Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA SCENARIJI IN MODULI

(ta stran je namenoma prazna)

MERIA SCENARIJI IN MODULI

GLAVNI UREDNIK
Kristijan Cafuta

AVTORJI BESEDILA
Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Britta Jessen, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

DIZAJN
Irina Rinkovec

PREVOD V SLOVENŠČINO
Kristijan Cafuta, Selena Praprotnik, Mojca Suban

Projekt MERIA, avgust 2019.
www.meria-project.eu

(ta stran je namenoma prazna)

Kazalo

Uvod

Knjižica *MERIA scenariji in moduli* predstavlja enega izmed temeljnih rezultatov projekta MERIA in obsega pet učnih scenarijev in njim pripadajočih modulov. "Model" ali vzorec scenarijev in modulov je bil predstavljen v knjižici *Predloga MERIA za scenarije in module*, kjer je bil prav tako objavljen vzorčni scenarij s pripadajočim modulom. Izdelava teh materialov temelji na teoretični podlagi, ki je predstavljena v publikaciji *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*.

Scenarij opisuje didaktično situacijo, ki se lahko realizira med učno uro, ter epistemološke predpostavke in sklepanja v ozadju scenarija. Opisuje tudi cilje situacije glede na področje kurikuluma, specifične pričakovane dosežke in kompetence, ter zagotavlja jasno strukturo učne ure v skladu s Teorijo didaktičnih situacij (TDS). *Modul* zraven scenarija vključuje še pisne in elektronske materiale, kot so naloge za dijake ali elektronske delovne liste, jasne utemeljitve za izbiro določenega problema (oz. problemov) in metode poučevanja z nadaljnjimi vidiki Učenja matematike v realnem kontekstu (RME). Poleg tega modul vsebuje tudi izkušnje in dosežke, ki so bili zbrani ob izvajanju scenarija, vključno s potencialnimi prednostmi in pomanjkljivostmi za dijake s specifičnim predznanjem.

Uporaba scenarija je lahko za učitelja zahtevna naloga. Osnovna ideja včasih ni očitna in pričakovane standarde znanja je včasih težko doseči. Zato moduli natančneje pojasnjujejo avtorjeve namere in učitelju nudijo podporo, tako da so opisane variacije, ki jih lahko pričakujemo pri izvajanju scenarija. Iz tega razloga so tukaj objavljeni celotni moduli. Scenariji so v uporabniku prijaznejši različici objavljeni na spletni strani projekta.

Vsi scenariji nudijo dijakom priložnost za uporabo IKT pri matematičnem preiskovanju, problemov pa se lahko lotijo tudi brez uporabe tehnologije. Tudi te variacije so opisane v scenariju ali modulu. Vsi dodatni učni materiali in gradiva za vsak scenarij so objavljeni na spletni strani projekta MERIA.

Treba je opozoriti, da je potreben čas, da se dijaki navadijo na učenje s preiskovanjem in da učitelji najdejo ravnovesje med pretirano intervencijo (ki uniči dijakove priložnosti za preiskovanje) in puščanjem dijakov s premalo sredstvi za smiselno preiskovanje. Projektna skupina MERIA je trdno prepričana, da je za učitelja optimalno preizkusiti scenarije tekom cikla strokovnega izpopolnjevanja v obliki MERIA delavnic podprtih z branjem *Priročnika MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*.

V obdobju med julijem 2017 in decembrom 2018 je projektna skupina MERIA razvila približno deset različnih scenarijev iz področij, ki se ujemajo z učnimi načrti vseh štirih partnerskih držav: Danske, Hrvaške, Nizozemske in Slovenije. Projektu so se v vsaki državi pridružile tri do štiri šole, v katerih so se scenariji testirali. Najlepša hvala našim partnerjem v pridruženih šolah za njihovo predano delo. Pridružene šole so:

- iz Hrvaške: Gospodarska škola Varaždin, Tehnička škola Požega, Elekstrostrojarska škola Varaždin, XII. gimnazija Zagreb
- iz Danske: ZBC, Next København, Roskilde Katedralskole
- iz Nizozemske: Comenius College Hilversium, Hermann Wesseling College, Stedelijk Gymnasium Utrecht
- iz Slovenije: Ekonomska šola Novo mesto, Gimnazija Jesenice, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Proces preizkušanja scenarijev je privedel do več revizij in podal zelo zanimive informacije, ki so pripomogle k izboljšanju scenarijev. Ključno je bilo za to knjižico izbrati 5 modulov kot najpomembnejše (za vse države) in najuspešnejše izdelke tega projekta. Učitelji iz pridruženih šol so se najprej spoznali s teoretičnim ozadjem preko interaktivnih delavnic, ki so jih pripravili člani projekta. Na ta način so se učitelji pripravili na delo s scenariji. Izvajanje vsakega scenarija v razredu so opazovali člani projekta ali drug učitelj iz iste šole. Po izvedbi so učitelji analizirali izvedbo ure s pomočjo vprašalnika in ustno poročali članom projektne skupine na naslednjem sestanku. Delo dijakov je bilo dokumentirano in tudi dijaki so izpolnili kratek vprašalnik, v katerem so poročali o tem, v kolikšni meri se je učna ura izkazala kot zanimiva in ali bi se radi ponovno udeležili podobne dejavnosti. Dodatne informacije o vprašalnikih, poročilih in metodologiji so na voljo v publikaciji *MERIA project impact analysis (MERIA analiza učinkov projekta)*.

Pet scenarijev, za katere so v tej publikaciji predstavljeni celotni moduli, smo izbrali na podlagi kriterijev, določenih na sestanku projektne skupine v Kopenhagnu avgusta 2018: potencial za preiskovanje in adidaktična potencial scenarija, izvedljivost scenarija za dijake in učitelje, ustreznost teme iz vidika ustreznosti in uporabnosti, odzivi dijakov in raznolikost tem, ki so prisotne v srednješolskih učnih načrtih partnerskih držav.

Izbor MERIA scenarijev tako zajema naslednje teme: modeliranje preprostega poslovnega problema z uporabo odsekoma linearne funkcije, ugotavljanje, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti z uporabo kvadratne funkcije, reševanje elementarnega geometrijskega problema z uporabo simetral daljic, sklepanje o porazdelitvi plač v podjetjih z uporabo aritmetične sredine, modusa in mediane ter oblikovanje ukrivljenega predmeta (tobogan ali smučarska skakalnica) kot gladke krivulje. Namen projekta ni bil zajeti čim večje število tem (skupnih) srednješolskih načrtov, ampak ponuditi vzorčne primere kot podporo učiteljem pri uvajanju učenja s preiskovanjem v svoje delo. Menimo, da so vključeni scenariji primerni za razvoj matematičnega modeliranja in postopne formalizacije, postavljanje hipotez in dokazovanje, znanstveni pristop, spodbujanje razumevanja namesto pomnjenja, kritično razmišljanje, samostojno preiskovanje in uporabo matematike v primerih iz vsakdanjega življenja.

Uvod zaključujemo s predstavitvijo vsakega izmed petih scenarijev s stališča problema, ki ga predstavimo dijakom, in pričakovanih standardov znanja, ki jih želimo doseči.

V prvem scenariju dijaki preučijo podatke o proizvodnji koles in izgradnji tovarne na štirih različnih lokacijah, da bi lahko podjetju svetovali, kako najti najboljšo lokacijo glede na predvideno proizvodnjo. Proizvodnjo na vsaki lokaciji lahko modeliramo z linearno funkcijo in dijaki lahko razvijejo različne strategije za primerjavo lokacij. Dijaki uporabljajo grafične predstavitve in tehnologijo, kritično razmišljajo in povzamejo svoje ugotovitve v poročilu, ki ga napišejo za podjetje.

V drugem scenariju dijaki preučijo odvisnost zavorne poti od hitrosti vozila ob začetku zaviranja. Odvisnost je kvadratna, kar je za dijake nadgradnja znanja o funkcijah (pričakovano predznanje je poznavanje linearne funkcije). Scenarij torej služi kot uvod v kvadratne funkcije in izboljšuje računske spretnosti, spodbuja sklepanje in vključuje življenjske primere ter jih povezuje z občutkom odgovornosti.

V tretjem scenariju dijaki dobijo zemljevid puščave s šestimi vodnjaki z nalogo, da zemljevid razdelijo na območja glede na razdaljo točk do vodnjakov. Za rešitev problema (konstruiranje tako imenovanih Voronoijevih diagramov) je potrebno uporabiti simetrale daljic med pari točk. Dijaki lahko uporabijo posebej zasnovane programe za preiskovanje problema in za konstruiranje podobnih situacij, ki vodijo v preiskavo cikličnih konfiguracij točk.

Četrti scenarij se osredotoča na preprosto statistično sklepanje o naboru danih podatkov, ki predstavljajo plače zaposlenih v nekaj različnih podjetjih. Naloga dijakov je analiza podatkov in oblikovanje zaključka, kje bi se najraje zaposlili. Od dijakov se pričakuje, da uporabijo opisnike osredinjenosti podatkov, kot recimo aritmetična sredina in mediana, vendar lahko njihova analiza zlahka pripelje do drugačnih pogledov na problem, na primer grafičnih predstavitev percentilov itd.

V petem scenariju dijaki konstruirajo tobogan, sestavljen iz ravnega in ukrivljenega dela, ki jih je potrebno gladko povezati – pri čemer ima "gladko" natančno matematično definicijo. Dijakom se samo naroči, da konstruirajo tobogan na način, ki omogoča udobno vožnjo. Naloga je torej analizirati, kako oba dela povezati, in odkriti, da mora biti ravni del v točki stika tangenten na ukrivljeni del. Dijaki lahko izberejo različne krivulje za ukrivljeni del in nato konstruirajo tangento s pomočjo različnih strategij. Problem se lahko v primeru krivulj drugega reda reši na elementaren način, pri drugih krivuljah pa problem vodi dijake do ideje odvoda funkcije.

MERIA modul “Tovarna koles”

Linearna in odsekoma linearna funkcija

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Konstrukcija odsekoma linearne funkcije, določene kot rešitev problema, v katerem je podan seznam linearnih pogojev.
Splošni cilji	Risanje grafov (linearnih) funkcij na papir in z uporabo IKT. Razprava o raztegu grafov vzdolž ene od osi. Poglobljeno razumevanje linearne funkcije (naklona a in konstante b) preko uporabe linearnih pogojev za konstrukcijo odsekoma linearne funkcije. Razprava o zveznih in diskretnih vidikih v povezavi z algebrsko in grafično predstavitvijo v procesu modeliranja. Preiskovalne veščine: eksperimentiranje s številkami pred risanjem grafov, neupoštevanje nepomembnih podatkov in očitnih neoptimalnih tovarn, interpretiranje rezultatov, dobljenih v procesu modeliranja, prevzem odgovornosti za končno poročilo in predstavitev ugotovitev v obliki nasveta. Interdisciplinarne veščine: dijaki lahko razpravljajo o različnih ekonomskih vidikih problema, kot je razlika med dobičkom in prihodkom. Pri pisanju poročila so poudarjene komunikacijske spretnosti.
Potrebno matematično predznanje	Risanje grafa linearne funkcije. Poznavanje zapisa $f(x) = ax + b$ in pomen koeficientov a in b.
Letnik	Dijaki, stari 15 - 16 let
Trajanje	50 minut (80 minut)
Potrebni material	Preglednica s podatki o stroških (glej spodaj) Karo papir in/ali elektronska predloga za spreminjanje linearnih pogojev in/ali IKT v splošnem za risanje grafov funkcij, spreminjanje in dodajanje pogojev, iskanje presečišč itd. Bela/zelena širša tabla ali interaktivna tabla.

