driehoek: ~~ken breedte~~ <sup>zijde</sup> ~~keer~~ bij behorende hoogte : 2

vierhoek: zijde  $\times$  bij behorende hoogte 2

veelhoek: ~~zijde  $\times$  bij behorende hoogte~~

Omdat:

$4k$ , omdat

UTRECHTS  
STEDELIJK GYMNASIUM

Naam : Sietse Cijfer : \_\_\_\_\_  
 Vak : \_\_\_\_\_  
 Datum : \_\_\_\_\_ Klas : 2E

hoe kan je de oppervlakte van een veelhoek berekenen

ik weet dat een veelhoek bestaat uit driehoeken

je berekent de oppervlakte van de 3-hoeken en telt die bij elkaar op

- Veelhoeken hebben hoeken
- Veelhoeken hebben meer dan 2-hoeken

driehoek:  
 $\frac{1}{2}$  zijde  $\cdot$  bijbehorende hoogte  $\cdot \frac{1}{2}$

---

$\frac{1}{2} \text{ cm}^2$     $2 \text{ cm}^2$     $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$     $4 \frac{1}{2} \text{ cm}^2$     $\frac{1}{2} \cdot k^2$     $k^2$  veldjes

driehoek  
 oppervlakte 3-hoek  $\cdot k^2$

$k =$  hoeveel je het vergroot



$2 \cdot b = 2b$   
 $3 \cdot b = 3b$   
 $4 \cdot b = 4b$   
 $5 \cdot b = 5b$   
 $6 \cdot b = 6b$

alle in cm

$opp. I = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 3b$   
 $= 3 \cdot b^2$   
 $= 3b^2 \text{ cm}^2$

$opp. II = \frac{1}{2} \cdot 4b \cdot 3b$   
 $= 6 \cdot b^2$   
 $= 6b^2 \text{ cm}^2$

$opp. III = \frac{1}{2} \cdot 4b \cdot 2b$   
 $= 4 \cdot b^2$   
 $= 4b^2 \text{ cm}^2$

$opp. IV = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$   
 $= 3 \text{ cm}^2$

$opp. V = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3$   
 $= 6 \text{ cm}^2$

$opp. VI = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2$   
 $= 4 \text{ cm}^2$

$3b^2 + 6b^2 + 4b^2 = 13b^2 \text{ cm}^2$

$opp. \cdot b = opp. \cdot b^2$

$3 + 6 + 4 = 13 \text{ cm}^2$

UTRECHTS  
 STEDELIJK GYMNASIUM

Naam : geert Cijfer:   
 Vak :   
 Datum :  Klas :

3 hoek :  $hoek + hoek + hoek = 180^\circ$

4 hoek : 4 hoeken

veelhoek : meer dan 1 hoek

$l \cdot B = opp$

$4 \times \text{hoek} ?$



# Het Meria-project



[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union





Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Introductie in IBMT

- Wat is het?
- Werkt het?
- Twee simpele voorbeelden
- Ervaringen van docenten

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

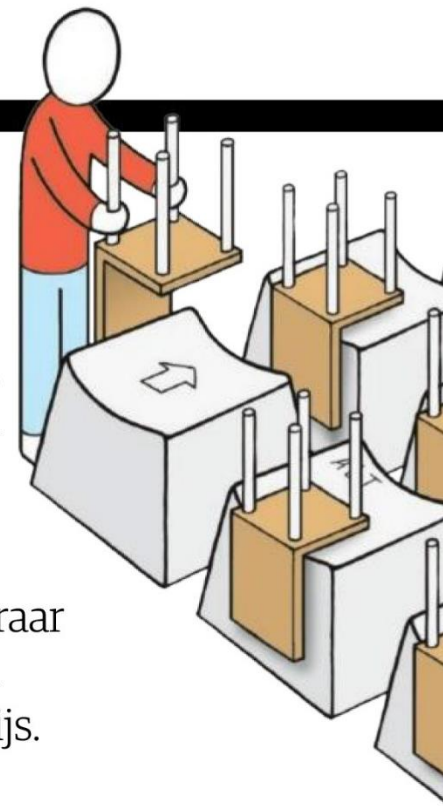
The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Onderzoekend wiskun

◀ JAPKE-D. VRAAGT DOOR

## 'Er is zóveel jargon in het onderwijs'

*Japke-d. Bouma* sprak met 'de leraar van het jaar 2017'. Hij ergert zich aan holle termen in het onderwijs.



ILLUSTRATIE TOMAS SCHATTS

**O**p school geef je les, de rest is bijzaak. Zou je denken. Toch hoor ik steeds meer scholen jargon gebruiken dat op het eerste gehoor weinig met lesgeven te maken heeft. Zoals 'integrale visie', leerlingen die 'in hun kracht gezet worden', 'multidisciplinaire zorgteams', 'verticale vakinstellingen' en 'intersectorale profielen'. Het *AD* interviewde me laatst als 'vaagtaalspecialist' en legde me een aantal van die termen voor - ik wist niet wat ik hoorde.

Ik zag op Twitter dat er ook al scholen zijn waar leerlingen 'staand vergaderen', *mindmappen*, 'agile werken' en hun doel-

len in mijn les. Ze zullen namelijk ook wel eens iets moeten aanhoren wat ze saai vinden. Als ik alle hulpmiddelen gebruik - dat heet tegenwoordig *tools* - die zijn ontwikkeld om leerlingen te activeren, zoals quizjes voor op de smartphone, interactieve apps voor het 'digiboard' of presentatieprogramma's als Prezi, dan is iedereen bekap op het eind van de dag."

**Op acht: 'opbrengstgericht' en 'ontwikkelingsgericht werken', 'vraaggestuurd onderwijs' en 'hersensactief leren'. Dat had ik vroeger niet hoor, in de klas.**

„Ach hou toch op. Ik krijg vooral jeuk van dat soort holle termen. Allemaal dingen die al lang gedaan worden. Want hoezo

me

# Onderzoekend leren (IBL): wat is het?



# Onderzoekend leren (IBL): wat is het?

- Gebruik van onderzoekscyclus; onderzoek in de klas.
  - Kennis – observatie – vraag – methode – conclusie – kennis
- Kernpunten:
  - Het onderwijs vindt plaats met een actieve rol voor leerlingen
  - Die rol hangt samen met fasen uit de onderzoekscyclus
  - Doelen:
    - Leerlingen leren beter, zijn gemotiveerder, meer eigenaar van de stof en ontwikkelen onderzoeksvaardigheden.
    - Docenten hebben beter zicht op hun capaciteiten.
  - Voorwaarden: lesmateriaal, werkvormen, klasklimaat, ...
- **Formelere definitie:** Inquiry based instruction is an intentional student-centered pedagogy that challenges the learner to explore concepts, ideas, and/or phenomena before formal explanations are provided by the teacher and/or other students (Marshall e.a., 2017).



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Introductie in IBMT - Werkt het?

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Onderzoek over leeropbrengst IBL



- Onderzoekend leren leidt (kan leiden) tot **beter begrip van bèta -inhoud** (Minner et al. 2010)
  - “Fifty-one percent of the 138 studies showed positive impacts of some level of inquiry science instruction on student content learning and retention (...) there was no statistically significant association between amount of inquiry and increased student science conceptual learning”
- Greater **improvements in students’ science literacy and research skills**, but **lower gain in self-confidence in scientific abilities** ... (Gormally et al. 2009)
  - “... maybe due to experiencing complexity and frustrations, and over-estimation of traditional taught students”
- Contrast: alleen gerichte instructie, uitgewerkte voorbeelden en herhaald oefenen hebben zich bewezen (Kirschner e.a., 2006)



# Onderzoek over leeropbrengst IBL



- Onderzoekend leren heeft een **positief effect op motivatie en houding** van de leerlingen, zonder negatief effect op resultaten (Bruder & Prescott, 2013)

## Type inquiry:

- Structured Inquiry: The teacher gives the students a problem or question to be solved as well as the appropriate method and materials to solve it
  - Guided Inquiry: The teacher provides the students with the problems or questions and the necessary materials. The students have to find the appropriate problem-solving strategies and methods
  - Open Inquiry: The students have to find problems or questions they would like to solve and answer
- **Guided inquiry in mathematics education appeared most effective**
    - opportunities for students to generate strategies and solutions
    - opportunities for students to discuss strategies/solutions together
    - opportunities for students to make decisions and justify their decisions



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Introductie in IBMT

## Twee simpele voorbeelden

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

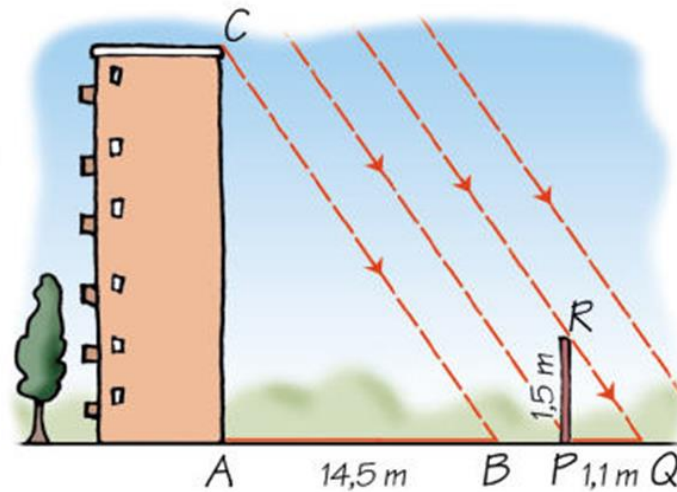
The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.



# Een standaard schoolboekopgave



- 37** Nienke wil de hoogte van een flatgebouw weten. Op een zonnige dag meet ze dat de schaduw  $AB$  gelijk is aan 14,5 meter. Een 1,5 meter lange stok heeft een schaduw van 1,1 meter. Zie figuur 2.34
- a Vul in.  $\triangle ABC \sim \triangle \dots$ , want ... en ...
  - b Maak de verhoudingstabel en vul de gegevens in.
  - c Bereken  $AC$  in meters. Rond af op één decimaal.



figuur 2.34

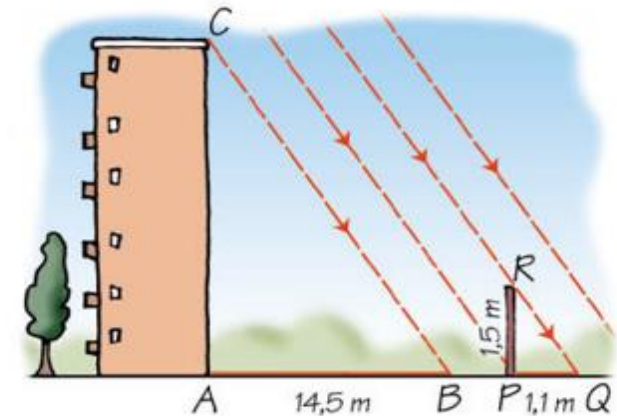


# Een standaard schoolboekopgave



- De opgave biedt:
  - de vraag,
  - precies voldoende informatie, en
  - een plan van aanpak
- De context wordt meestal niet serieus genomen
- Schoolkennis blijft schoolkennis

- 37** Nienke wil de hoogte van een flatgebouw weten. Op een zonnige dag meet ze dat de schaduw  $AB$  gelijk is aan 14,5 meter. Een 1,5 meter lange stok heeft een schaduw van 1,1 meter. Zie figuur 2.34
- Vul in.  $\triangle ABC \sim \triangle \dots$ , want ... en ...
  - Maak de verhoudingstabel en vul de gegevens in.
  - Bereken  $AC$  in meters. Rond af op één decimaal.



figuur 2.34



# Een voorbeeld: van standaardopgave naar inquiry



Een patiënt is ziek en de dosis van 1500 mg inge- uitscheiding, de rest bli

1. Hoeveel mg van dit
2. Vul de tabel verder

Dag
0
1
2
3

3. Laat zien dat je de h dag kunt berekenen *Nieuwe-hoeveelk*
4. Na hoeveel dagen m lichaam? Na hoevee
5. Wat is maximale ho zien hoe je aan dit a

Een voorlichter over het gebruik van medicijnen vertelt een verhaal met deze hoofdpunten:

- Van sommige medicijnen verdwijnt per dag 25% door de uitscheiding.
- Een bepaald medicijn is pas effectief als een aangegeven peil is bereikt. Daarom duurt het even voor de dagelijks ingenomen medicijnen echt werkzaam zijn.
- Sla geen dag over.
- Het kan zeer onverstandig zijn een overgeslagen dag de volgende dag te compenseren met een dubbele dosis

N.B. De gegevens van dit verhaal zijn vereenvoudigd.