Območje	Stroški gradnje tovarne v €	Stroški proizvodnje za eno kolo v €
A	300 000	120
B	450 000	110
C	660 000	60
D	680 000	80

Problem: Si v vlogi svetovalca, ki podjetjem svetuje, kje naj zgradijo tovarno za proizvodnjo koles. Tvoje izhodišče je preglednica s stroški za obratovanje tovarne na različnih območjih. Kakšen bi bil tvoj nasvet podjetju v zvezi z izborom lokacije za tovarno in zakaj?[1]	

Faza	**Dejavnosti in navodila učitelja**	**Dejavnosti in odzivi dijakov**
Devolucija (Prenos) (didaktična) 5 minut	Učitelj pove dijakom: Si v vlogi svetovalca, ki podjetjem svetuje, kam naj umestijo tovarno za proizvodnjo koles. Kakšen bi bil v splošnem tvoj nasvet podjetju? Delajte v paru in se pripravite, da boste kasneje predstavili svojo rešitev.	Dijaki poslušajo in skušajo razumeti pomen problema ter se ga zavzeto lotijo. Lahko imajo vprašanja glede pomena dane tabele in samega problema. Učitelj mora učencem izrecno dati možnost, da postavijo takšna vprašanja, da se prepričajo, da bodo vsi razumeli nalogo.
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 15 (20) minut	Učitelj opazuje in beleži, katere strategije za rešitev problema so uporabili dijaki. Na ta način dobi učitelj tudi vpogled v predznanje dijakov. Pomembno je, da učitelj dijakom ne daje namigov in se izogne komunikaciji z dijaki, razen če je potrebno ponoviti problem.	Dijaki v parih preizkušajo različne strategije in ideje, skladno z njihovim predznanjem. Glejte razdelek spodaj *Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja*. Ker dijaki delajo v parih, bo prisotna adidaktična formulacija.
Formulacija (Zapis ugotovitev) (didaktična) 10 (15) minut	Učitelj izbere skupine (najmanj 5), ki predstavijo različne strategije na tabli. Tabla naj se pred tem razdeli na (vsaj) 5 delov. Izbrani pari lahko zapišejo svoje odgovore, preden jih povedo ustno. Dijaki svojih zapisov na tabli ne smejo več brisati. Ko dijaki zapišejo svoje odgovore, jih predstavijo še ustno. Začnejo z najbolj preprosto rešitvijo. Učitelj vzpodbudi ostale dijake v razredu, da zastavljajo vprašanja in komentirajo predstavitve. Na tej točki ni potrebna potrditev veljavnosti napisanih odgovorov.	Pari predstavljajo svoje odgovore po vrstnem redu, ki ga določi učitelj (najprej bolj preproste rešitve, s številkami, kasneje rešitve z grafi in funkcijami).

[1] Navdih problema je v Nalogi 2.10, ki je obravnavana v knjigi »*Primijenjena matematika podržana računalom*«, ki jo je v okviru projekta »STEM genijalci« zasnovala tudi soavtorica tega scenarija.

Devolucija (Prenos) (didaktična) 1 minuta	Učitelj pove dijakom: V paru razpravljajte o podobnostih in razlikah predstavljenih rešitev. Razmislek uporabite za izboljšanje svojega odgovora vodstvu podjetja. Po 5 (10) minutah boste ponovno pozvani, da predstavite ugotovitve.	Dijaki poslušajo. Učitelj mora poskrbeti, da dijaki razumejo navodilo.
Reševanje (Delovanje) / Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 5 (15) minut	Učitelj hodi po razredu in spremlja, kaj so pari opazili in razpravljali ter kako uporabljajo ugotovitve drugih parov.	Pari navajajo podobnosti in razlike predstavljenih rešitev, pri čemer skušajo razumeti vse strategije in izboljšati svojo rešitev.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 10 (15) minut	Učitelj k poročanju povabi različne pare, da bi nanizali čim več ugotovitev in spremenjenih odgovorov. Prizadeva si, da bi dijaki ugotovili morebitne napake v prejšnjih rešitvah.	Različni dijaki poročajo o ugotovljenih podobnostih in razlikah in razložijo, kako so z rešitvami preostalih parov izboljšali svojo rešitev. Lahko tudi nakažejo pomanjkljivosti nekaterih rešitev.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 (10) minut	Učitelj poudari, da ni enega pravilnega odgovora, temveč je ta odvisen od števila izdelanih koles. Svojo razlago najprej utemelji z rešitvami učencev na tabli, nato pa uvede zapis odsekoma linearne funkcije s primerom (enoto € izpusti): $f(x)=\begin{cases}120x+3\cdot 10^5, x\leq a\\ 60x+6{,}6\cdot 10^5, x\geq a\end{cases}$ kjer je a=6000. Lahko je zapisana tudi kot $f(x)=120x+300\,000, x\leq a$ $h(x)=60x+660\,000, x\geq a$. To uporabi, da povzame, kako svetovati podjetju: območji B in D nista nikoli optimalni, medtem ko sta območji A in C optimalni za proizvodnjo pod oziroma nad 6000 kolesi. Funkcija optimalnih stroškov je odsekoma linearna funkcija (definirana na množici naravnih števil).	Dijaki poslušajo in prepoznajo svojo strategijo v povezavi z definicijo ter razmišljajo, kako se to primerja s preostalimi strategijami reševanja. Delajo si zapiske.

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	• Nekateri dijaki poskušajo za občutek uporabiti kakšna konkretna števila, kot na primer:
	    ○ Nekateri dijaki za začetek izračunajo ceno za konkretna števila koles v vsakem območju. Uporabijo lahko strategijo poskusov in napak ter poskusijo najti število, pri katerem za dve območji izračunajo enako ceno.
	    ○ Dijaki lahko za vsako območje pripravijo preglednico in izračunajo končni strošek za dano število koles, stroške primerjajo in izberejo najcenejšo rešitev za dano število koles (to lahko naredijo brez ali z uporabo računalnika).
	    ○ Primerjajo lahko dve lokaciji in pokušajo izračunati, kako bi lahko razliko med fiksnimi stroški nadomestili z razliko med variabilnimi stroški (na primer koliko koles morajo izdelati, preden bo B boljši od A); za oblikovanje popolnega odgovora je potrebno narediti šest takšnih primerjav.
	
	• Nekateri dijaki takoj poskusijo s funkcijami in zapišejo štiri enačbe funkcij, kjer vsaka funkcija predstavlja strošek proizvodnje x koles:
	$f(x) = 120x + 300\ 000,$
	$g(x) = 110x + 450\ 000,$
	$h(x) = 60x + 660\ 000,$
	$k(x) = 80x + 680\ 000.$
	    ○ Grafe funkcij narišejo v koordinatni sistem ali sisteme in glede na graf utemeljijo izbiro območja za postavitev tovarne.
	    ○ Dijaki, ki uporabljajo karo papir, lahko razberejo koordinati presečišča na koordinatnih oseh.
	    ○ Dijaki, ki uporabljajo IKT, bodo morda takoj narisali vse linearne funkcije, vendar lahko naletijo na težave pri prilagajanju koordinatnih osi, zaradi česar bodo težko razločili posamezne funkcije.
	    ○ V vsakem primeru se interpretacija funkcij in potreba po minimiziranju stroškov ne porodita samodejno, ampak zahtevata poglobljeno razmišljanje o problemu. Prisotne bodo tudi napake, kot je na primer neupoštevanje razlike med stroški proizvodnje in prodajno ceno ali dobičkom, itd.
	    ○ Presečišča funkcij dijaki najdejo s primerjanjem parov enačb funkcij. Pomagali si bodo z grafi funkcij, da ugotovijo, kateri pari enačb so pomembni. Za uporabo te strategijo so potrebne veščine reševanja enačb.
	• Dijaki lahko pridejo do različnih zaključkov.
	    ○ Ne glede na to, ali dijaki delajo s številkami (in preglednicami) ali funkcijami (in grafi) bodo nekateri ugotovili, da ni enega samega »najboljšega območja«, ampak da je nasvet o izbiri odvisen od števila proizvedenih koles. Zaključek je lahko bolj ali manj natančen in predstavljen opisno, z enačbami, grafi, itd.

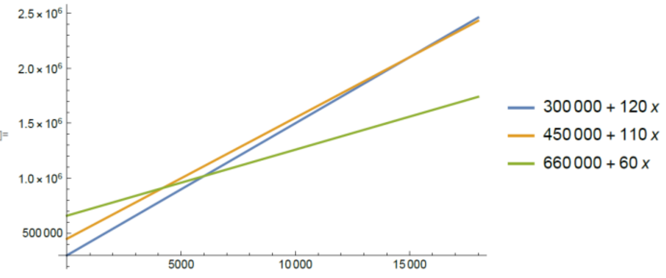
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Nekateri dijaki bodo podali hiter in napačen odgovor, kot na primer »A je najboljša izbira, ker je pri izračunu stroškov za proizvodnjo 1, 2, …, 10 koles, cena tam vedno najnižja.«

- **Primeri grafov in enačb, ki bi jih lahko izdelali dijaki** (na papirju ali, kakor tukaj, z uporabo tehnologije) z namenom, da ugotovijo, kako so različna območja bolj ekonomična za različno število proizvedenih koles.

In[70]:= `Plot[{300000 + 120 x, 450000 + 110 x, 660000 + 60 x}, {x, 0, 18000}, PlotLegends → "Expressions"]`

Out[70]=



In[66]:= `Solve[300000 + 120 x == y && 450000 + 110 x == y, {x, y}]`

Out[66]= {{x → 15000, y → 2100000}}

In[67]:= `Solve[300000. + 120 x == y && 660000 + 60 x == y, {x, y}]`

Out[67]= $\{\{x \to 6000., y \to 1.02 \times 10^6\}\}$

</td>
</tr>
</table>

Pojasnilo glede materialov za dijake

Zgodba o svetovanju in tabela s stroški je namenjena temu, da bi pritegnila dijake v fazi devolucije. Tabelo lahko razdelimo dijakom na listih ali pa jo zapišemo na tablo (ali pametno tablo), lahko jo podamo v PowerPoint predstavitvi ali pa jo dijaki prenesejo na računalnike/pametne telefone ali kaj podobnega.
Dijaki v nekaterih državah poznajo načela modeliranja, v drugih pa ne. Če je potrebno, si lahko učitelj vzame več časa, da pojasni podatke v tabeli. Dijaki lahko pri reševanju uporabljajo mobilne telefone, grafični kalkulator, GeoGebro, Wolfram Alpha, karirast papir, ravnilo in/ali IKT na splošno, da narišejo, spreminjajo in dodajajo pogoje, iščejo presečišča idr. Da zagotovimo dovolj prostora za predstavitve vseh dijakov, ki naj ostanejo vidne do konca ure, potrebujemo široko tablo ali posterje. Poleg tega potrebujemo še prostor za učiteljevo institucionalizacijo.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

Fokus v didaktičnih fazah naj temelji v prvi vrsti na zapisih dijakov in potrditvi njihovih dognanj. V adidaktičnih fazah ne dajemo namigov o rešitvah. V tem delu bomo povedali, kaj lahko spremenimo v didaktičnih spremenljivkah scenarija.

Učitelj naj dijakom razloži, da je ta finančni model poenostavljen in zanemari mnogo vplivov. V resnici so modeli večinoma poenostavitve. V našem računu upoštevamo:

a) ceno gradnje tovarne na izbranem območju,
b) ceno proizvodnje enega kolesa v tovarni.

V skladu z običajnimi definicijami imamo tudi druge fiksne stroške obratovanja, celo v situaciji, ko ni proizvodnje. Fiksni stroški obratovanja vključujejo ceno gretja, plače stalno zaposlenih in podobno. Te stroške zanemarimo. Stroški b) predstavljajo spremenljive stroške, ki so odvisni od količine proizvodnje, vključujejo pa material, ceno delov strojev, ki jih je potrebno zamenjati, porabo električne energije za stroje, plače sezonskih delavcev ipd. Problem lahko posplošimo tako, da dodamo še druge stroške, vendar ima pričujoči model le dva tipa stroškov.

Poročilo svetovalca naj bo osnovano samo na stroških a) in b). Lahko tudi eksplicitno določite, naj poročilo vsebuje le dane informacije, čeprav samostojne predpostavke ali ocene dijakov pripomorejo k bogatejšemu naboru rešitev (npr. rešitev dveh danskih dijakov, ki je seveda delno napačna). Preprečevanje "napačnih odgovorov" ni naša prva skrb, saj se dijaki lahko iz njih nekaj naučijo.

Izziv zgodbe je, da se bo direktor podjetja odločil o lokaciji glede na analizo svetovalca. Ni potrebno, da svetovalec (dijak) ve, ali podjetje načrtuje veliko ali malo količino proizvedenih koles, kar pa dijaki včasih spontano privzamejo.

Ko se direktor odloči, bodo tovarno postavili le na eni lokaciji in tam bo ostala. Tovarne ne morete premikati.

Didaktično okolje (Milje): ceno (količina in tip) lahko izberemo drugače, za začetnike pa je mogoče bolje, da med grafi minimalnih stroškov ni veliko presečišč. V našem primeru je le eno tako presečišče pri x=6000. Kadar je presečišč več in so si blizu, problem postane bolj umeten. Na primer, ni najbolje, če imamo dve presečišči pri x_1=5000 in x_2=5050. To bi razumeli, kot da izberemo drugo lokacijo zaradi 50 koles.

Spremenimo lahko tudi izdelke in druge elemente problema. Tovarne, ki proizvajajo več izdelkov z robnimi pogoji, vodijo do več spremenljivk, kot pri linearnem programiranju.

Med fazo verifikacije (potrditve) je pomembno, da napačne strategije ali formule popravijo, kolikor je le mogoče, drugi dijaki. Učitelj lahko vplete ostale dijake v razredu z vprašanji kot so: Ali lahko ponovite, kar so povedali sošolci? Je to v redu? Zakaj tako mislite? Od kod to veste? Vprašanja, ki jih postavlja, so odvisna od predznanja in dosežkov razreda.