## Onderzoek

- Maak enkele berekeningen voor het normale verloop van het 'peil'. Maak zelf benodigde aannamen en geef conclusies. Ga bijvoorbeeld eerst uit van een dagelijkse dosis van 1500 mg of 3 keer 500 mg.
- Zijn de gevolgen van overslaan werkelijk erg groot? Maakt het verschil wanneer dat overslaan plaatsvindt?
- Bekijk de consequenties van de genoemde compensatie met een dubbele dosis.
- Kan elk peil bereikt worden? Verklaar het antwoord.

## Product

Schrijf een folder voor de patiënten waarin de antwoorden op bovenstaande vragen zijn verwerkt. Neem daarin in ieder geval een grafiek op met het verloop van de medicijnspiegel.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Introductie in IBMT Ervaringen

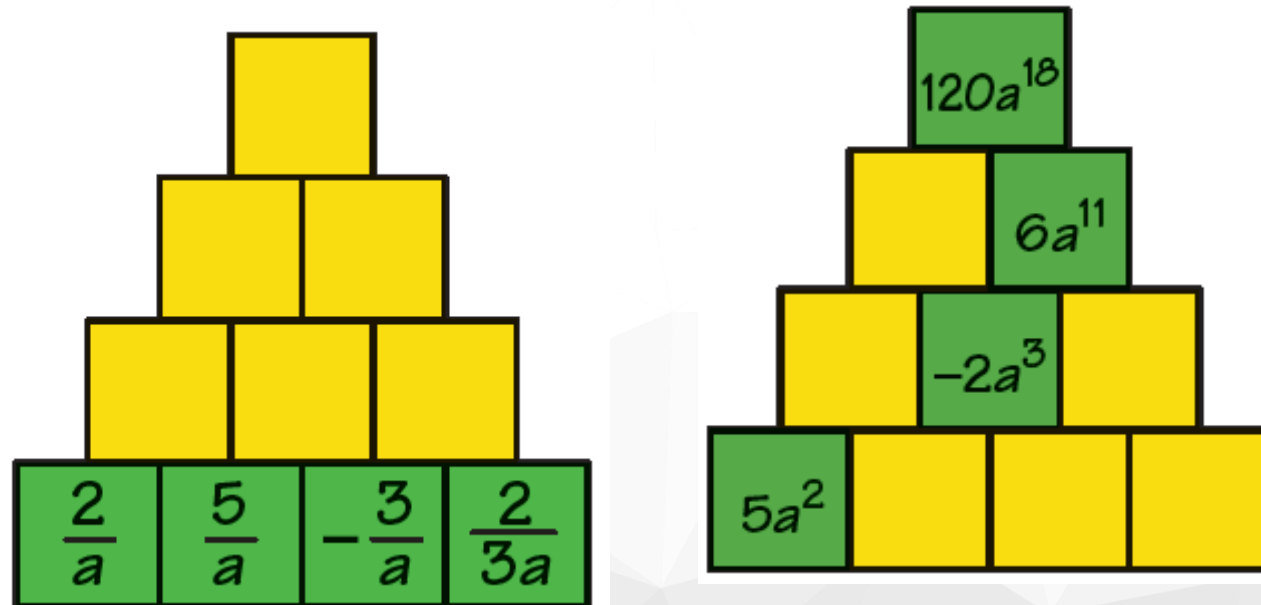
[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Ervaringen



- “Geeft leerlingen vertrouwen in hun kunnen en maakt ze eigenaar van de stof”



# Ervaringen

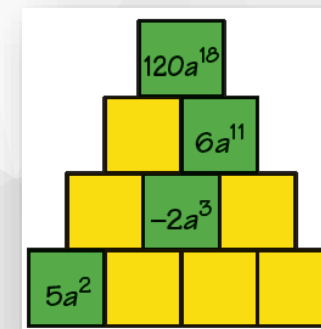
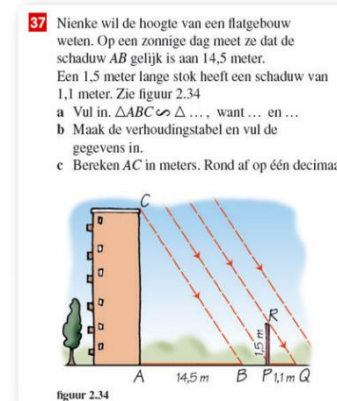
- Anders dan 'normale' lessen

Leerlingen verantwoordelijk voor en eigenaar van vraag, aanpak en/of product

- Expliciete aandacht voor onderzoeken (en onderzoekende houding)

- Leraar ziet beter wat ze zelfstandig kunnen en is verantwoordelijk voor structuur in de les, de klassengesprekken ('vragen stellen') en de feedback

- Uitdagingen: tijd bewaken, iedereen leert, het lesmateriaal

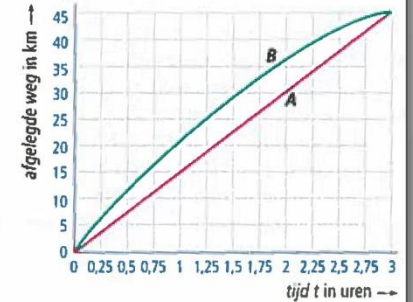


# Onderzoekend leren

## 4-3 Hellingen benaderen

Wil je de snelheid op een bepaald tijdstip weten, dan geeft de gemiddelde snelheid over een interval niet altijd de juiste informatie. Hoe kun je de snelheid op een bepaald tijdstip benaderen?

- 12 Twee fietsers hebben hetzelfde traject van 45 kilometer afgelegd. In de grafiek hiernaast kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier gedaan hebben.
- a Bereken voor beide fietsers de gemiddelde snelheid over het gehele traject.
  - b Beschrijf voor beide fietsers hoe ze hun fietstocht hebben opgebouwd.
  - c Er is een tijdstip waarop beide fietsers dezelfde snelheid hebben.  
Leg uit hoe je dit tijdstip in de grafieken kunt zien. Geef een schatting van dit tijdstip.



- 13 De grafieken bij opdracht 12 zijn die van  $A(t) = 15t$  en  $B(t) = -3t^2 + 24t$
- a Bereken de gemiddelde snelheid voor beide fietsers over de intervallen  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[1, 1,5]$  en  $[1, 1,2]$ .
  - b Leg uit waarom je de antwoorden bij opdracht a voor fietser A had kunnen voorspellen.
  - c Welke van de antwoorden bij opdracht a geeft voor fietser B de beste benadering van de snelheid op  $t = 1$ ?
  - d Geef een betere benadering van deze snelheid.

THEORIE

Gemiddelde veranderingen  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bereken je over een interval.

De mate van verandering, of de **snelheid**, op een bepaald moment kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, hoe beter die benadering is.

- 14 De bestuurder van een auto rijdt op een verkeerslicht af en remt. Daarbij geldt:  $s(t) = -1,5t^2 + 30t$   
Hierin is  $s$  de afgelegde afstand in meters vanaf het moment van remmen en  $t$  de tijd in seconden.
- a Bereken de snelheid van de auto op het moment van remmen.
  - b Bereken de snelheid van de auto op  $t = 5$  en  $t = 10$ .
  - c Op het moment van remmen bevond de auto zich op 155 meter vóór het verkeerslicht. Op hoeveel meter vóór het verkeerslicht komt de auto tot stilstand?

### Voorbeeld

Een pijl wordt vanaf een toren recht omhoog geschoten. De hoogte  $h$  in meters na  $t$  seconden kun je berekenen met  $h(t) = 10 + 30t - 5t^2$   
Hoe groot is de snelheid na 2 seconden?

### Oplossing

Kies een voldoende klein interval bij  $t = 2$ , bijvoorbeeld  $[2, 2,001]$  en bereken het differentiequotient:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2,001) - h(2)}{2,001 - 2} = \frac{50,009\,995 - 50}{0,001} = \frac{0,009\,995}{0,001} = 9,995$$

De snelheid na 2 seconden is vermoedelijk 10 m/s.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

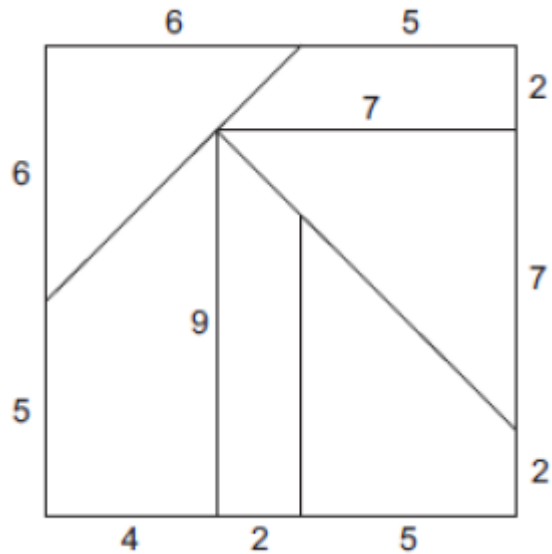
# Theorie van didactische situaties

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

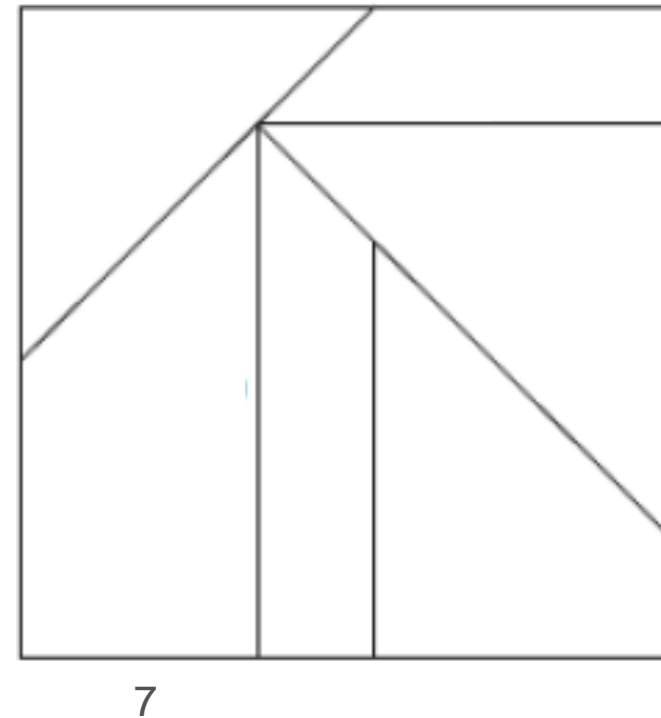
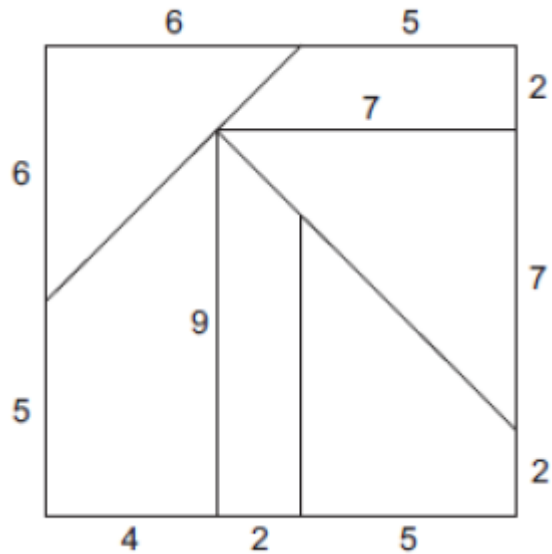
The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.



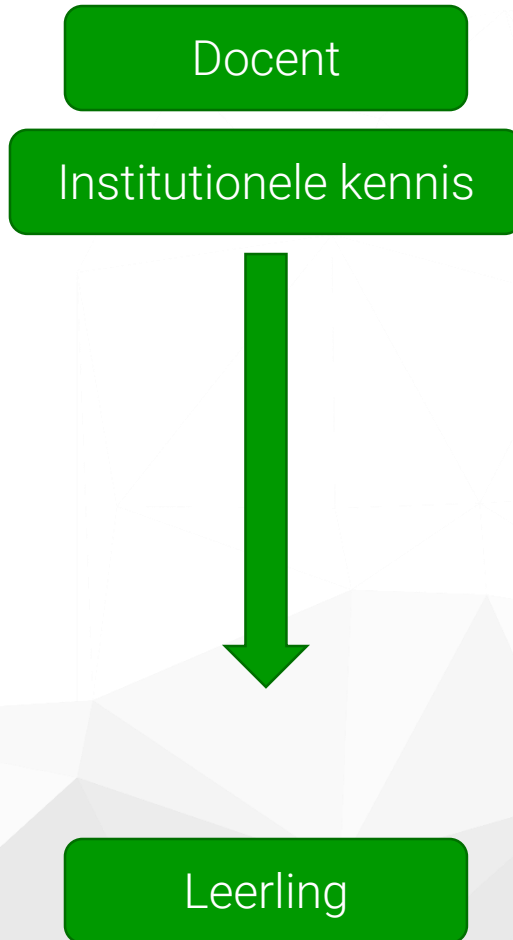
# Theorie van didactische situaties



# Theorie van didactische situaties

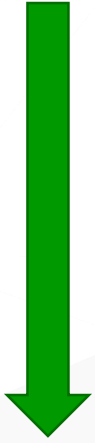


# Traditioneel onderwijs



# Traditioneel onderwijs

Docent

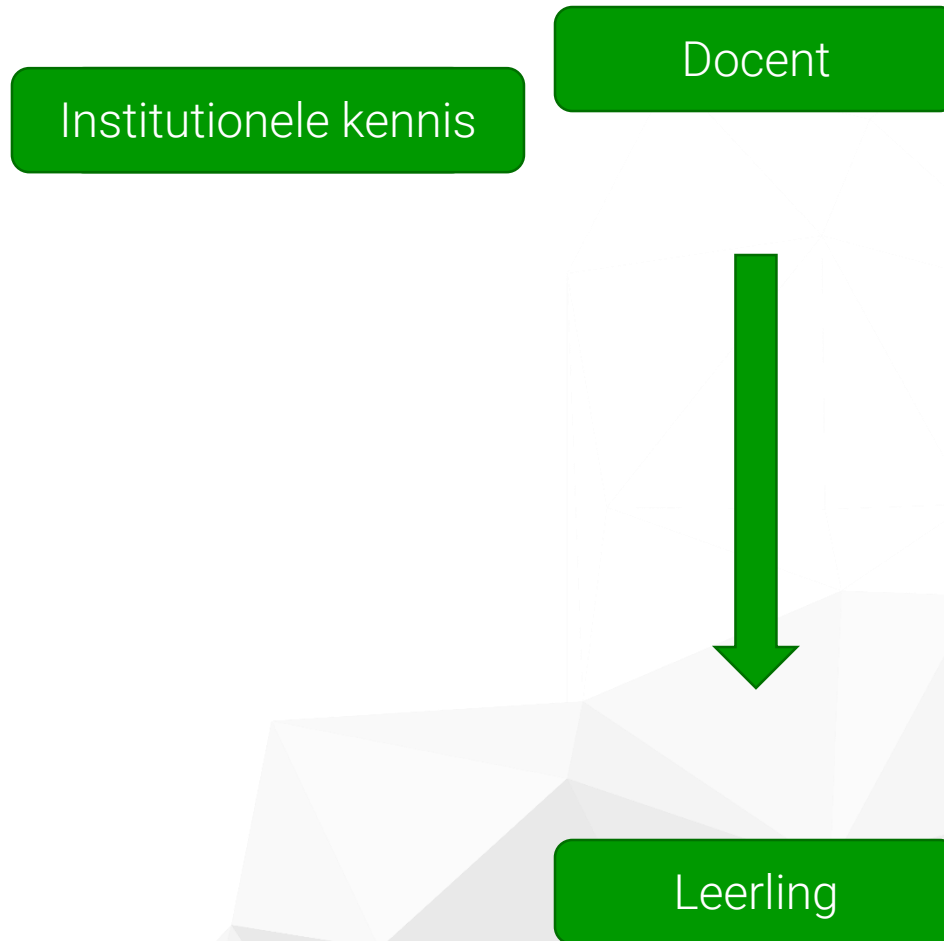


Institutionele kennis

Leerling



# Theorie van didactische situaties



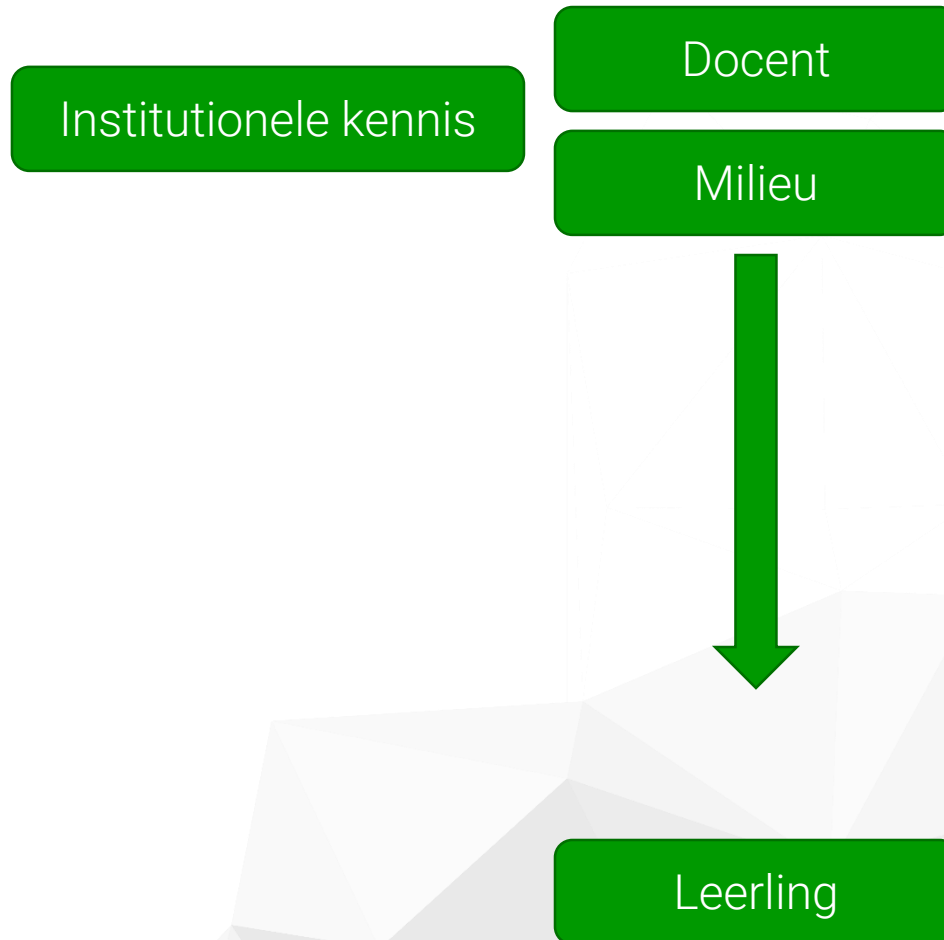
[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

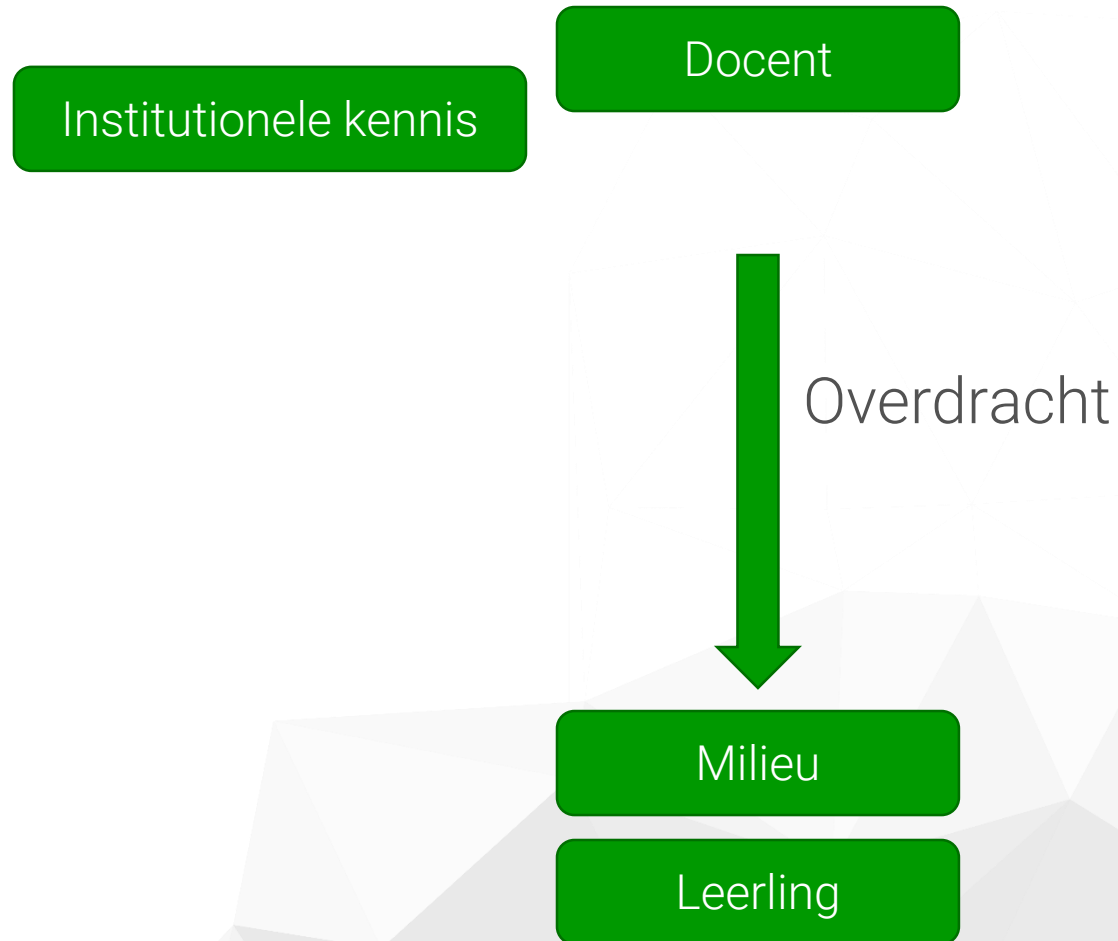
Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