Trajanje faz lahko priredimo glede na delo dijakov.

Med *prvo fazo reševanja (delovanja)* dijakom ne povemo, kaj naj izračunajo ali katero določeno matematično orodje naj uporabijo, kot na primer linearne funkcije.
Če učitelj dvomi, ali dijaki razumejo zahtevano predznanje, naj postavlja vprašanja kot: Kako lahko primerjamo stroške? Ali lahko katero izmed lokacij zanemarimo? Zakaj? itd. Predlagana vprašanja naj učitelj postavi le skupinam ali posameznikom, če večina ostalih dijakov nima težav s predznanjem. Učitelj naj ne predava vsaki skupini posebej. Poleg tega, *ni potrebno* da ostane s skupino, dokler nima odgovora na tako vprašanje. Vprašanje je le manjša devolucija omejenega problema, potem pa pustimo dijake, da delujejo, formulirajo in potrdijo. Ne podpirajte jih z dodatnimi vprašanji ali namigovanji o

odgovoru. Če bi morala večina razreda razmisliti o teh vprašanjih, fazo skrajšamo in vprašanja postavimo pred celotnim razredom; taka potreba običajno pomeni, da je bil začetni problem pretežek ali nejasen, čemur se želimo izogniti.

Vmešavanja med *drugo fazo* reševanja, formulacijo in potrditvijo:
Glavne smernice so podobne tistim zgoraj. Če se nekatere skupine s težavo lotijo problema, lahko učitelj predlaga, naj svojo strategijo primerjajo s primerno strategijo druge skupine. Ta primerljiva strategija mora biti previdno izbrana z matematičnega vidika, med njima morajo biti jasne podobnosti. To je podobno, kot nova devolucija (prenos) rahlo manj odprtega podproblema tej skupini. Če je iskanje podobnosti in različnosti za dijake preveč neoprijemljivo, lahko učitelj izbere devolucijo bolj določene naloge, kot na primer: »Poiščite eno rešitev druge skupine, ki jo lahko uporabite za izboljšanje svoje rešitve, potem pa to storite; nato poiščite napako ali pomanjkljivost v eni izmed rešitev in pojasnite, zakaj se ne strinjate.«

Med *končno fazo institucionalizacije* je pomembno, da se dotaknete večine (če že ne vseh) strategij iz razreda in jih med seboj povežete. Če učitelj razmisli o možnih strategijah, mu to pomaga krmariti in predvidevati proces preiskovanja dijakov. Medtem ko učite, se spomnite, da ste del dinamičnega sistema – dijakom moramo dovoliti, da se prilagodijo okolju, torej ne moremo pričakovati, da bodo vsi prišli do enakih odgovorov!

Proces preiskovanja vsebuje *vse* faze. Mogoče bo potrebna več kot ena učna ura, preden se bodo dijaki v celoti vpletli v tak način poučevanja. Mogoče je pomembno poudariti, da se lahko učimo tudi od alternativnih ali celo napačnih rešitev.

Nekateri učitelji sestavijo shemo možnih strategij dijakov, ki jo uporabljajo med adidaktičnimi fazami. Pričakovane strategije si lahko zapišete na kos papirja in za vsako strategijo si lahko učitelj sestavi na primer tri vprašanja, ki bi bila zanj lahko uporabna, ko skupina predstavi določeno strategijo. Med adidaktičnimi fazami si lahko učitelj zabeleži, katere skupine razpravljajo o različnih strategijah in beležke uporabi pri organizaciji nadaljnjih didaktičnih faz formulacije in potrditve.

Opažanja iz prakse

Pomembna ugotovitev scenarija je, da so se učitelji trudili ne učiti skozi vse faze scenarija. To je prijetna izboljšava, ki ohranja adidaktični potencial situacije. Dijaki so imeli nekaj vprašanj, ki so pojasnila problem. Nekateri so razmišljali o dobičku, namesto o stroških. Nekateri dijaki so bili na začetku (prva devolucija) zmedeni in so spraševali o kvaliteti koles, prodajni ceni, davkih, številu proizvedenih koles … Nekateri so zelo hitro ugotovili: *Tisti z najmanjšim naklonom je najcenejši.*

Med fazo reševanja, so dijaki prikazali naslednje pristope:
I. modeliranje z linearnimi funkcijami in risanji grafov

- I.1. risanje na roko in izračun presečišč kot rešitev sistema linearnih enačb;
- I.2. uporaba tehnologije za risanje grafov in iskanje presečišč (ne vedno uspešno).

II. Primerjanje parov ploščin in analiza rezultatov

- II.1. uporaba linearnih enačb;

- II.2. direktno iz tabele, s primerjavo fiksnih stroškov;
- II.3. druga razmišljanja, ki temeljijo na računanju ploščin in njihovi primerjavi, včasih z izmišljenimi predpostavkami in napakami.

Primerjava:

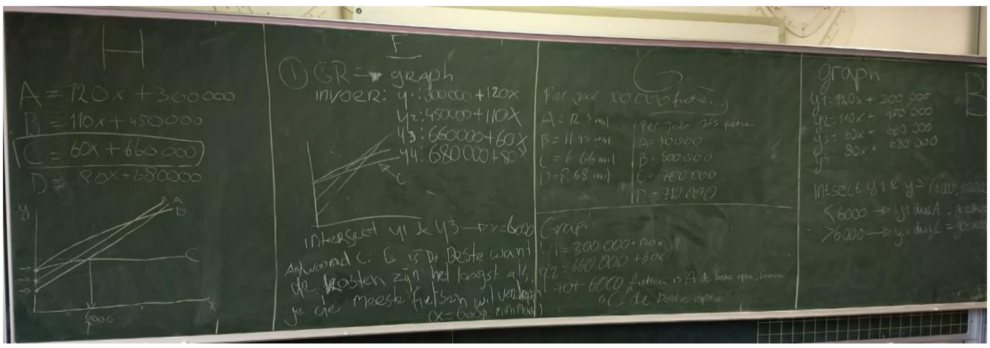
- Pristopa I.1 in I.2. sta podobna, z očitno razliko pri uporabi tehnologije. Dijaki so pripomnili, da je pristop I.2. bolj natančen in zato (naj)boljši, mi pa bi dodali, da cenimo tudi pristop I.1., saj lahko tako opazimo, ali imajo dijaki težave pri risanju grafa.
- Pristop II. zahteva več logičnega mišljenja, da bi prišli do rešitve, čeprav je strategija dobra. Razpravljali so o različicah, v katerih dijaki primerjajo le A in C glede na svoj občutek, in o pomembnosti primerjave s ploščino B.

Izpostavimo, da pristop II.2. pokaže, da lahko problem rešimo brez poznavanja linearnih funkcij in njihovih grafov, zato ga lahko uporabimo kot uvod v linearne funkcije.

Nekatere skupine so izračunale in primerjale stroške pri izdelavi izbranega števila koles v vsakem od območij A, B, C in D. V tem primeru so imeli težave s formulacijo, ker niso mogli najti tistega števila koles, pri katerem ena možnost postane boljša od druge; včasih so glede tega naredili predpostavke. Vzeli so približek ali povedali, da je za majhno število koles boljša možnost A in za veliko število koles možnost C. Ena izmed teh skupin je po drugi devoluciji v fazi reševanja ugotovila, da bi lahko natančno število koles poiskali z reševanjem sistema enačb.
Bolj napredne skupine so reševale enačbe in primerjale vrednosti funkcij na intervalih, ki so jih dobili. Nekatere izmed teh skupin so uporabile grafični pristop in poiskale presečišča s pomočjo grafa, uporabili so GeoGebro ali drug podoben program. V tem primeru je postalo pomembno, kako izberejo enote na osi, saj v enačbah nastopajo velika števila.

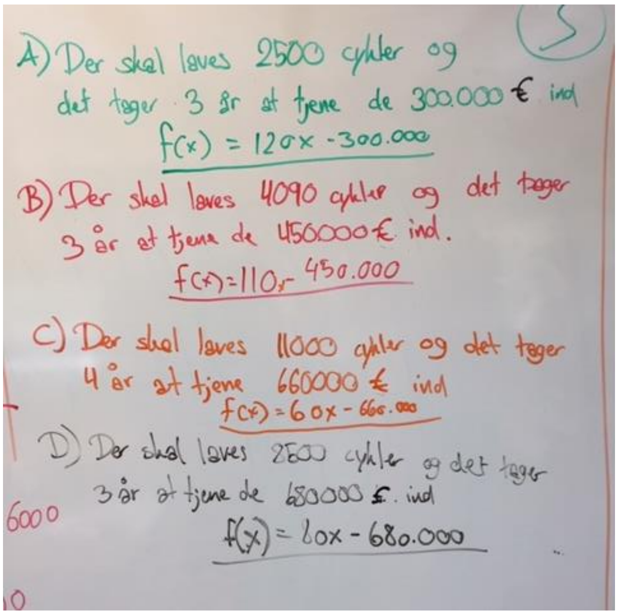
Dijaki so potrebovali več časa za prvo fazo devolucije in fazo reševanja ter manj časa za drugo, zato smo časovne intervale prilagodili. Nekateri učitelji so morali v prvi fazi reševanja in pri fazi formulacije pomagati dijakom z namigi ali dodatnimi vprašanji. Dijaki brez pomoči niso razumeli, kako bi lahko primerjali različne možnosti.

Glede na odgovore v MERIA vprašalniku se je po tej učni uri 73,3 % hrvaških dijakov strinjalo, da je matematika povezana z realnim življenjem, 87 % jih je povedalo, da je bila ura bolj zanimiva od običajne in 91,9 % dijakov bi želelo podobne ure izvajati vsak mesec.

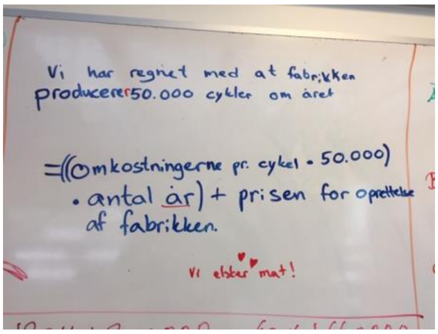


Rešitve skupin dijakov na tabli (Nizozemska)

Primer pisne predstavitve z Danske. Dijaki so preučevali vsako območje posebej. Napačno so razumeli "ceno proizvodnje enega kolesa" kot "dobiček pri izdelavi enega kolesa". Potem so za vsako območje izrazili funkcijo f(x) kot dobiček odvisen od števila proizvedenih koles. Za vsako območje so izračunali, koliko koles morajo proizvesti, da pokrijejo stroške izgradnje tovarne, tako da so poiskali ničlo funkcije f.



V prevodu, za vsako območje pišejo, "Proizvesti morajo … koles in potrebnih je … let, da se povrne strošek … €." Poleg je zapisana funkcija. Število let dobijo iz svoje predpostavke tipa "proizvedejo vsaj 2,5 kolesi na dan" (ustno pojasnilo za primer A, za druga območja pojasnila niso podali). Ni jasno, kako so prišli do števila let v vseh primerih, razen tega, da morajo v primeru A proizvesti vsaj 2,5 kolesi na dan.

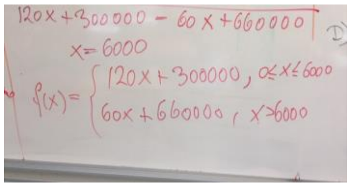


Rešitev druge danske skupine: Predpostavijo, da tovarna proizvede 50 000 koles vsako leto. Formula je:

((cena za kolo · 50 000) · število let) + cena izgradnje tovarne

(in na koncu "radi imamo matematiko"). Dodatnih zaključkov razen te formule med fazo formulacije niso imeli, vendar bi njena uporaba gotovo vodila k odgovoru (uporabite območje C).

Slika po učiteljevi institucionalizaciji o rešitvah pomembnih enačb za reševanje problema, odsekoma linearnih funkcijah in njihovem zapisu. V tem razredu je le polovica dijakov že pred tem našla "dobre" funkcije, ki jih učitelj uporablja tukaj.



Orodja za evalvacijo

Na koncu učne ure ali kmalu po njej lahko naslednje naloge uporabimo za hiter preizkus znanja, ki so ga dijaki usvojili med izvajanjem scenarija:

1. Prijatelj pravi: »Graf z najmanjšim naklonom in najmanjšo začetno vrednostjo bo dal najcenejšo možnost.« Kaj pravite?
   Odgovor: Res je, vendar nimamo vedno takih podatkov (kot recimo v tem scenariju).

2. Prijatelj pravi: »Premica z največjim naklonom in največjo začetno vrednostjo bo ustrezala najdražji možnosti.« Kaj pravite?
   Odgovor: Res je, vendar take premice ne moremo vedno najti (v primeru pričujočega scenarija taka premica ne obstaja).

3. Dana je enostavna situacija s podatki, ki so zapisani v tabeli. Podpisali ste pogodbo za proizvodnjo 5000 koles. Katero lokacijo boste izbrali?

Lokacija	Strošek izgradnje tovarne na tej lokaciji v EUR	Strošek proizvodnje enega kolesa v tovarni v EUR
G	0	200
H	300 000	100

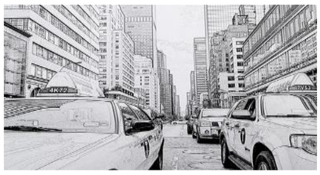
Odgovor: H je cenejši pri proizvodnji večji od 3000 koles.

4. Možna domača naloga: napišite dokument, v katerem direktorju podjetja svetujete, kam naj postavi tovarno. Razložite mu svoje razloge.

Predlogi za nadaljnje preiskovanje iz linearnega modeliranja

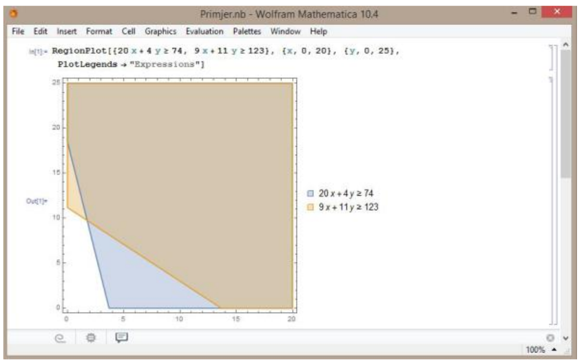
Vključite drugačne kontekste (na primer taksi, hitrost ...), kjer boste uporabili pridobljena znanja v novih situacijah (za nadaljnjo institucionalizacijo ključnih metod in zamisli).

1. Taksi AA ima začetno ceno 15 €, vsak prevoženi kilometer pa stane 5 €. Taksi BB ima začetno ceno 20 €, vsak prevoženi kilometer pa stane 4 €. S taksijem se nameravate odpeljati 8 kilometrov daleč. Katero taksi podjetje boste izbrali?



2. Cena plina za prvih 10 m^3 znaša 0,5 €, za večjo potrošnjo plina pa se cena zniža. Naslednjih 20 m^3 stane 0,4 € za m^3, potem pa cena pade na 0,3 € za m^3 plina. Poiščite funkcijo stroškov.

3. Športnik naj bi dnevno zaužil vsaj 74 mg vitamina B in vsaj 123 mg vitamina C. Multivitamin MM vsebuje 20 mg vitamina B in 9 mg vitamina C na 1 g pripravka. Multivitamin NN vsebuje 4 mg vitamina B in 11 mg vitamina C v 1 g pripravka.
Kakšni so lahko najmanjši odmerki multivitaminov MM in NN, da bo športnik zadostil svojim dnevnim potrebam? Zaužitje višjega odmerka od priporočenega ni nevarno.

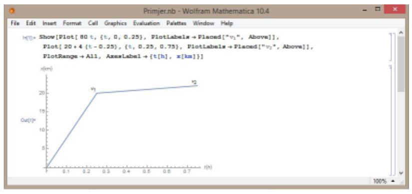


4. Ivana želi za praznovanje rojstnega dne s 17 gosti najeti prostor. Cena prostora RR je 100 € za najem in dodatnih 10 € za vsakega gosta. Cena prostora PP je 80 € za najem in dodatnih 12 € za vsakega gosta. Kateri prostor naj izbere?

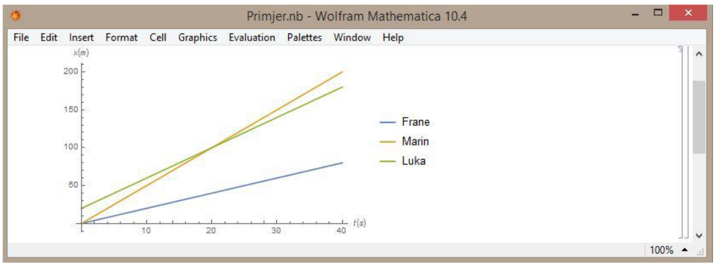
5. Par športnih copat stane 70 €. Podjetje, ki izdeluje športne copate, je v začetek proizvodnje investiralo 10 000 €. Izdelava enega para športnih copat stane 15 €. Izračunajte dobiček podjetja, če so izdelali 1000 parov športnih copat.

6. Glede na višino pologa banka ponuja različne obrestne mere. Če položite manj kot 5000 €, je letna obrestna mera 2 %. Pri pologu med 5000 € in 20 000 € znaša letna obrestna mera 2,2 %, pri pologu nad 20 000 € pa 2,5 %. Poiščite končno vsoto denarja po enem letu kot funkcijo pologa.

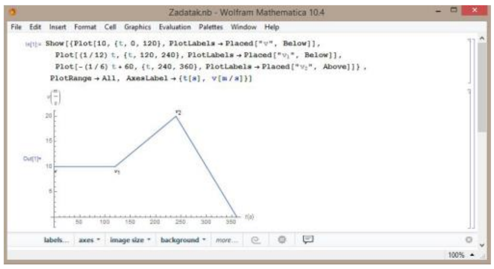
7. Ana se je s konstantno hitrostjo 80 km/h z avtomobilom vozila proti Zagrebu. Po 20 km ji je zmanjkalo goriva, zato je šla 2 km peš do najbližje črpalke. Do črpalke je potrebovala 30 minut. Poiščite graf poti v odvisnosti od časa. Poiščite Anino povprečno hitrost. (Graf je del rešitve.)



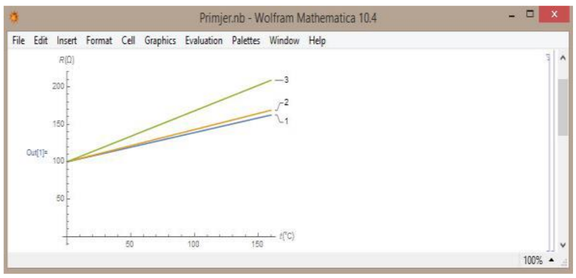
8. Martin in Franc sta šla na izlet s kolesom. Luka ju ni želel čakati, zato se je odpravil pred njima. Podan je graf poti v odvisnosti od časa.
Kdo je najhitrejši kolesar? Kdo je najpočasnejši? Kje bo Martin srečal Luka? (Dijaki naj ob nalogi dobijo tudi graf.)



9. Peter se je vozil z motorjem. Prvi 2 minuti je imel konstantno hitrost 10 m/s, po nadaljnjih 2 minutah pa je s konstantnim pospeševanjem dosegel hitrost 20 m/s. Nato je začel zavirati in se čez 2 minuti ustavil. Narišite graf hitrosti v odvisnosti od časa.

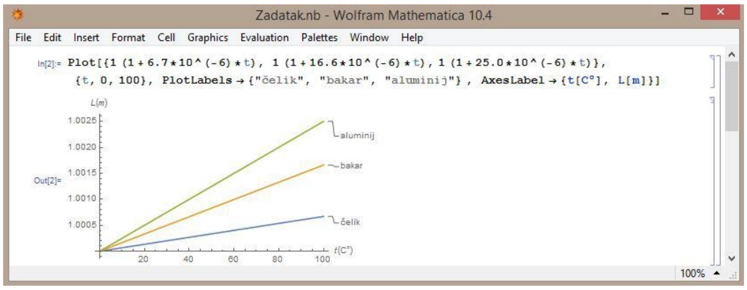


10. Upor žice se spreminja glede na temperaturo: $R(T) = R_0(1 + \alpha\, T)$, kjer R_0 predstavlja upor pri 0 ºC, α je temperaturni koeficient upora, in T je temperatura v ºC. Upor treh različnih materialov pri 0 ºC je 100 Ω.
Poiščite temperaturne koeficiente upora za te materiale, če so njihovi upori pri 100 ºC naslednji: 139 Ω (material 1), 143 Ω (material 2) in 168 Ω (material 3).
Na spletu poiščite tabelo temperaturnih koeficientov upora in ugotovite, katere materiale predstavljajo 1, 2 in 3!



11. Palice iz različnih materialov pri temperaturi 0 ºC merijo 1 m. Dolžina se glede na temperaturo spreminja: $L(T) = L_0(1 + \alpha\, T)$, pri čemer je L_0 dolžina pri 0 ºC, α je *temperaturni koeficient linearnega raztezka*, in T je temperatura v ºC. *Temperaturni koeficienti linearnega raztezka so naslednji*:
    Jeklo $6{,}7 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
    Baker $16{,}6 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
    Aluminij $25{,}0 \cdot 10^{-6}$ / ºC.

    Poiščite funkcijo dolžine v odvisnosti od temperature za jeklo, baker in aluminij.



Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Vloga konteksta pri zagotavljanju možnosti, da dijaki razvijajo matematične ideje, je eno od osnovnih načel RME. V tem scenariju naj bi kontekst tovarne koles vzpodbudil dijake, da formulirajo formule in grafe ter na podlagi tega sklepajo o zaključkih. Sklepanje vodi do uvedbe odsekoma definiranih funkcij. Vključimo lahko tudi drugačne kontekste (na primer taksi, hitrost, rojstnodnevna zabava, najem prostora …) in dosežemo uporabo pridobljenega znanja (pričakovanih dosežkov) v novih situacijah (za nadaljnjo institucionalizacijo uporabljenih metod in idej). Pričakujemo, da bodo dijaki ob učenju matematike skozi realne življenjske uporabe razvijali fleksibilne in uporabne matematične veščine.

Pomembnost in uporabnost

Scenarij vključuje naslednje vidike:

- *Realno življenje in gospodarstvo*:
    - linearno modeliranje (strošek taksija, stroški telefona in interneta, hitrost, rojstnodnevna zabava, najem prostora …)
    - finančno modeliranje (finančni modeli so lahko linearni ali nelinearni, na primer prihodek podjetja, dobiček, povprečni stroški, inflacija ...)
    - uvod v optimizacijo
- *Nadaljnje možnosti*: Znanja in veščine povezane s to temo so pomembne na mnogih področjih:
    - Linearni pojavi so v znanosti vseprisotni. Poleg tega je linearizacija pogosta metoda reševanja nelinearnih problemov, kadar je to mogoče. Pogosto izračunavamo linearno regresijo in koeficiente korelacije, zato da ustvarimo linearni model in da preizkusimo linearnost sklopa podatkov, tudi kadar ni jasno, da bi podatki izkazovali linearno povezavo.
    - Vsak bi moral znati voditi osebne finance in izdelati tabele z evidenco prihodkov in odhodkov, saj je to ključnega pomena za sprejemanje finančnih odločitev in načrtovanje. Poleg tega je poslovanje nemogoče brez finančnega modeliranja.
    - Uprave podjetij rutinsko uporabljajo optimizacijo procesov. Linearno programiranje, ki ga imenujemo tudi linearna optimizacija, je metoda za doseganje najboljših rezultatov (kot je največji možni dobiček ali najnižji strošek pri načrtovanju, proizvodnji in transportu) v matematičnem

modelu, kjer so zahteve predstavljene z linearnimi enačbami in neenačbami. Upravljalci z verigo preskrbe s hrano v podjetju optimizirajo stroške prevoza izdelkov ali storitev od dobaviteljev do kupcev.
- Naredimo lahko algoritem ali računalniški program za reševanje problema iz tega scenarija ali tudi širšega problema.

Preiskovalne veščine

V tem scenariju dijaki pridobivajo številne preiskovalne veščine, ki so prisotne v matematičnem modeliranju, pretvarjanju podatkov iz realnega življenja v matematični jezik, organiziranju podatkov, predstavljanju podatkov, iskanju optimalne vrednosti, oblikovanju predloga, sodelovanju in komuniciranju. Obseg, v katerem se te veščine eksplicitno razvijajo, je v veliki meri odvisen od načina, na katerega učitelj vključuje dijake v povratno informacijo v fazi potrjevanja, ko dijake povabi, da predstavijo svoje zaključke. Razvijanje teh veščin je lahko vključeno tudi v fazi formulacije. V nekaterih primerih učiteljem predlagamo, da dijakom dajo povratno informacijo v naslednjih urah.

Možnosti za nadaljevanje učnih ur

Scenarij je lahko del sklopa več učnih ur na temo linearnih pojavov, finančnega modeliranja in linearne optimizacije.

- *Predznanje*: za takšen scenarij od dijakov pričakujemo poznavanje linearnih funkcij in linearnih enačb.
- *Uvod*: kontekst z bogatim odprtim problemom, kot je na primer ta predlagan zgoraj. V naslednjih učnih urah lahko uporabimo različice zgoraj navedenih dodatnih problemov.