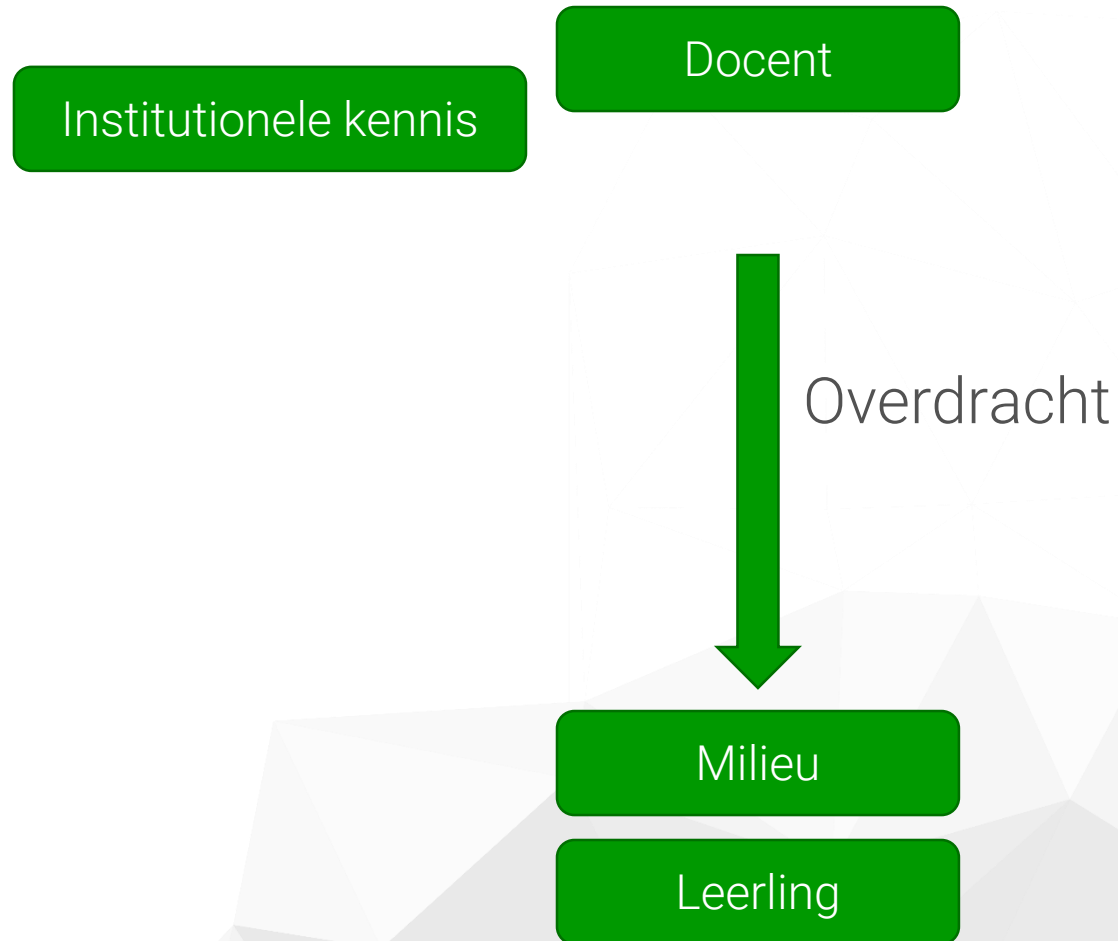
# Theorie van didactische situaties



# Theorie van didactische situaties

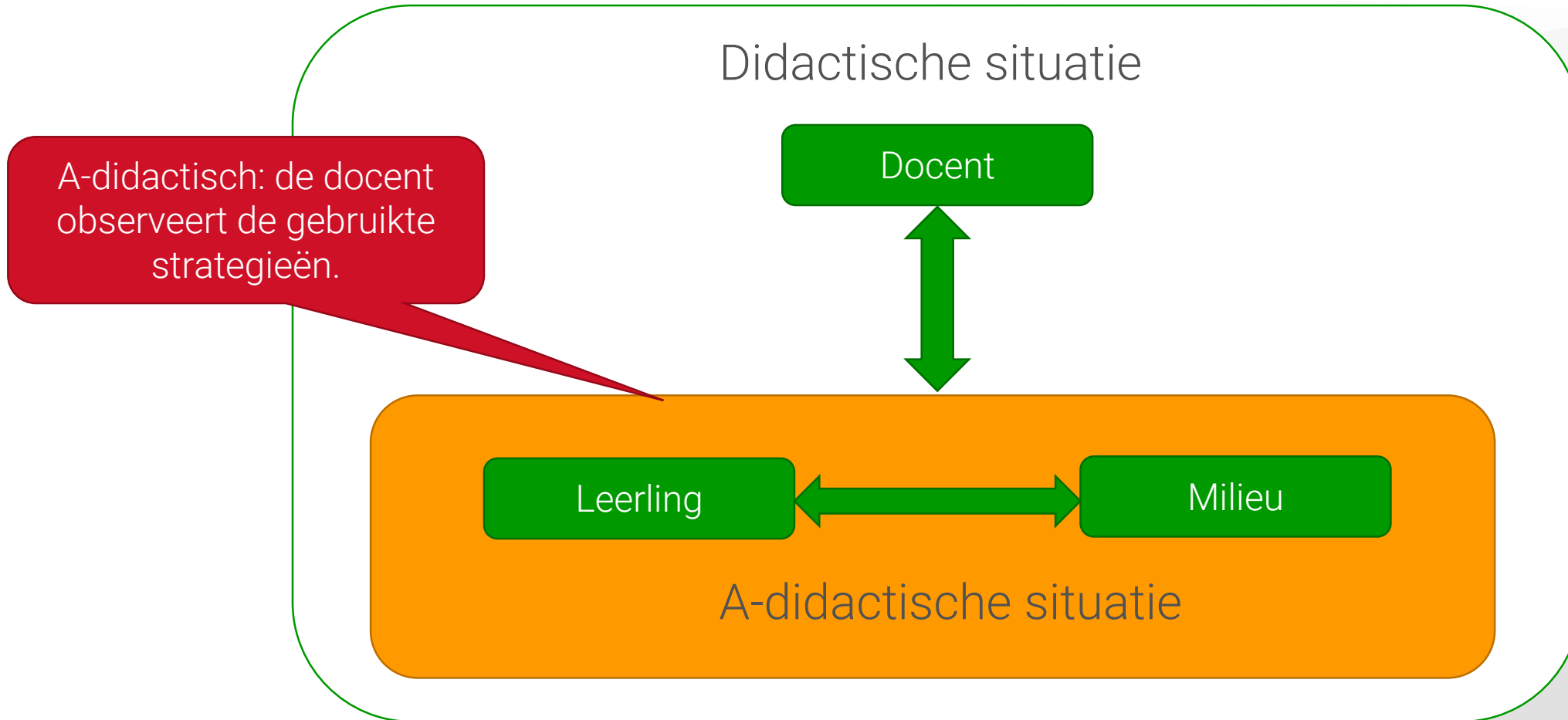


# Theorie van didactische situaties

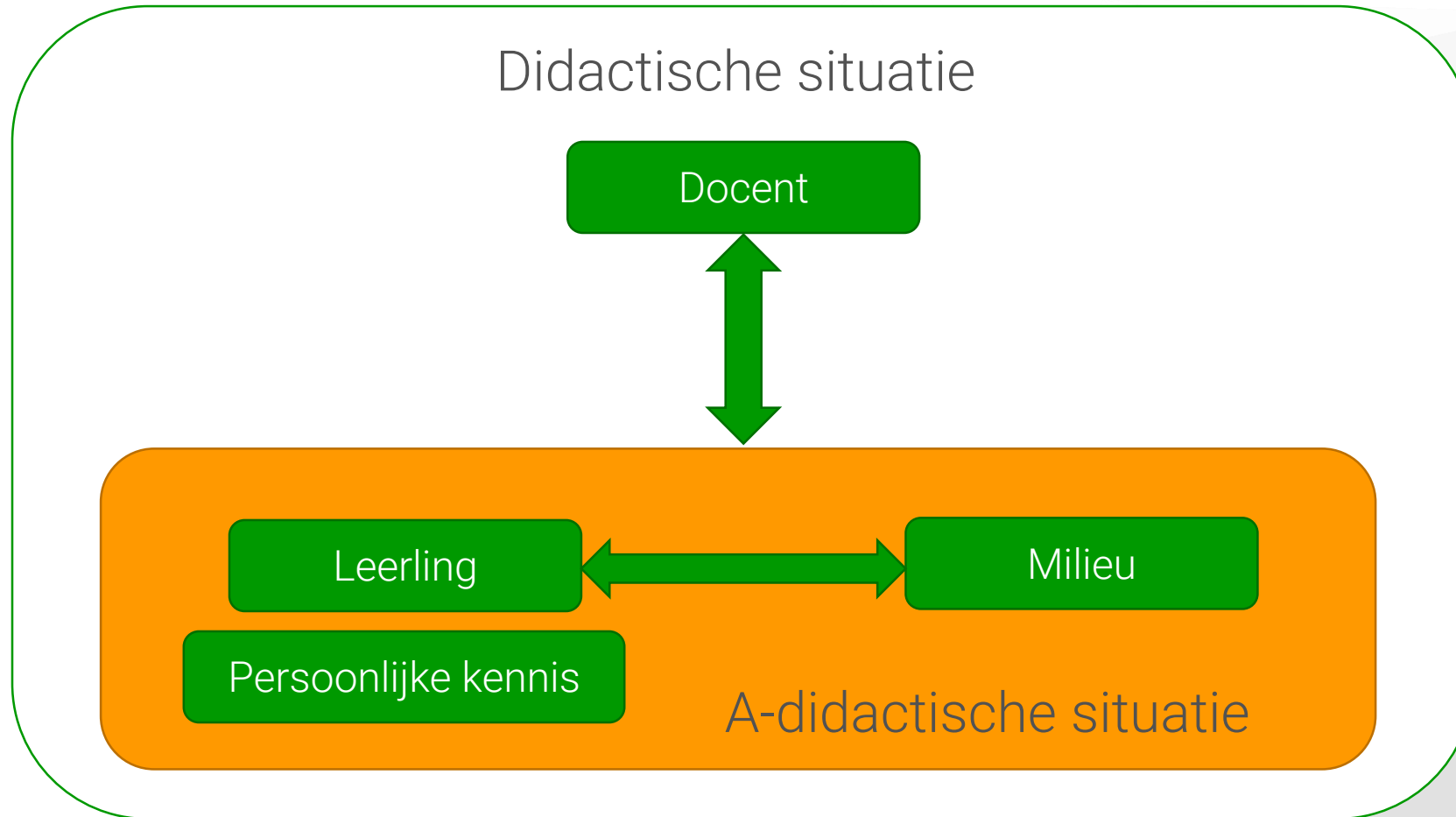




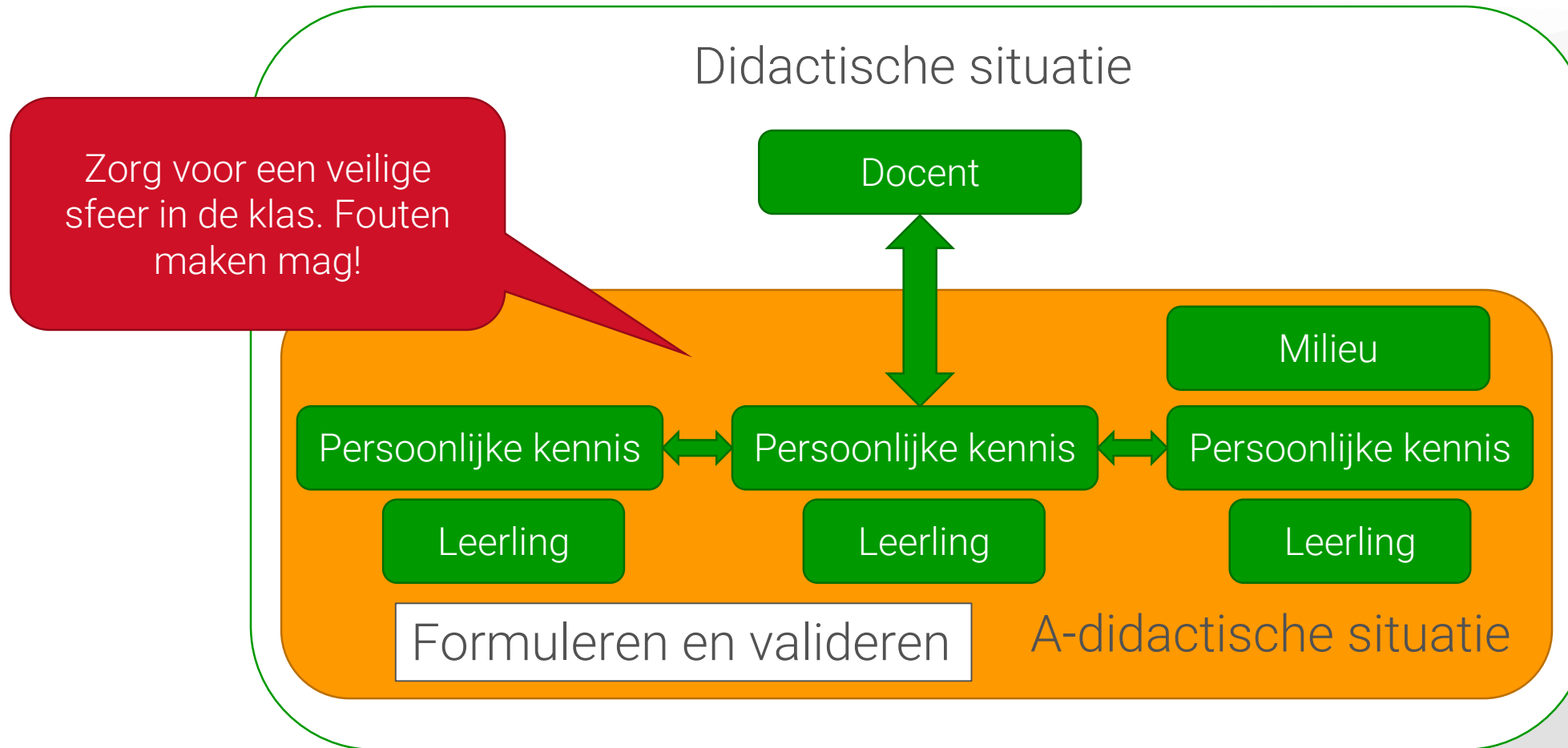
# Theorie van didactische situaties



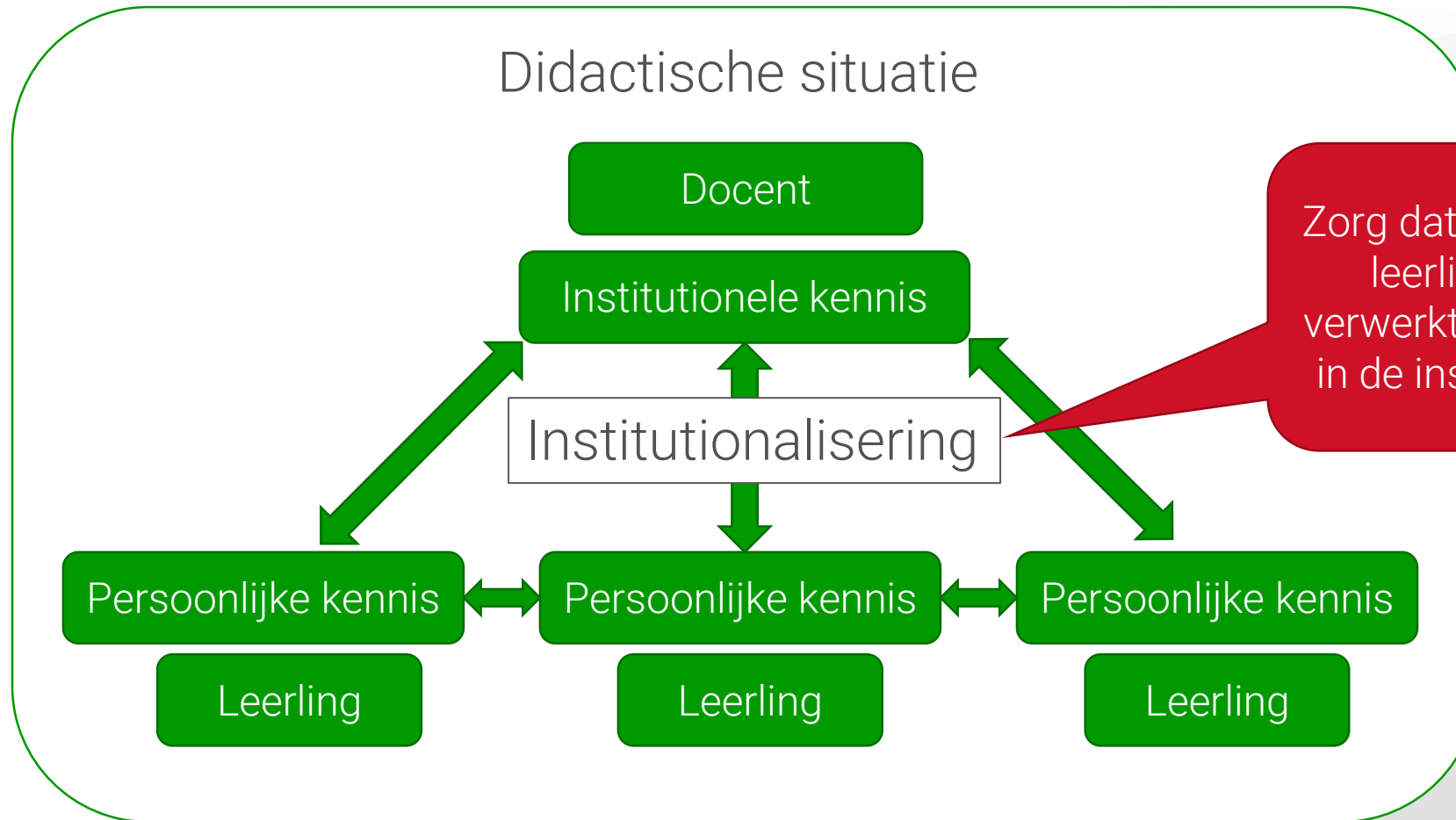
# Theorie van didactisch situaties



# Theorie van didactische situaties



# Theorie van didactische situaties



Zorg dat de ideeën van de leerlingen duidelijk verwerkt zijn en aanwezig in de institutionalisering!



# Fasen van TDS

	Rol van de docent	Rol van de leerlingen	Milieu	Situatie
Overdracht	Introduceert, deelt het milieu uit	Ontvangen, proberen het probleem aan te pakken	Wordt vastgesteld	Didactisch
Actie	Observeert en reflecteert	Doen en reflecteren	Probleem wordt verkend	A-didactisch
Formulering	Organiseert, start met vragen indien nodig	Formuleren zo specifiek mogelijk	Open discussie	A-didactisch of didactisch
Validatie	Luistert en evalueert indien nodig	Bespreken, proberen elkaars argumenten te volgen	Begeleide discussie	Vaak didactisch
Institutionalisering	Presenteert en legt uit	Luisteren en reflecteren	Institutionele kennis	Didactisch



# Meria scenarios

Bespreking *Oppervlakte* scenario.

Mogelijke strategieën opschrijven tijdens actie-fase. We vullen hiermee de lijst in het scenario aan.

-> anticiperen op institutionaliseren

Mathematics Education -  
Relevant, Interesting and Applicable

## 1. Template for MERIA scenario

Target knowledge	A precise mathematical formulation of the goal.		
Broader goals	Broader achievements such as competences, possible applications, reasoning etc.		
Prerequisite mathematical knowledge	Precise formulation of what mathematical knowledge, skills and competences the students are expected to possess (before engaging with this situation).		
Grade	Grade number and age of students.		
Time	Estimated time and number of lessons. (45-60 minutes entities).		
Required material	All sorts of needed artefacts.		
<b>Problem:</b> The exact formulation of the main problem, which the teacher devolves to the students (possibly after some preparatory activity).			
	<b>Teacher's actions incl. instructions</b>	<b>Students' actions and reactions</b>	<b>Observations from implementation</b>
Devolution (didactical) Time estimate			
Action (adidactical) Time estimate			
Formulation (didactical/adidactical) Time estimate			
Validation (didactical/adidactical) Time estimate			
Institutionalisation (didactical) Time estimate			
Possible ways for students to realize target knowledge	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Be mathematically explicit about the strategies that students might follow. Remember to emphasize when a strategy can split into a scenario with ICT or without ICT using only pen and paper, as well as if the strategy requires to look at special cases.</li> </ul>		
Further study	<ul style="list-style-type: none"> <li>- What are possible applications / generalization of the notion or the concept studied?</li> </ul>		
List of additional materials	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Students' productions (snapshots of boards, reports, assignments, posters etc.)</li> <li>- Formulations of students' assignments, reports or other productions required from students based on the lesson</li> <li>- Table for recording students' strategies</li> <li>- Video</li> </ul>		

*Note: the phases of devolution and institutionalization can be repeated, but should not be repeated too often in one situation.*



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Testscenario's

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Testscenarios

- Lessimulatie
- Testen en rapportage
- Bespreking andere scenario's
- Verdeling





# Lessimulatie scenario *Tobogan*

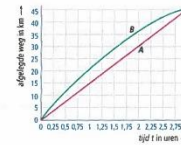


- Versnelde lessimulatie 90 minuten -> 20 - 30 minuten
- **Stel je voor dat je een leerling bent** die nog niet weet wat *helling* is en hoe je de helling van de grafiek in een punt uitrekent -> wat voor strategieën zou zo'n leerling toepassen.

Hoofdstuk 4

### 4-3 Hellingen benaderen

Vil je de snelheid op een bepaald tijdstip weten, dan geeft de gemiddelde snelheid over een interval niet altijd de juiste informatie. Hoe kun je de snelheid op een bepaald tijdstip benaderen?



12 Twee fietsers hebben hetzelfde traject van 45 kilometer afgelegd. In de grafiek hiernaast kun je zien dat ze dat niet op dezelfde manier gedaan hebben.

- Bereken voor beide fietsers de gemiddelde snelheid over het gehele traject.
- Beschrijf voor beide fietsers hoe ze hun fietstocht hebben opgebouwd.
- Er is een tijdstip waarop beide fietsers dezelfde snelheid hebben. Leg uit hoe je dit tijdstip in de grafieken kunt zien. Geef een schatting van dit tijdstip.

13 De grafieken bij opdracht 12 zijn die van  $A(t) = 15t$  en  $B(t) = -3t^2 + 24t$

- Bereken de gemiddelde snelheid voor beide fietsers over de intervallen  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[1, 1,5]$  en  $[1, 1,2]$ .
- Leg uit waarom je de antwoorden bij opdracht a voor fietser A had kunnen voorspellen.
- Welke van de antwoorden bij opdracht a geeft voor fietser B de beste benadering van de snelheid op  $t = 1$ ?
- Geef een betere benadering van deze snelheid.

**Voorbeeld**

Gemiddelde veranderingen  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  bereken je over een interval. De mate van verandering, of de **snelheid**, op een bepaald moment kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen. Hoe kleiner het interval, hoe beter die benadering is.

**Oplusing**

Kies een voldoende klein interval bij  $t = 2$ , bijvoorbeeld  $[2, 2,001]$  en bereken het differentiequotient:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2,001) - h(2)}{2,001 - 2} = \frac{50,009\,995 - 50}{0,001} = 9,995$$

De snelheid na 2 seconden is vermoedelijk 10 m/s.