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija*: kot uvod v razpravo o stroških se uvede preglednica stroški. Dijaki oblikujejo prvi neformalni model situacije, kot je na primer
  ((strošek na kolo · 50 000) · število let) + cena izgradnje tovarne,
  in začnejo uporabljati izraze iz področja metod matematične optimizacije “stroški na kolo”, “doba povrnitve investicije”. Matematizacija tovarniškega konteksta v svet matematike ponuja veliko možnosti za nadaljnji razvoj in institucionalizacijo pričakovanih dosežkov na podlagi prispevkov dijakov. Dijaki v skupinah poskušajo poiskati rešitev in predstavijo svoje ugotovitve. Učitelj vodi razpravo o podobnostih in razlikah med ugotovitvami, tako da vsi pridejo do končnih zaključkov.
- *Vertikalna matematizacija*: Matematika, ki jo uporabljamo v problemu, se nadalje razvija. Iskanje splošne hipoteze ali algoritma za iskanje optimalnih stroškov za dano preglednico s podatki. Nadalje lahko model naredimo bolj abstrakten ali splošen, glejte zgoraj (Predlogi za nadaljnje preiskovanje).

Zaključek, razmislek in predlogi za nadaljnje delo

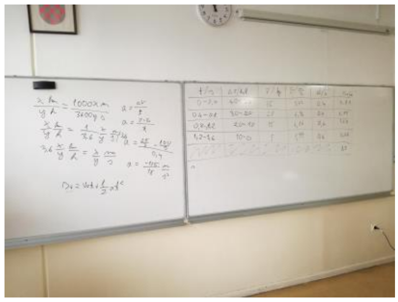
Dijak razmišlja, povezuje ideje in uporablja koncepte in veščine; učitelj poudari glavne ideje in koncepte.

V naslednji uri lahko podrobneje raziščemo, kaj nam zaključki scenarija povedo o začetnih ugotovitvah v skupinah: Katere ideje so bile koristne? Katere bi lahko izboljšali? Kako lahko oblikujemo splošno hipotezo ali algoritem za iskanje optimalnih stroškov za dano preglednico podatkov? Katere strategije ali načini dela so vam pomagali priti do rezultatov?

MERIA modul “Zavorna pot“

Kvadratna odvisnost

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Zavorna pot je kvadratno odvisna od začetne hitrosti.
Splošni cilji	 *Predstavitev rešitve, Hrvaška.* Kvadratne funkcije in njihov opis s konstantnim drugim odvodom (drugimi diferencami za kvadratno zaporedje) ali s konstantno padajočim ali naraščajočim prvim odvodom (diferencami za kvadratna zaporedja). Računanje z različnimi merskimi enotami. Organiziranje podatkov. Oblikovanje funkcijske zveze (zapis formule za funkcijsko pravilo). Risanje grafov (kvadratnih) funkcij brez ali z uporabo računalnika. Preiskovalne veščine: analiziranje podatkov in iskanje vzorcev v tabelah. Utemeljitev (argumentacija) svojih dognanj pri predstavitvi (izračuni prevladujejo med samim procesom in dijaki morajo ostalim povzeti svoj pristop). Interdisciplinarne veščine: dijaki morajo delati s fizikalnimi količinami in razumeti, kaj se dogaja (premostitev med različnimi oznakami in postopki). Pri pisanju poročila so poudarjene komunikacijske spretnosti. Dijaki razpravljajo tudi o odgovornosti voznikov in varnosti v prometu.
Potrebno matematično predznanje	Osnovno znanje funkcij, zveza med konstantno hitrostjo in razdaljo, povprečna hitrost, pretvorba iz km/h v m/s (in obratno)
Letnik	Dijaki, stari 15-16 let (oziroma kadar se uvede kvadratna funkcija)
Trajanje	90 minut, dve šolski uri
Potrebni material	Izročki s preglednicami, ki jih je potrebno izpolniti, računalo, računalnik, milimetrski papir

Problem: Starši izražajo zaskrbljenost glede hitrostnih omejitev v okolici šol. Skupina neodgovornih voznikov na drugi strani pojasnjuje, da je skrb odveč, saj bodo pravočasno zavrli. Raziščite, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti tik pred začetkom zaviranja. Obvestite župana o posledicah spreminjanja najvišje hitrosti. Svoja priporočila podprite z reprezentacijami kot recimo tabelami in grafi.
Privzemimo, da hitrost avtomobila ob zaviranju pade za 10 km/h vsake 0,4 sekunde.
Za beleženje opažanj in izračunov lahko uporabite preglednico, nato pa čim bolje utemeljite svoj odgovor.

Faza	**Dejavnosti in navodila učitelja**	**Dejavnosti in odzivi dijakov**
Devolucija (Prenos) (didaktična) 10 minut	Učitelj razdeli dijaki v skupine po 3 ali 4. Učitelj predstavi problem in zagotovi, da dijaki razumejo predpostavko o konstantno padajoči hitrosti med zaviranjem. Predebatira o ideji majhnih časovnih intervalov kjer se lahko gibanje aproksimira z gibanjem s konstantno (povprečno) hitrostjo. Učitelj preveri razumevanje izrazov v tabeli, osnovno zvezo med hitrostjo, časom in razdaljo, kako pretvorimo km/h v m/s in idejo, da lahko dano hitrost 40 km/h nadomestimo z drugačnimi vrednostmi. Učitelj pojasni, da imajo dijaki svobodno izbiro pri uporabi strategij. Uporabljajo lahko kakršno koli tehnologijo. Učitelj razdeli izročke z nalogo. Dijaki pripravijo kalkulatorje (če nimajo svojih, jim jih priskrbi učitelj), računalnik in milimetrski papir. Učitelj pove, da imajo na voljo 20 minut, da raziščejo, kako se spreminjata hitrost in razdalja in da pridejo do nekih zaključkov o tem, kakšna je povezava med njima.	Dijaki poslušajo, se pogovarjajo o svojih idejah oblikujejo odgovore na vprašanja.
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 20 minut	Učitelj hodi po razredu in opazuje delo dijakov brez vmešavanja s predlogi ali vprašanji. V primeru, da več skupin začne novo tabelo za vsako novo začetno hitrost, učitelj načne kratko skupinsko predstavitev, kako so	Dijaki v skupinah razpravljajo o strategijah. Izpolnjujejo tabelo – uporabljajo kalkulatorje ali IKT za risanje točk …

	se posamezne skupine spopadale s to težavo. Verjetno vsaj ena od skupin ugotovi, da lahko uporabijo predhodne izračune pri problemu zavorne poti za druge začetne hitrosti in da lahko iz te tabele preberejo tudi zavorne poti za nižje začetne hitrosti. To se lahko uporabi kot povratna informacija za preostale skupine.	Govorijo o natančnosti, preizkušajo primere z drugačno začetno hitrostjo ... Člani skupine lahko uporabijo različne ideje in individualno izpeljejo rešitev. Dijaki lahko uporabljajo izračune, grafe ali fizikalna dejstva pri iskanju zaključkov: - zavorna pot se ne spreminja konstantno, - povezava med začetno hitrostjo in zavorno potjo ni linearna, - ob povečanju začetne hitrosti se podaljša tudi zavorna pot, toda ne proporcionalno. Nekateri dijaki bodo morda opazili, da so druge diference (približno) konstantne in za izračun uporabili rekurzivno metodo.
Formulacija (Zapis ugotovitev) (didaktična) 10 minut	Učitelj z vsako skupino posebej na kratko razpravlja o njihovih ugotovitvah (dijaki mu jih na kratko predstavijo). Zastavi lahko vprašanja in se pogovori o idejah z dijaki, še posebej, če se je skupini med delom zataknilo. V skupinah, kjer so znotraj skupine delali z različnimi strategijami, naj se dijaki (zaradi pomanjkanja časa) osredotočijo na eno in jo uporabijo pri oblikovanju zaključkov in predstavljanju idej. Učitelj opomni dijake, da je cilj te aktivnosti, da ugotovijo, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti tik pred začetkom zaviranja in da so na podlagi tega zmožni dati ustrezno priporočilo. Tako so dijaki pozvani, da pripravijo predstavitev za župana o posledicah spreminjanja	Dijaki na kratko predstavijo svoje ideje in postavljajo vprašanja.

	najvišje hitrosti in da priporočila podprejo z reprezentacijami kot recimo tabelami in grafi.	
Reševanje (Delovanje) v kombinaciji s Formulacijo (Zapisom ugotovitev) (adidaktična) 20 minut	Učitelj opazuje.	Dijaki poskušajo posplošiti svoje izračune in opažanja. Nekateri bodo morda izbrali drugačno strategijo za posploševanje ali pristop k problemu. Dijaki pripravljajo predstavitev in priporočila za župana.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 25 minut	Učitelj dijakom naroči, naj predstavijo in primerjajo svoje strategije, in vpraša, zakaj nekatere strategije ne bodo pripeljale do dokaza, da je zveza kvadratna.	Dijaki poslušajo, zastavljajo vprašanja in razpravljajo o ostalih strategijah in rešitvah.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 minut	Učitelj izpostavi matematične podobnosti in razlike med strategijami dijakov, razloži, zakaj nekatere strategije ne pripeljejo do dokaza, čeprav na grafu izgledajo prepričljivo in s pomočjo tehnologije mogoče dobijo formulo, ki opisuje kvadratno zvezo. Učitelj predstavi splošen zapis kvadratne funkcije.	Dijaki poslušajo in povežejo svoje rešitve s splošno kvadratno funkcijo.

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	Dijaki dopolnijo tabelo s podatki (*v*, *d*).

	Čas (sekunde)	**Sprememba hitrosti med zaviranjem (km/h)**	**Povprečna hitrost (km/h)**	**Povprečna hitrost (m/s)**	**Časovni interval Δt (s)**	**Prevožena razdalja Δd (m)**
	$t = 0$ do $t = 0{,}4$	$v = 40$ do $v = 30$	35	$\frac{175}{18}$	0,4	$\frac{35}{9}$
	$t = 0{,}4$ do $t = 0{,}8$	$v = 30$ do $v = 20$	25	$\frac{125}{18}$	0,4	$\frac{25}{9}$
	$t = 0{,}8$ do $t = 1{,}2$	$v = 20$ do $v = 10$	15	$\frac{25}{6}$	0,4	$\frac{15}{9}$
	$t = 1.2$ do $t = 1{,}6$	$v = 10$ do $v = 0$	5	$\frac{25}{18}$	0,4	$\frac{5}{9}$
Prevožena razdalja od začetka zaviranja (m)						$\frac{80}{9}$

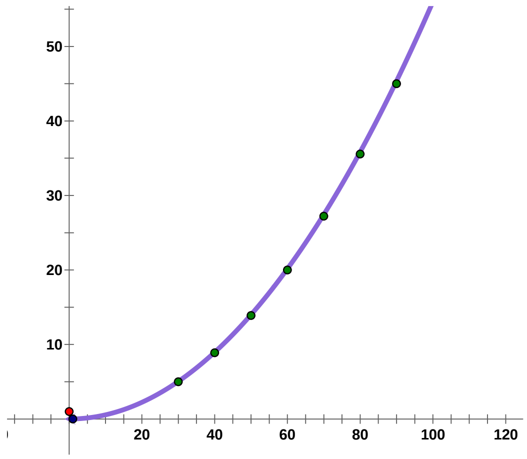
Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Zavorna pot (m)	5	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$

Ali z decimalnimi števili, na primer

Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100
Zavorna pot (m)	5	8,89	13,89	20	27,22	35,56	45	55,56

Z analizo podatkov lahko dijaki zaključijo naslednje:

- Zavorna pot je daljša, kadar je hitrost višja.
- Zveza med hitrostjo in zavorno potjo ni linearna (kvocient $\frac{\Delta d}{\Delta v}$ ni konstanten).
- Če se hitrost podvoji, se zavorna pot podaljša štirikratno. Če se hitrost potroji, se zavorna pot podaljša devetkratno.
- Dijaki lahko narišejo točke (v, d) in pridejo do zaključka, da je zveza morda kvadratna. Lahko zapišejo kvadratno funkcijo
$$d = av^2 + bv + c$$
in določijo neznane koeficiente a, b, c z uporabo podatkov iz tabele in z reševanjem sistema linearnih enačb. Na ta način bodo dobili približek. Ta strategija ne bo pripeljala do dokaza, da je zveza kvadratna.