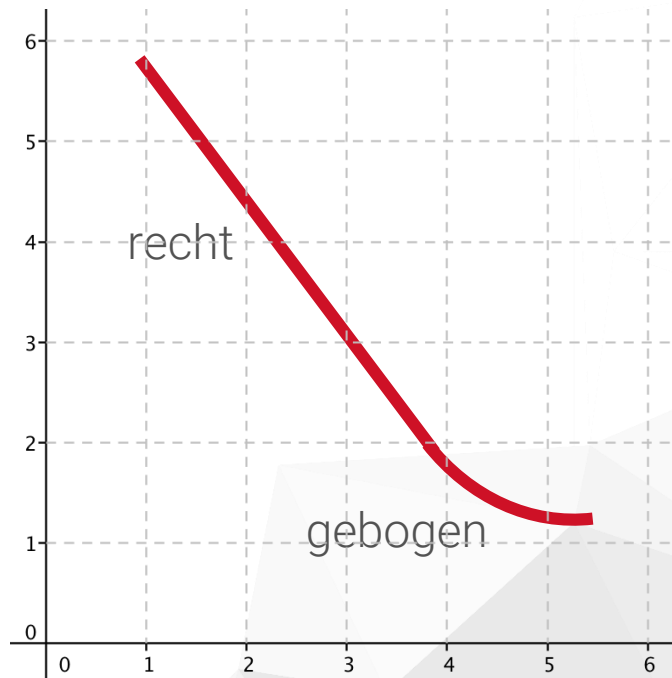


# *Tobogan*

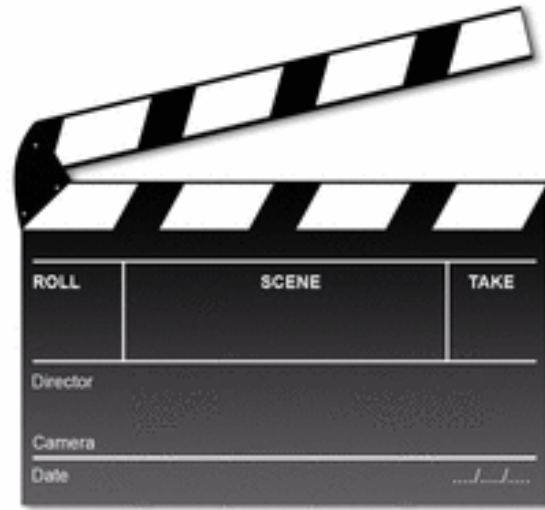


# Overdracht: Tobogan

Ontwerp een glijbaan/schans met een recht stuk verbonden met tenminste één gebogen stuk



# Actie!



[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



# Formulering



Formuleer per groepje je resultaat en strategie en schrijf op



# Validering



Als docent kies je enkele groepjes met verschillende strategieën om hun oplossing te delen

Hoe weten we of deze oplossing goed is?

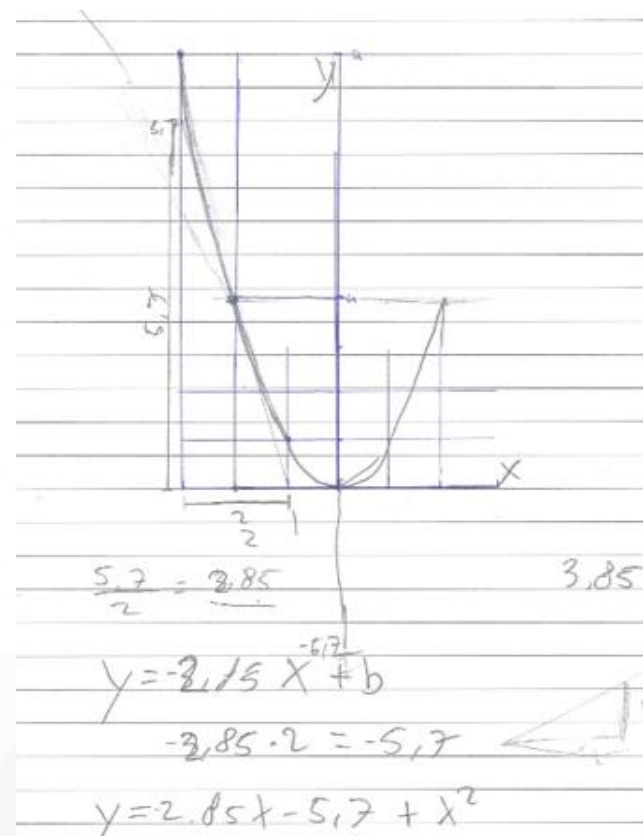
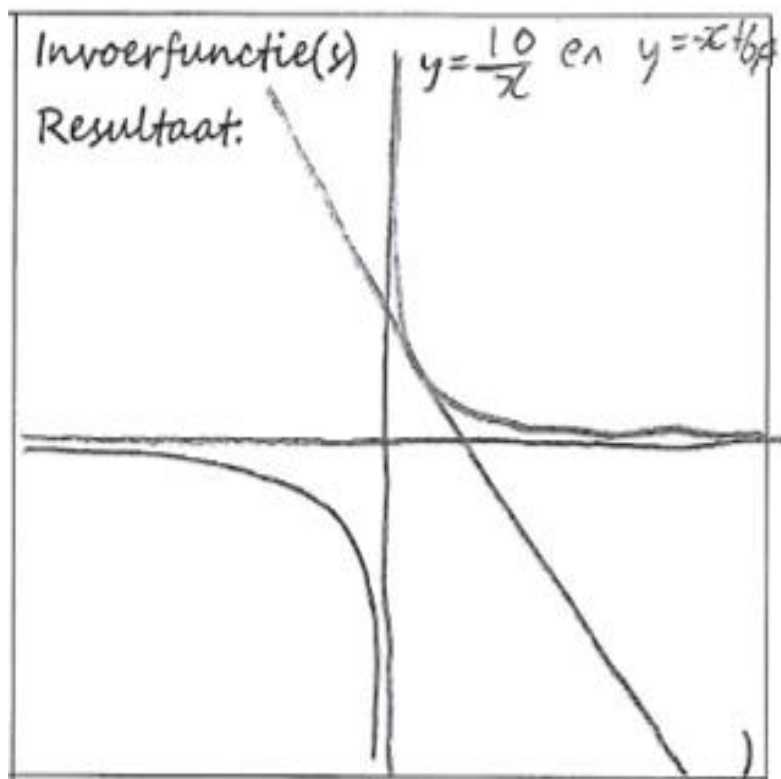
Is er een beste oplossing?



# Institutionalisering

Wat kan de docent institutionaliseren op basis van de inzichten van de leerlingen?









<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>1,5^x, [-10, 10]</math> <b>Resultaat:</b></p> <p>Er zit nog geen recht stuk in.</p>	<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>0,6x^2, [-1000, 0]</math> <b>Resultaat:</b> <math>0, [0, 100]</math></p> <p>aan het einde gaat de grafiek nog niet omhoog</p>
<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>0,3x^2, [-2, 3]</math> <b>Resultaat:</b> <math>-3x - 4,8, [-10, -2]</math></p>	<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>x^2, [-2, 2]</math> <b>Resultaat:</b> <math>-4 - 6x</math></p>
<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>x^2, [-2, 2]</math> <b>Resultaat:</b> <math>-8 - 6x</math></p>	<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>x^2, [-2, 2]</math> <b>Resultaat:</b> <math>-8 - 6x, [-8, -2]</math></p>
<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <math>0,5x^2, [-2, 2]</math> <b>Resultaat:</b> <math>-2, -2x, [-8, -2]</math></p>	<p><b>Invoerfunctie(s)</b> <b>Resultaat:</b></p>



# Docentervaring: Lesverloop



Allemaal aan het werk

Goed om na 5 minuten te inventariseren of alle groepen de opdracht snappen/ervaringen uitwisselen, zodat ook de zwakkere groepen mee kunnen

Twee oplossingsmanieren: helling benaderen met raaklijn of uitproberen.

Trots op het gevonden resultaat

Moeilijk om je mond te houden, maar wel belangrijk. Leerlingen focussen anders toch op wat jij zegt en dan is het overleg onderling doorbroken.



# Docentervaring leeropbrengst



*Wat hebben leerlingen geleerd van de les?*

Onderzoeksvaardigheden: uitproberen kan lonen!

Wiskundig: het begrip helling en helling in een punt werd betekenisvol

*Leverde de les resultaten op die later bruikbaar waren?*

De leerlingen waren zich er van bewust dat bij een kromme de helling in elk punt anders is.



# Docentervaring: Evaluatie



*Was het scenario werkbaar?*

Zeker

*Tops:*

na 5 minuten even de boel gezamenlijk op een rij zetten. Geen enkele groep blijft achter.

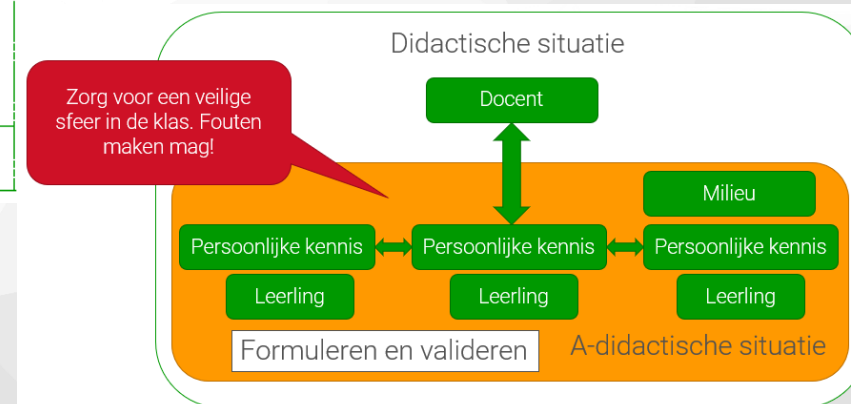
*Tips:* Ik moest na de eerste ontdekkingsronde wel ‘verklappen’ dat het om het aansluiten van twee grafieken ging. Ze hadden werkelijk prachtige grafieken gevonden die zo’n beetje de glijbaan vormden. Maar dat zou het doel van de opdracht teniet doen.



# Vragen/opmerkingen tot zover?



	Rol van de docent	Rol van de leerlingen	Milieu	Situatie
Overdracht	Introduceert, deelt het milieu uit	Ontvangen, proberen het probleem aan te pakken	Wordt vastgesteld	Didactisch
Actie	Observeert en reflecteert	Doen en reflecteren	Probleem wordt verkend	A-didactisch
Formulering	Organiseert, start met vragen indien nodig	Formuleren zo specifiek mogelijk	Open discussie	A-didactisch of didactisch
Validatie	Luistert en evalueert indien nodig	Bespreken, proberen elkaars argumenten te volgen	Begeleide discussie	Vaak didactisch
Institutionalisering	Presenteert en legt uit	Luisteren en reflecteren	Institutionele kennis	Didactisch



# Scenario's bekijken



## “Oud”

- Vergrotingsfactor (klas 2, 3)
- Lineair programmeren, lineaire functies met voorschrift op verschillende domein (klas 3, 4, 5): **bicycle factory-scenario**
- Exponentiële groei, logaritme (klas 4): **rumour spreading-scenario**
- Afgeleide (helling) (klas 4): **slide-scenario**
- Kwadratisch verband (modelleren) (klas 3, 4): **breaking distance scenario**

## “Nieuw”

- Distributieve wet (klas 2, 3, 4): **ab-ba-scenario**
- Conflict lijnen (klas 3, 4, 5): **conflict lines-scenario's**
- Oneindigheid, (meetkundige) rijen (klas 5): **geometric series-scenario's**
- Gonio hoekverdubbelingsidentiteiten (klas 5, 6): **trigonometric-scenario**
- Statistiek (klas 3, 4, 5): **job advertisement-scenario**



# Experimenteren en rapporteren



- Plannen van het eigen experiment
- Rapportage (uploaden op Dropbox):
  - Aantekeningen leerlingstrategieën (gemaakt tijdens actie-fase)
  - Foto's van leerlingwerk
  - Korte beschrijving van institutionaliseringsfase
  - Eventueel: feedback over het verloop van de les
- Scenario uitproberen zoals beschreven (geen grote afwijkingen)



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

**Einde!**

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Workshop onderzoekend wiskunde leren

Datum

Namen Instructeurs



**Universiteit Utrecht**

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Programma



15:00 – 15:20	Terugblik eerste bijeenkomst
15:20 – 16:30	Presentaties en bespreking van ervaringen
16:30 – 16:45	Pauze
16:45 – 17:15	Het selecteren en ontwerpen van IBMT-taken (RWO)
17:15 – 18:00	Vervolg nieuwe ideeën volgende stappen in het project volgende stappen bij jou op school? betrokken blijven bij het project?



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Terugblik

IBMT en TDS

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Onderzoekend leren (IBL) is .....

- De onderzoekscyclus
  - Kennis – observatie – vraag – methode – conclusie – kennis
- Onderzoekend leren
  - Het onderwijs vindt plaats met een actieve rol voor leerlingen
  - Die rol hangt samen met fasen uit de onderzoekscyclus
  - Doelen:
    - Leerlingen leren beter, zijn gemotiveerder, meer eigenaar van de stof en ontwikkelen onderzoeksvaardigheden.
    - Docenten hebben beter zicht op hun capaciteiten.
  - Voorwaarden: lesmateriaal, werkvormen, klasklimaat, ...
- Inquiry based instruction is an intentional student-centered pedagogy that challenges the learner to explore concepts, ideas, and/or phenomena before formal explanations are provided by the teacher and/or other students (Marshall e.a., 2017).

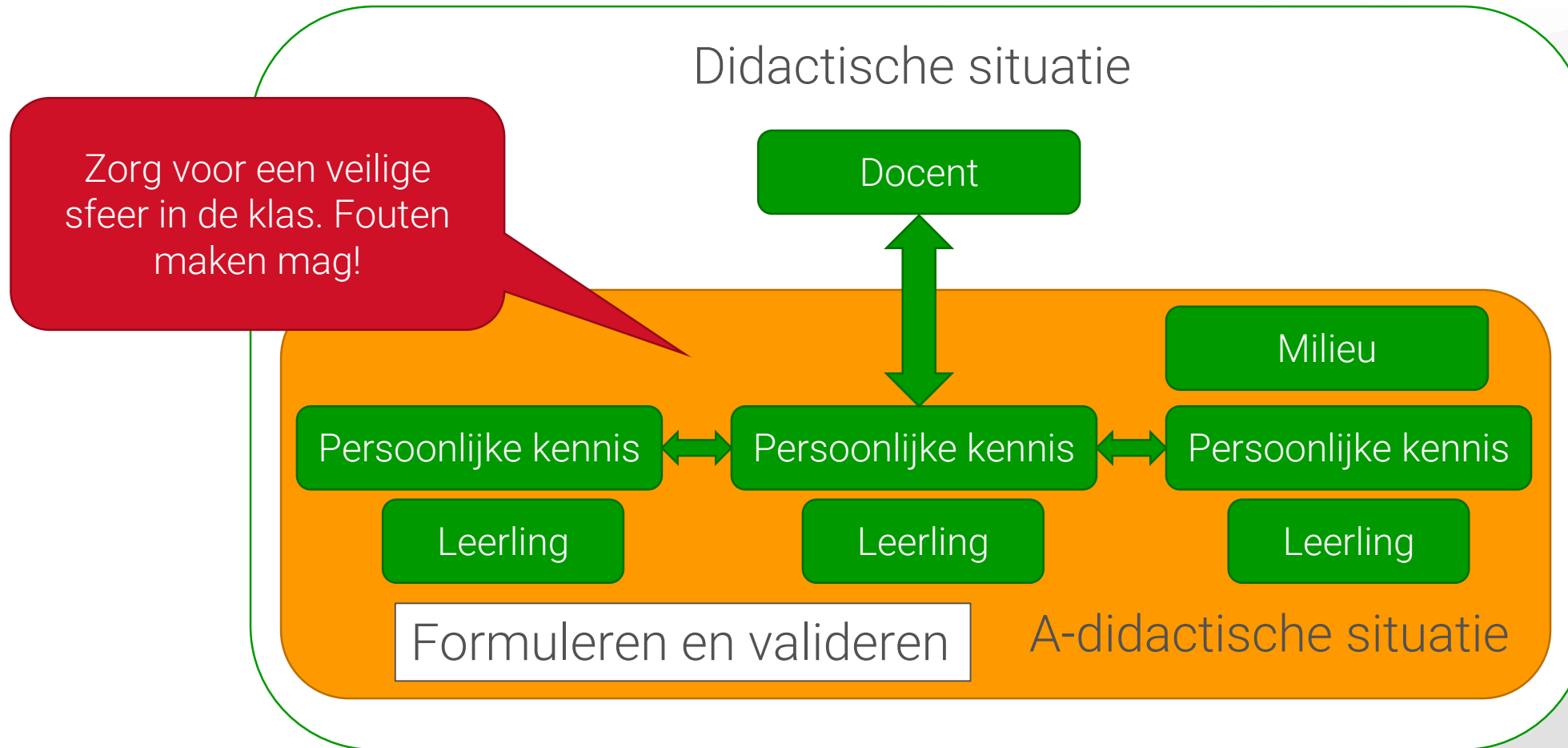


# Fasen van TDS

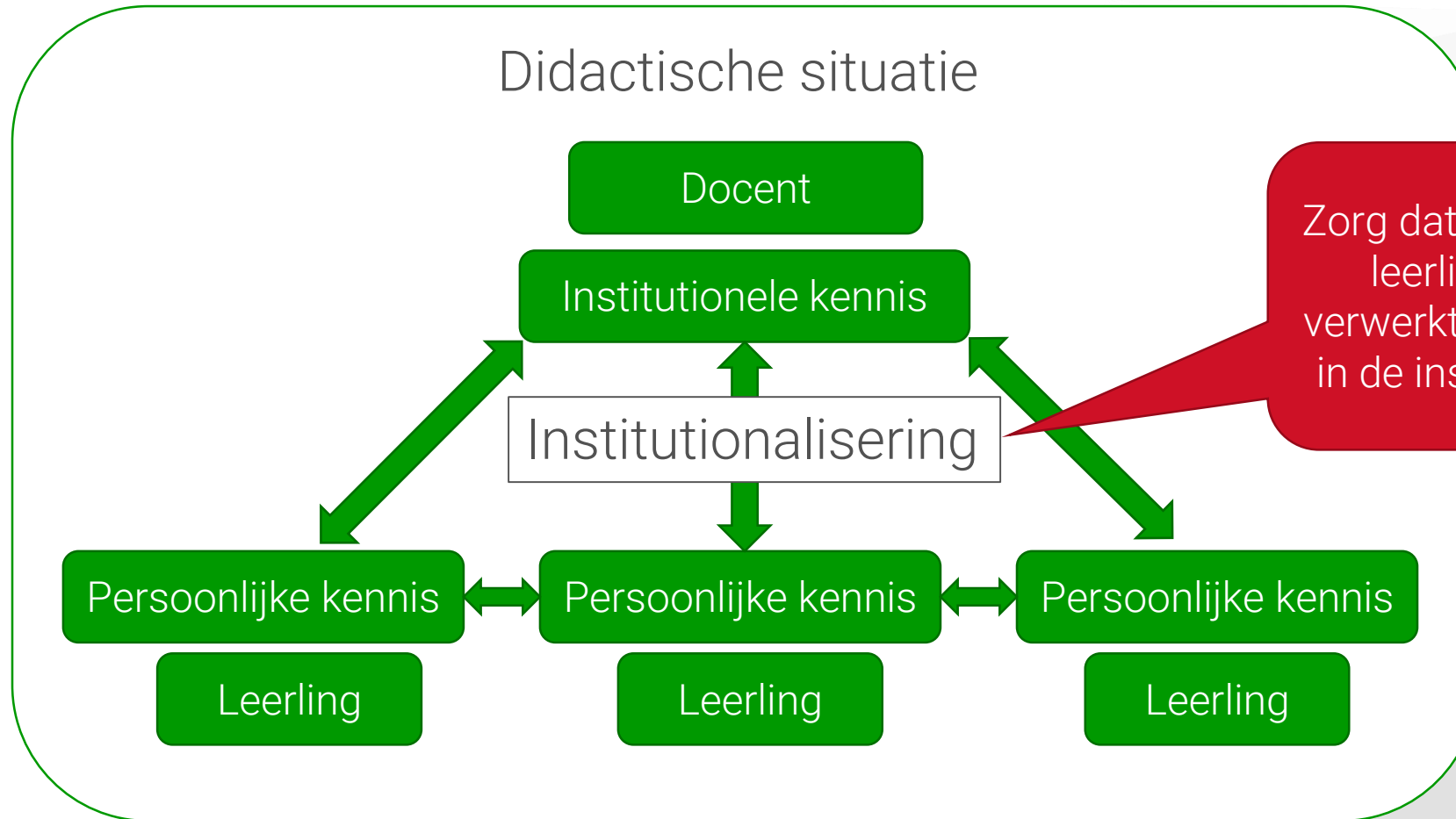
	Rol van de docent	Rol van de leerlingen	Milieu	Situatie
Overdracht	Introduceert, deelt het milieu uit	Ontvangen, proberen het probleem aan te pakken	Wordt vastgesteld	Didactisch
Actie	Observeert en reflecteert	Doen en reflecteren	Probleem wordt verkend	A-didactisch
Formulering	Organiseert, start met vragen indien nodig	Formuleren zo specifiek mogelijk	Open discussie	A-didactisch of didactisch
Validatie	Luistert en evalueert indien nodig	Bespreken, proberen elkaars argumenten te volgen	Begeleide discussie	Vaak didactisch
Institutionalisering	Presenteert en legt uit	Luisteren en reflecteren	Institutionele kennis	Didactisch



# Theorie van didactische situaties



# Theorie van didactische situaties



Zorg dat de ideeën van de leerlingen duidelijk verwerkt zijn en aanwezig in de institutionalisering!



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Presentaties en bespreking van ervaringen

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.



# Presentaties



Doel:

met elkaar leren van elkaar's ervaringen en een realistisch krijgen van hoe zo'n les verloopt (kan verlopen in de NL lespraktijk), evaluatie scenario's

Vorm: achtereenvolgens geven docenten een korte informele presentatie over hun les. Vragen en opmerkingen tussendoor welkom. Na afloop van elke presentatie: eventueel leerlingwerk bekijken, leerpunten samenvatten, discussie, evaluatie scenario.

**Opdracht:**

- Spiegel andermans ervaringen met je eigen les en verwachtingen
- Probeer alert te zijn op 'good practices' en valkuilen



# Leerlingwerk



Het is te wij omdat dat gewoontes  
wat het is.

omdat er telkens 10  
by komt en by het  
aan der en getallen die  
je in elk jaar doe



# Leerlingwerk



Neem bijvoorbeeld 91. Dit getal splits je door 2 en. In dit getal geval is het 9 en 1. Dat doe je min elkaar  $(9-1)=8$  Als je dat getal vermenigvuldigd met ~~9~~ 9 heb je het antwoord.

logische manier:  
Formule  
 $XY - YX = (X - Y) \cdot 9$



# Leerlingwerk

Handwritten mathematical work on grid paper:

$$\begin{aligned} & \text{top } (5, 3) \\ & a(x-5)^2 + 3 \\ & a(3-5)^2 + 3 = 4 \\ & a(-2)^2 + 3 = 4 \\ & 4a + 3 = 4 \\ & 4a = 1 \\ & a = \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{4}(x-5)^2 + 4 \\ & \frac{1}{4}(x-6)^2 + 4 = 12 \\ & \frac{1}{4}(x-6)^2 = 8 \\ & (x-6)^2 = 32 \\ & x-6 = \sqrt{32} \\ & x-6 = \\ & x \approx -0,34 \end{aligned}$$



# Leerlingwerk



opdracht/41

22 - 22 = -9  
13 - 31 = -18  
14 - 41 = -27  
15 - 51 = -36  
16 - 61 = -45  
17 - 71 = -54  
18 - 81 = -63  
19 - 91 = -72  
23 ~~21~~ - 32 ~~31~~ = -9  
24 - 42 ~~30~~ = -18  
25 - 52 = -27

alle getallen per 10 tal bijvoorbeeld  
 $12 \text{ m } 19 = -9 + -9$  en  $23 \text{ m } 29$  heeft ook  
 $-9 + -9$  als antwoord



# Onze leeropbrengst



- Experimenteren met onderzoekend leren: uitproberen loont
- Lastig is de balans tussen 'vrij' laten en aansturen op 'institutionaliseren'
- Het TDS template kan helpen bij vinden van goede balans en expliciet maken van leeropbrengst voor leerlingen (maar moet geen keurslijf worden)
- Ervaring is nodig/noodzakelijk om goede balans te kunnen vinden
- Onderzoeksvaardigheden expliciet maken voor de leerlingen?
- Wiskundig: het zelf uitzoeken kan leerlingen meer 'ownership' geven en de wiskunde meer betekenisvol maken (bijv. helling in een punt bij glijbaan)
- 'goede' indeling van groepjes kan veel uitmaken
- Een goede lesvoorbereiding is belangrijk (structuur uit opdracht -> structuur in les)
- ...