- Po zaključku, da je povezava morda lahko kvadratna, lahko dijaki uporabijo IKT in poiščejo kvadratno regresijo. Dobili bodo približek. Ta strategija ne bo pripeljala do dokaza, da je zveza kvadratna.
- Na podlagi podatkov iz tabele lahko dijaki posplošijo:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0{,}4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0{,}4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0{,}4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0{,}4$$

$$d_{40} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8{,}89$$

$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0{,}4$$

$$d_{50} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9) = \frac{5}{9}\cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13{,}89$$

$$d_{60} = d_{50} + 55\cdot\frac{5}{18}\cdot 0{,}4$$

$$d_{60} = \frac{5}{9}(1+3+5+7+9+11) = \frac{5}{9}\cdot 36 = 20$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9}\big(1+3+\cdots+(2n-1)\big) = \frac{5}{9}\cdot n^2$$

Pomemben zaključek je, da ob opazovanju zavorne poti iščemo trenutek, ko je hitrost enaka 0; torej bomo tolikokrat odšteli 10 od v_0, da bomo na koncu dobili 0:

$$v_0 - 10n = 0 \Longrightarrow n = \frac{v_0}{10}$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9}\cdot\left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180}{v_0}^2 \approx 0{,}0056\,{v_0}^2$$

V tej formuli uporabijo hitrost v_0 v km/h in dobijo razdaljo v metrih.

- Dijaki lahko uporabijo računala in izpolnijo tabelo v decimalnih številih. Rezultat ne bo eksakten in ne bo enostavno prepoznati vzorca.

- Dijaki lahko uporabijo podatek, da se hitrost zmanjša za 10 km/h vsake 0,4 sekunde. Izračunajo lahko, da se hitrost zmanjša za 25 km/h vsako sekundo oziroma 6,94 m/s vsako sekundo, kar pomeni, da je pospešek enak $a = 6{,}9\dot{4}$ m/s². Nato lahko uporabijo fizikalne formule:

$$v = v_0 - at,\, d = v_0 t - \frac{a}{2}t^2.$$

  Uporabijo pomembno dejstvo, da ob opazovanju zavorne poti iščemo trenutek, ko je hitrost enaka 0. Iz prve formule ($v = 0$) izračunajo čas $t = \frac{v_0}{a}$, kar vstavijo v drugo, da dobijo

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.\dot{8}} = 0{,}072v_0^2.$$

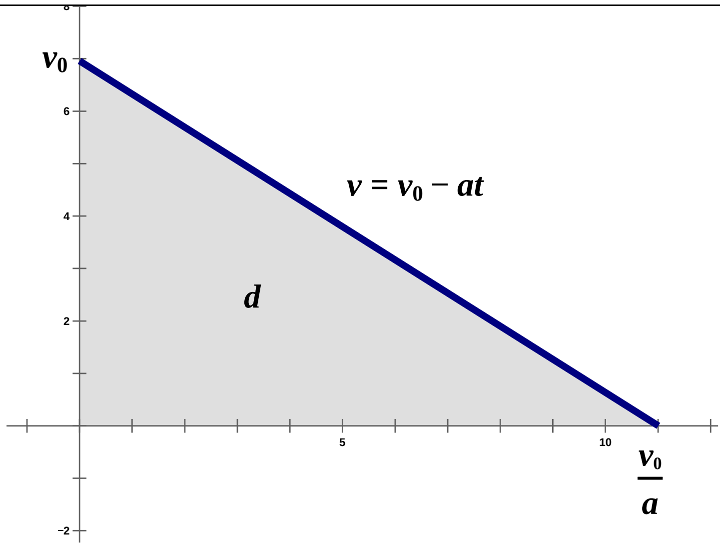
  V tej formuli uporabijo hitrost v_0 v m/s in dobijo razdaljo metrih.
- Če dijaki izračunajo pospešek v km/h², dobijo $a = 90000$ km/h². Nato uporabijo hitrost v_0 v km/h in dobijo razdaljo v kilometrih

$$d = \frac{v_0^2}{180000}, \text{ oziroma metrih } d = \frac{v_0^2}{180}.$$

- Dijaki lahko narišejo *v*-*t* graf in izračunajo prevoženo razdaljo kot ploščino pod grafom:

$$d = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_0}{a}\cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0{,}072v_0^2.$$

  V tej formuli uporabijo hitrost v_0 v m/s.

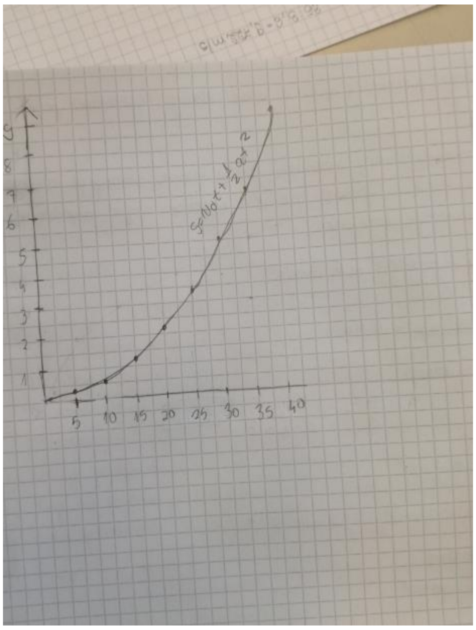
	v_0 6 4 2 −2 5 10 $v = v_0 - at$ d $\frac{v_0}{a}$

	Čas (sekunde)	**Sprememba hitrosti med zaviranjem (km/h)**	**Povprečna hitrost (km/h)**	**Povprečna hitrost (m/s)**	**Časovni interval Δt (s)**	**Prevožena razdalja Δd (m)**
	t = 0 do t = 0,4	v = 40 do v = 30	35			
Prevožena razdalja od začetka zaviranja (m)						

Hitrost tik pred zaviranjem (km/h)	40							
Zavorna pot (m)								

Pojasnilo glede materialov za dijake

V začetni fazi bodo dijaki dobili preglednici, ki ju je potrebno izpolniti. Cilj je spodbuditi dijake, da se posvetijo časovnim intervalom 0,4 sekunde, povprečnim hitrostim v teh intervalih (v km/h in m/s) ter prevoženi poti v teh intervalih. Dijaki bodo sami ugotovili, da računajo dele poti, dokler hitrost ne pade do 0. Število vrstic v tabeli se bo zato spremenilo in dijaki bodo sami določili, koliko vrstic potrebujejo. V drugi tabeli bodo dijaki zraven predlagane hitrosti 40km/h še sami izbrali druge morebitne ustrezne hitrosti. Dijaki bodo tabele uporabljali v fazi reševanja. Če izpolnjevanje tabele za različne začetne hitrosti dijakom vzame preveč časa, predlagamo izmenjavo podatkov med skupinami. Dijaki naj bi v tej fazi opazili, da si pri določanju zavorne poti za druge začetne hitrosti lahko pomagajo s prejšnjimi izračuni in podatke za zavorno pot preberejo iz prejšnje tabele. V primeru, da večina skupin uporabi novo tabelo za vsako novo začetno hitrost, lahko učitelj po približno 20 minutah adidaktične faze prosi skupine, da na kratko predstavijo, kako se spopadajo s tem vprašanjem. Predvidoma bo vsaj ena od skupin našla rešitev in to lahko služi kot povratna informacija za vse ostale skupine.



Za risanje grafov lahko dijaki uporabljajo milimetrski papir, karo papir ali računalnik. Dijakom, ki so uspešno prišli do vsote $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$, lahko kot vizualni pripomoček ponudimo kocke za dokaz brez besedne razlage.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

Med izvajanjem scenarija se moramo držati predvidenih didaktični in adidaktičnih faz, fazo reševanja pa moramo izpeljati adidaktično. Pomembno je, da izpeljemo fazo verifikacije, v kateri dijaki ovrednotijo predstavljene rešitve. Nekatere dele scenarija lahko tudi spremenimo. V tem poglavju bomo predstavili didaktične spremenljivke ali dele scenarijev, ki jih lahko spremenimo ter tudi okoliščine, v katerih je potrebno posredovanje učitelja.

Didaktično okolje (Milje): Problem lahko predstavimo na različne načine. Učitelj lahko problem opiše, uporabi prezentacijo ali video posnetek. Hitrost 40 km/h je izbrana naključno in jo lahko nadomestimo tudi z drugo, vendar pa zaradi pomembnosti, da dijaki opazijo pravilo, priporočamo, da uporabimo večkratnik števila 10. Padanje hitrosti za 10 km/h vsake 0,4 sekunde smo izbrali zato, ker je to realistično, hkrati pa dijakom omogoča, da opazijo pravilo in se zato naj ne spreminja. Tabeli sta predvideni kot pomoč pri urejanju podatkov, vendar pa ne zahtevamo, da ju dijaki uporabljajo, saj lahko pridejo do splošnih zaključkov brez računanja zavorne poti za različne hitrosti. Tabeli sta podani samo deloma, zato morajo dijaki, ki ju uporabljajo, sami določiti število vrstic, ki jih morajo izračunati v prvi tabeli, in katere hitrosti je potrebno vključiti v drugo.

Učitelj naj v tabeli ne vpisuje dodatnih podatkov, saj tako omogoči dijakom, da razvijajo spretnosti raziskovanja. Dijake se lahko spodbuja, da za risanje, predstavitve in računanje uporabljajo IKT, vendar pa se lahko scenarij izpelje tudi brez uporabe IKT. Učitelj lahko pripravi tudi svoje gradivo za uporabo IKT. Če se odloči za to možnost, mora poskrbeti, da IKT dijakom nudi le pomoč pri izračunavanju in predstavljanju podatkov, ne sme pa jih usmerjati k zaključkom.

Trajanje posameznih faz lahko prilagodimo glede na dijake, vendar se izogibamo prevelikim odstopanjem.

Če med *adidaktično fazo* skupine ne najdejo splošne formule, ki povezuje zavorno pot z začetno hitrostjo, lahko učitelj zastavi naslednja vprašanja:

- Ali opazite kakšno pravilo med dobljenimi vrednostmi zavorne poti?
- Lahko dobljene vrednosti grafično predstavite? Ali lahko povežete grafične in računske prikaze?
- Kakšna je hitrost vozila, ko se ustavi?
- Če ste pri izpolnjevanju tabel določili zavorno pot za različne začetne hitrosti, ali lahko naredite enako za splošno hitrost *v*?
- Katere fizikalne formule vam lahko pri tem pomagajo?
- Kako vam lahko pri iskanju formul ali povezav pomaga tehnologija?

Učitelju ni potrebno poučevati vsake skupine posebej. Zraven tega ni nujno, da s skupino ostane, dokler ne odgovorijo na zastavljena vprašanja. Ta vprašanja lahko obravnava kot manjšo *devolucijo (prenos)* nekega omejenega problema in nato dovoli dijakom, da adidaktično nadaljujejo s *fazo reševanja* in *formulacije*. Učitelj naj ne spodbuja razprave o nadaljnjih vprašanjih in naj dijakov ne usmerja k odgovorom.
Skupine, ki naletijo na težave pri dokazovanju formule $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$, lahko učitelj dodatno usmeri:

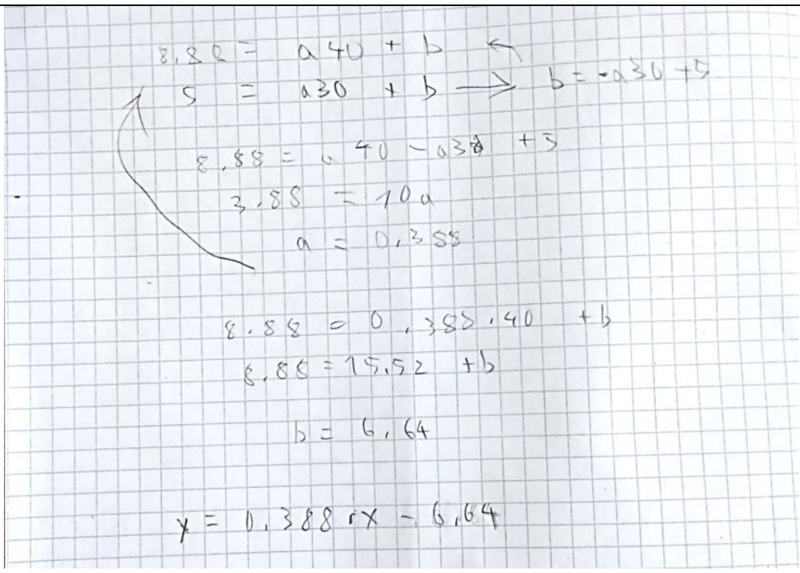
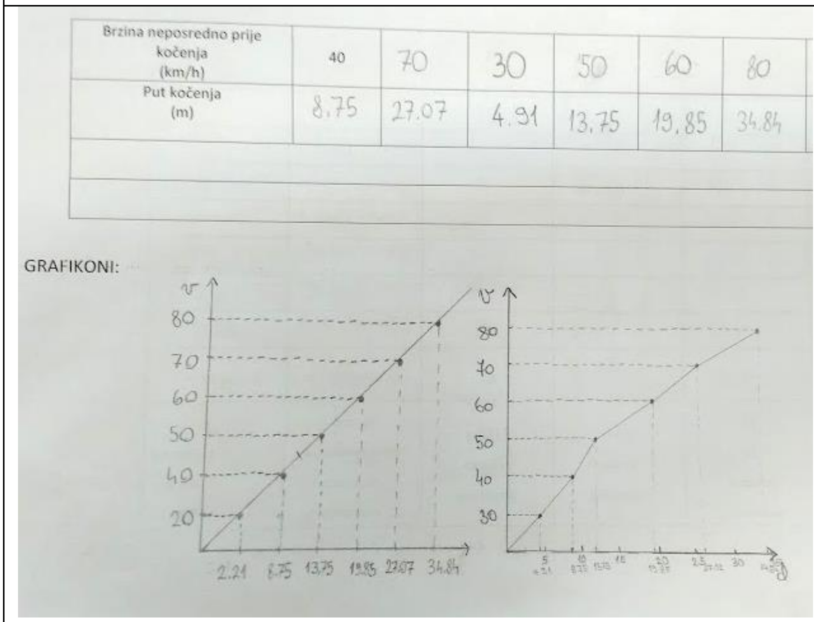
- za vsako dobljeno vsoto narišite točko in opazujte;
- označite vsoto s S in jo dvakrat zapišite, vendar v različnem zaporedju: od prvega do zadnjega in od zadnjega do prvega.

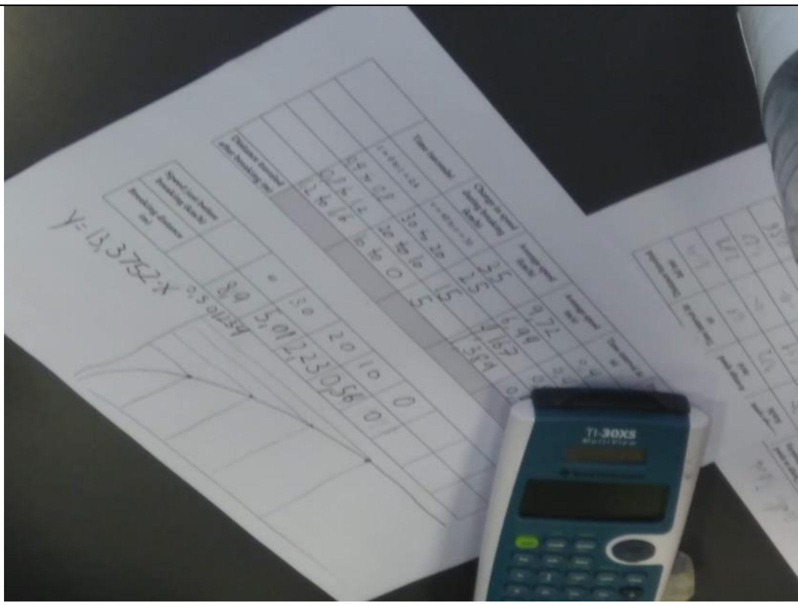
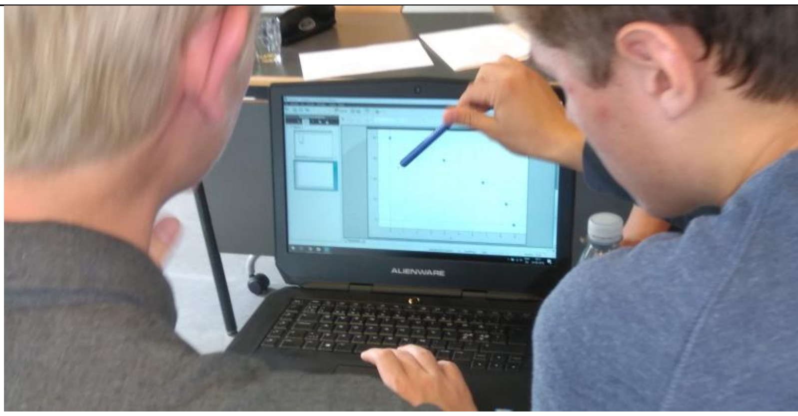
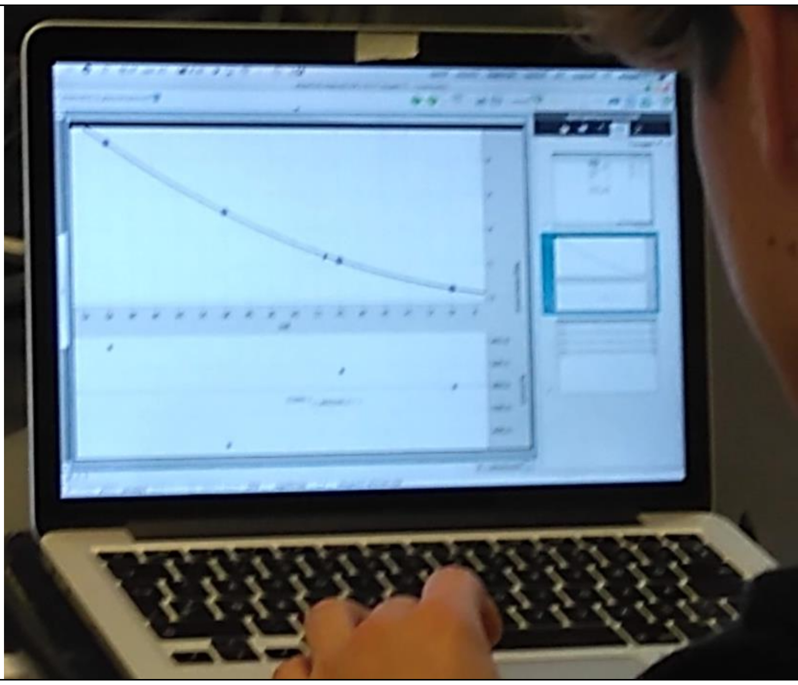
Ni nujno, da dijaki formulo dokažejo v *adidaktični* fazi. Dobro je, če vsaj opazijo, da je dobljena vsota enaka n^2, dokaz pa se nato izvede didaktično v fazi verifikacije.
Dijaki bodo začetne hitrosti določali sami. Verjetno bodo izbirali hitrosti 50, 60, 70 ... km/h. Če izberejo hitrosti, ki niso večkratniki števila 10, bodo imeli več težav pri določanju trenutka, ko hitrost postane 0, ker vrednot ne bo večkratnik 0,4 s. V tem primeru bo težje določiti pravilo. O izbiri hitrosti se lahko pogovorimo v fazi verifikacije.
Učenci lahko zavorno pot predstavijo z ulomki ali decimalnimi števili. Zapis z decimalnimi števili bo zgolj približen, zato nekaterih pravil ne bo možno opaziti. O razliki med obema zapisoma se ravno tako pogovorimo v fazi verifikacije.

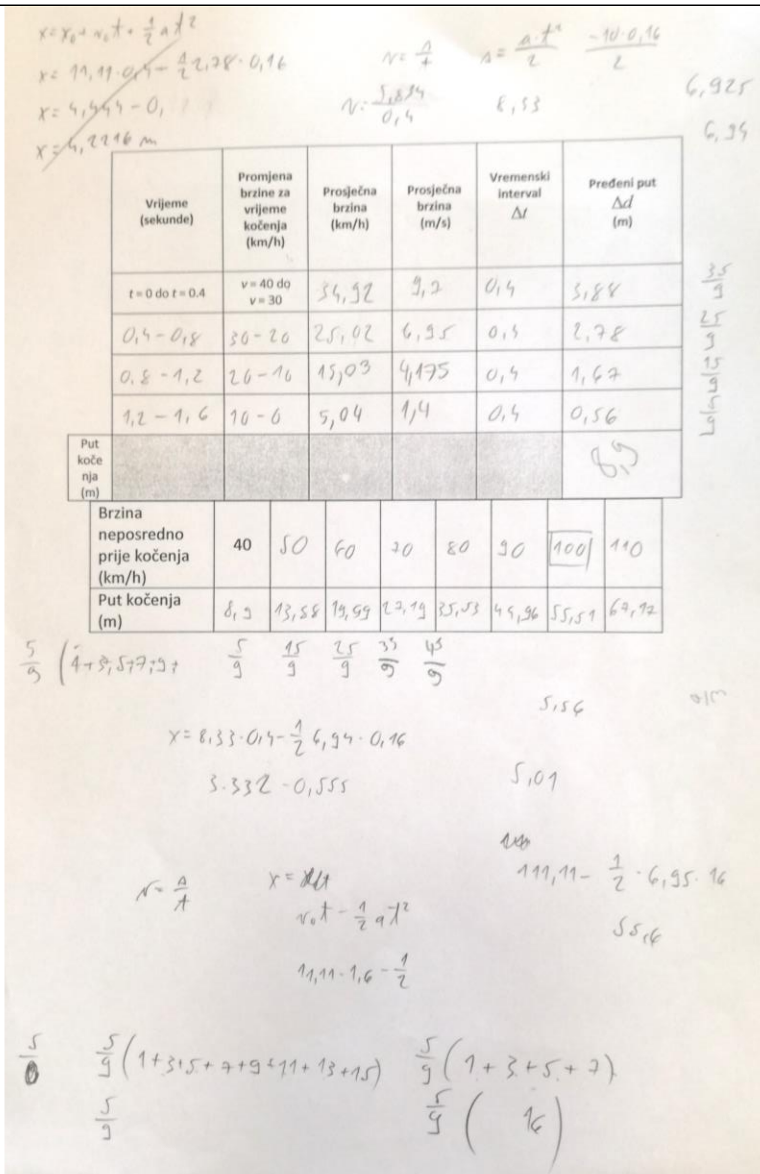
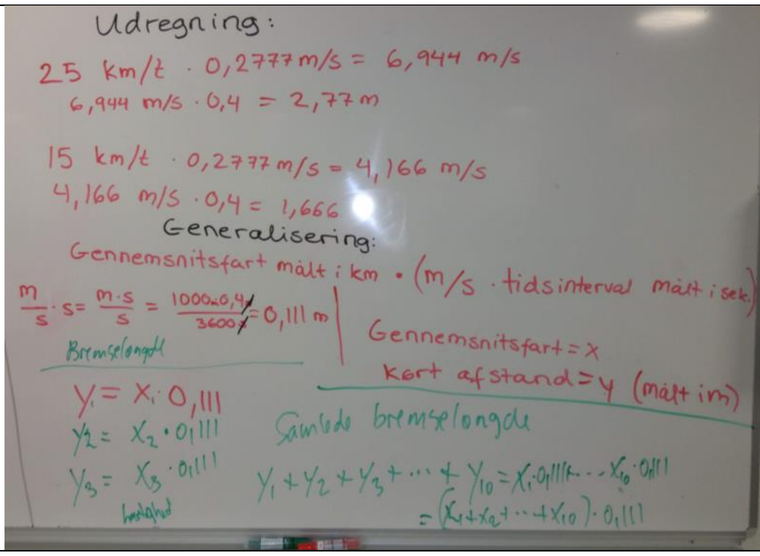
V fazi *institucionalizacije* je pomembno, da se pogovorimo o večini (ali tudi vseh) strategij, o katerih smo govorili v razredu, in jih povežemo med seboj.

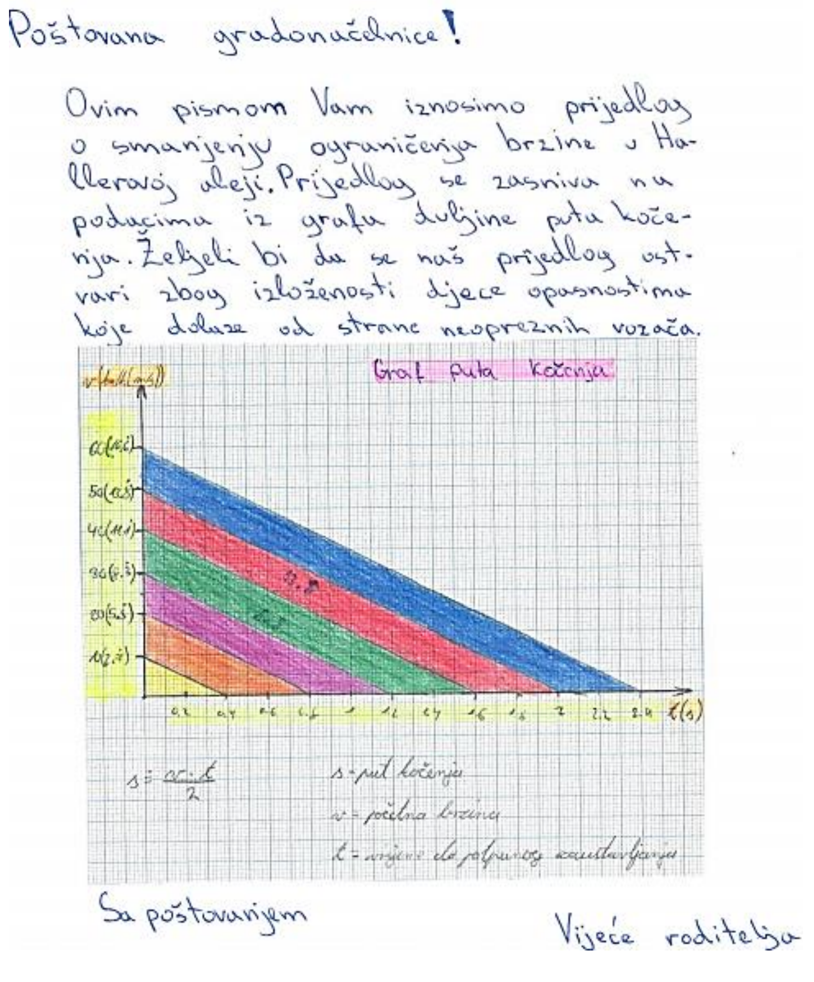
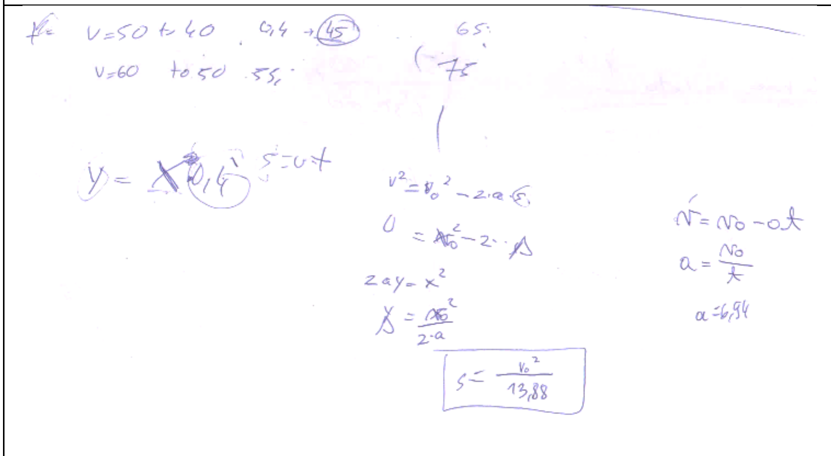
Opažanja iz prakse