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

# Selectie en ontwerp van IBMT-taken

Intro in realistisch  
wiskundeonderwijs

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

# Formeel of via context?



“De logaritme is de inverse van de exponentiële functie”





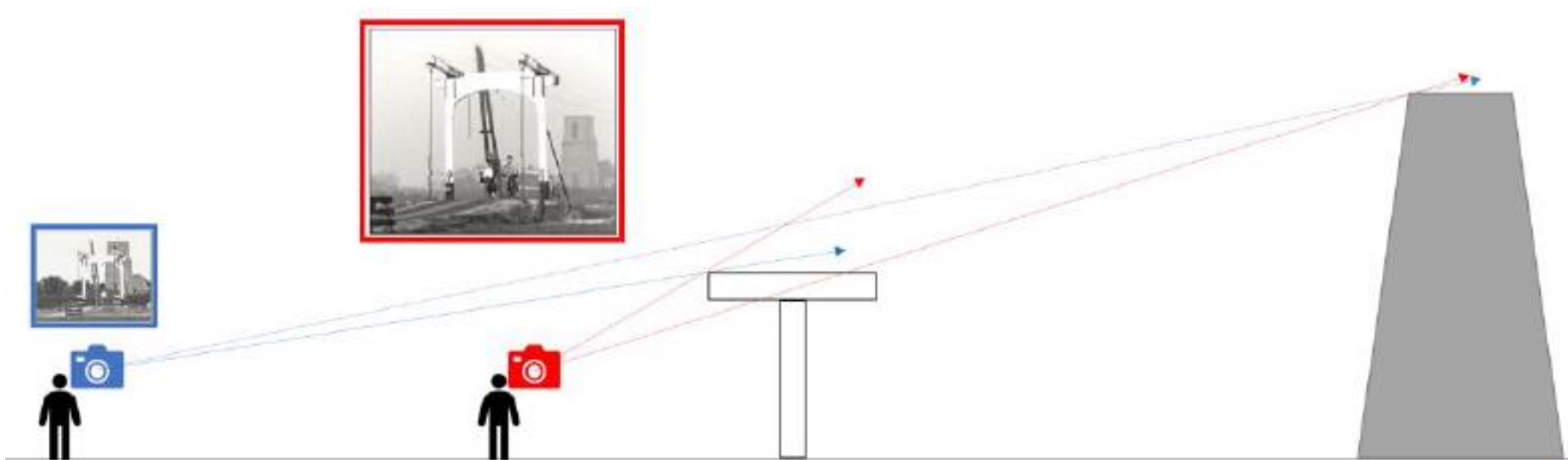
# Dichtbij belevingswereld van leerlingen



Welke is hoger, de brug of de toren?



# Dichtbij belevingswereld van leerlingen



Welke is hoger, de brug of de toren?

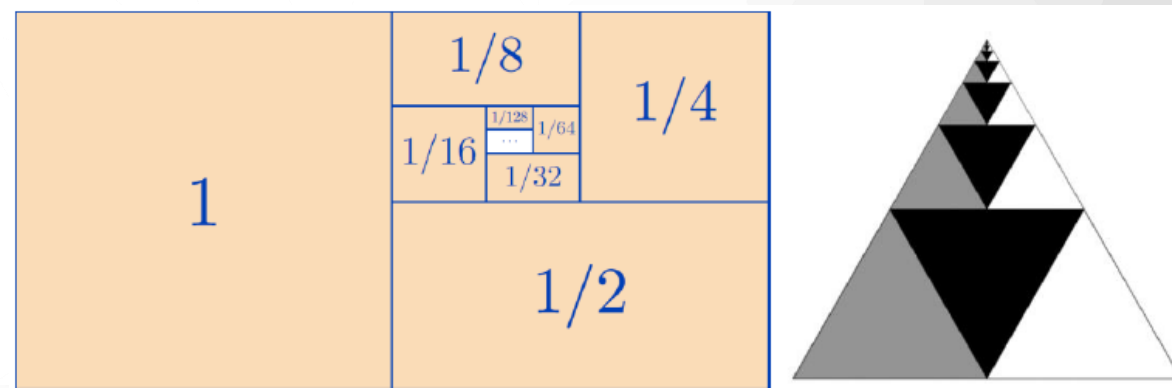
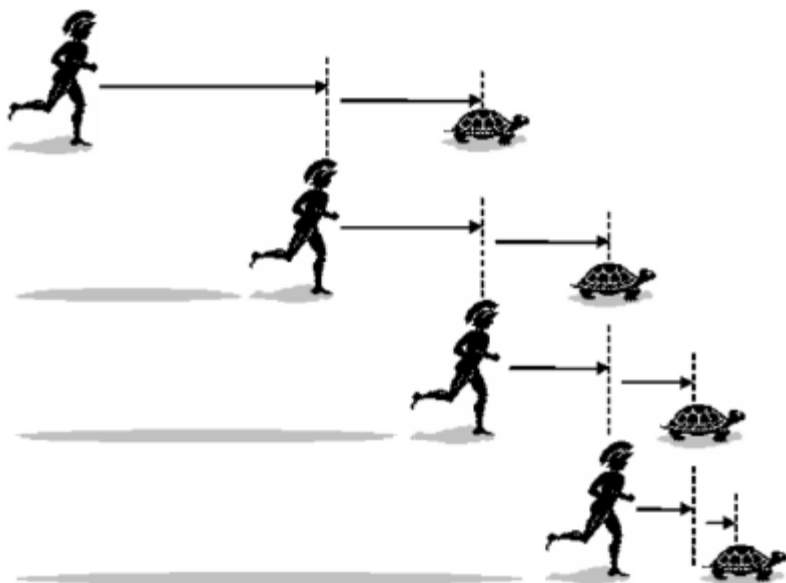
[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



# Rijke situaties



# Mathematiseren en emergente modellen



“Wiskunde is een menselijke activiteit”

RWO-schema

abstracter, formeler wiskundig model

*Verticaal mathematiseren*

Betekenisvolle, rijke situatie

Informeel wiskundig model

*Horizontaal mathematiseren*



# Betekenisvolle wiskunde

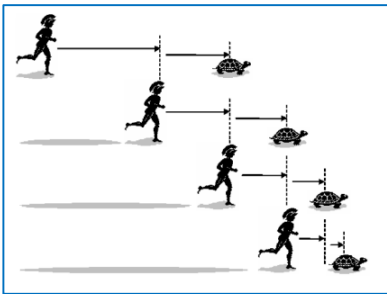


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x}$$

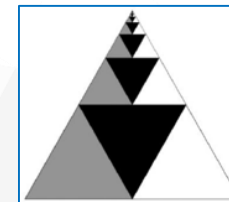
abstracter, formeler wiskundig model

RWO-schema

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$



Betekenisvolle, rijke situatie



Informeel wiskundig model

*Verticaal mathematiseren*

*Horizontaal mathematiseren*



# Mathematiseren en emergente modellen



RWO/IBMT-schema

abstracter, formeler wiskundig model

Antwoord, bewijs, validering

*Verticaal mathematiseren*

Betekenisvolle, rijke situatie

Informeel wiskundig model

*Horizontaal mathematiseren*

Wiskundige vraag, hypothese, vermoeden

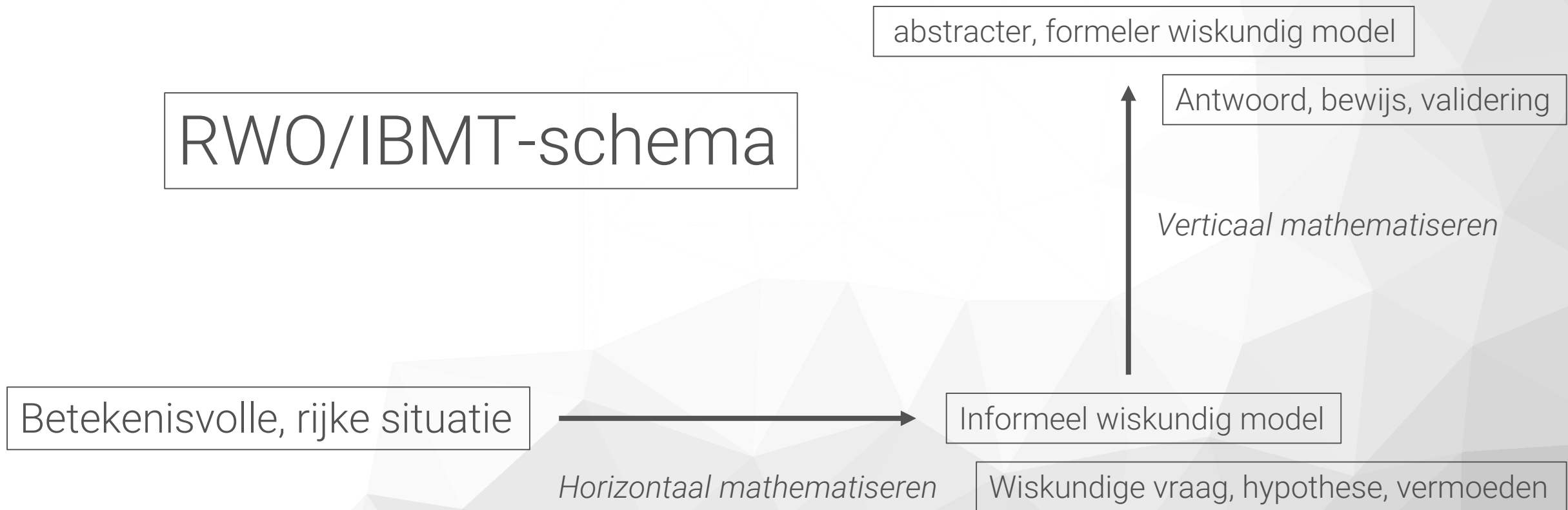


# Mathematiseren en emergente modellen



Opdracht:

Bespreek hoe **dit** schema eruit zou zien voor een ander Meria-scenario



# Zelf geschikte situatie ontdekken



Voorbeelden:

- a) Een locatie/praktijk. Vb: een magazijn of een festival
- b) Een verhaal of paradox. Vb: Achilles/schildpad
- c) Een menselijke activiteit. Bijvoorbeeld: iets ontwerpen, een vliegtuig besturen.
- d) Nieuws of een historische gebeurtenis. Bijvoorbeeld: statistische uitspraken in de krant.

## Opdracht:

Brainstorm in een groepje over een geschikte rijke situatie als basis voor een IMBT-taak over wiskundestof binnen het curriculum

*Situaties die erom "smeken" gemathematiseerd te worden met de wiskunde die het leerdoel vormt (en wat zou het 'informele' model kunnen zijn dat leerlingen construeren?).*





# Vervolg

- nieuwe ideeën
- volgende stappen in het project
- volgende stappen bij jou op school.

Afsluitende conferentie (Zagreb, 27-29 mei)! Wie wil/kan?

- Test nog enkele scenario's komende maanden
- Liefst meer dan 1 docent per school
- Reis en verblijf vergoed



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



**Mathematics Education -**  
Relevant, Interesting and Applicable

**Einde!**

[meria-project.eu](http://meria-project.eu)

The sole responsibility for the content of this presentation lies with the authors. It does not necessarily reflect the opinion of the European Union.