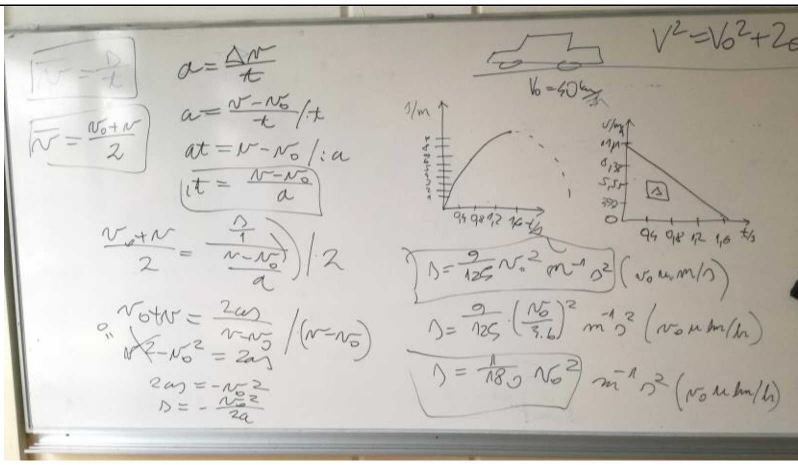
V nekaterih skupinah so dijaki delali napake v izračunih in zato dobili napačne vrednosti zavornih poti za nekatere začetne hitrosti. V prvi fazi formulacije lahko učitelj naroči učencem iz različnih skupin, da primerjajo rezultate in popravijo napačne.

	*Nekateri dijaki so predvidevali, da je odvisnost med hitrostjo in zavorno potjo linearna. Z uporabo podatkov iz tabele so določili linearno funkcijo.*
	*V nekaterih skupinah so dijaki poskušali z risanjem točk, tako da ležijo na premici ali kot graf odsekoma linearne funkcije.* *V tem primeru lahko učitelj dijake vpraša za pojasnilo, zakaj mislijo, da je odvisnost linearna, ali poznajo kakšne lastnosti linearne funkcije in ali lahko katere od teh lastnosti najdejo v podatkih. Dijaki bi naj prišli do zaključka, da odvisnost ni linearna, ker kvocient razlik ni konstanten.*

	*V nekaterih skupinah so pot prikazali na x-osi.*
	*Nekateri dijaki so uporabili IKT.*
	*Ko so dijak ugotovili, da bi odvisnost lahko bila kvadratna, so prišli do kvadratne regresije.*

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>V nekaterih skupinah so dijaki uporabili ulomke in dobili vsote zaporednih lihih števil.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Dijaki so prišli do vsot nekih drugih zaporedij. V tem primeru naj učitelj zaključi njihovo delo v fazi institucionalizacije.</td>
</tr>
</table>

 Poštovana gradonačelnice! Ovim pismom Vam iznosimo prijedlog o smanjenju ograničenja brzine u Hallerovoj aleji. Prijedlog se zasniva na podacima iz grafa duljine puta kočenja. Željeli bi da se naš prijedlog ostvari zbog izloženosti djece opasnostima koje dolaze od strane neopreznih vozača. Sa poštovanjem Vijeće roditelja	*Nekateri dijaki so risali grafe v-t za različne začetne hitrosti in izračunali zavorno pot kot ploščino pod grafom. V tem primeru naj učitelj nadaljuje s to idejo v fazi institucionalizacije in nariše graf v-t za splošno hitrost v.*
	*Nekateri dijaki so uporabili formule* $a = \frac{\Delta v}{t}$, $\bar{v} = \frac{s}{t}$ *in* $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ *ter dobili formulo* $v^2 - v_0^2 = 2as$ *(1). Ker je hitrost v za pot, enako celotni zavorni poti, enaka 0, sledi* $s = -\frac{v_0^2}{2a}$, *kjer je pospešek a vzet z negativnim predznakom.*

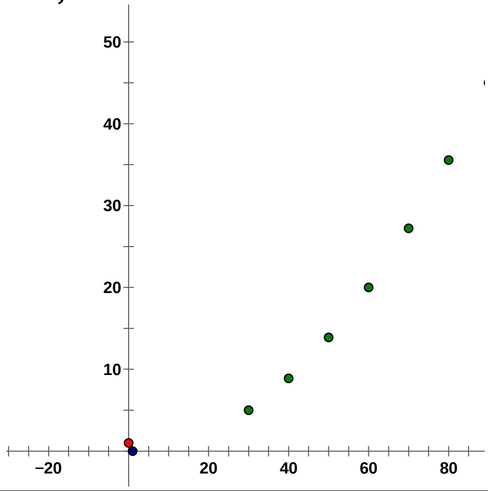
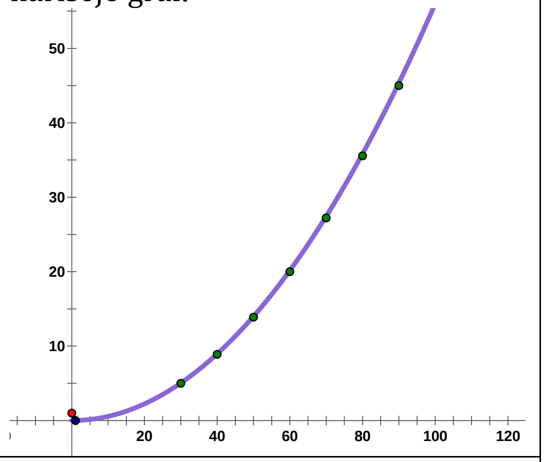


Formulo (1) lahko dobimo tudi tako, da izločimo čas t v formulah $v = v_0 + at$ in $s = v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ ali pa dijaki formulo poznajo že iz fizike.

Z uporabo formule (1) bodo dijaki ugotovili kvadratno odvisnost zavorne poti od začetne hitrosti avtomobila brez računanja konkretnih vrednosti. Skupine, ki se lotijo problema na ta način, bodo verjetno pri delu hitrejše kot ostali, zato jih lahko usmerimo k dodatnim aktivnostim: pregledajo lahko tabeli in se osredotočijo na zahtevane podatke v tabelah (npr. zakaj je povprečna hitrost pomemben podatek?); naročimo jim, naj grafično predstavijo odvisnost zavorne poti od začetne hitrosti; pripravijo lahko razlago pomembnosti hitrostnih omejitev v okolici šol ali raziščejo odvisnost *poti ustavljanja* od začetne hitrosti (Predlogi za nadaljnje preiskovanje 1).

Zaključek:
Opazimo lahko, da nekateri dijaki pridejo do zaključkov z opazovanjem dobljenih vrednosti, nekateri pa poskušajo opisati, kako je zavorna pot povezana s hitrostjo tik pred zaviranjem. Glejte spodnjo tabelo:

<table>
<tr><th>Vrednosti</th><th>Odvisnost</th></tr>
<tr><td>Dijaki izračunajo zavorno pot za nekaj hitrosti, na primer 40km/h in 70km/h, in zaključijo, da je zavorna pot pri 70km/h predolga, zato predlagajo hitrostno omejitev 40km/h.</td><td>Dijaki s pregledom rezultatov ugotovijo, da odvisnost ni linearna (pri višjih hitrostih se sprememba hitrosti odraža v bistveno večji spremembi zavorne poti).</td></tr>
<tr><td>Dijaki izpolnijo tabelo z več podatki, na primer
<table>
<tr><td>Hitrost (km/h)</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Zavorna pot (m)</td><td>5</td><td>8.89</td><td>13.89</td><td>20</td><td>27.22</td><td>35.56</td><td>45</td></tr>
</table>
in ob primerjanju vrednosti dajejo predloge.</td><td>Dijaki s pregledom vrednosti v tabeli ugotovijo, da bi odvisnost lahko bila kvadratna, ker se pri podvojeni hitrosti zavorna pot podaljša s faktorjem 4. (primerjajo 30 km/h in 60 km/h).</td></tr>
</table>

Dijaki narišejo točke in dajejo predloge glede na položaj točk. 	Dijaki narišejo točke in ugotovijo, da bi odvisnost lahko bila kvadratna ter narišejo graf. 
	Dijaki ugotovijo, da je odvisnost kvadratna in uporabijo IKT za kvadratno regresijo.
	Dijaki ugotovijo, da je odvisnost kvadratna in uporabijo podatke iz tabel, da določijo koeficiente kvadratne funkcije.
	Dijaki uporabijo argumente, da dokažejo, da je odvisnost kvadratna (glej *Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja*).

Čeprav je računanje in zbiranje podatkov v tem scenariju pomembno, bi morali dijaki čutiti potrebo po nadaljnjem raziskovanju in ugotavljanju odvisnosti. Če se vsi dijaki zadovoljijo z odgovori, ki jih pridobijo s pregledom številk, lahko učitelj v fazi institucionalizacije razloži, kaj pomeni “določiti odvisnost”.

Orodja za evalvacijo

Ob koncu ure ali ob začetku naslednje ure lahko dijakom zastavimo nekaj nalog:

1. Dva avta se peljeta po cesti. Hitrost enega je trikratnik hitrosti drugega. Bo zavorna pot hitrejšega vozila trikratnik zavorne poti drugega vozila? Utemeljite odgovor.
   Odgovor: Ne. Zavorna pot je kvadratno odvisna od hitrosti tik pred zaviranjem. Zato bo zavorna pot hitrejšega vozila devetkratnik zavorne poti drugega vozila.

2. Vozilo se premika s hitrostjo 80 km/h. Do katere hitrosti moramo zmanjšati hitrost gibanja, da se bo zavorna pot razpolovila?
   Odgovor: Hitrost moramo zmanjšati na četrtino prvotne hitrosti, torej na 20 km/h.

3. Na zavorno pot vpliva začetna hitrost in tudi vremenski pogoji na cesti. Nekega dne so izvedli meritev in ugotovili, da se je vozilo, ki se je premikalo s hitrostjo 40 km/h, ustavilo po 10 metrih. Po koliko metrih se bo pri enakih pogojih ustavilo vozilo, ki se premika s hitrostjo 70 km/h?
Odgovor: Zavorna pot je kvadratno odvisna od začetne hitrosti, zato sklepamo, da lahko to odvisnost zapišemo $d(v_0) = kv_0^2$. *V tej nalogi bi to pomenilo, da velja* $d(40) = 10$, *zato je* $k = \frac{d}{v_0^2} = \frac{1}{160}$. *Vozilo, ki se premika s hitrostjo 70 km/h, se bo ustavilo po* $d(70) = \frac{70^2}{160} = 30{,}625 \approx 30{,}6\ m$.

Predlogi za nadaljnje preiskovanje

1. *Pot ustavljanja* vozila je sestavljena iz dveh delov: reakcijske poti in zavorne poti. Pot, ki jo vozilo prevozi od trenutka, ko voznik opazi potrebo po zaviranju, do trenutka, ko dejansko začne zavirati, imenujemo reakcijska pot. Reakcijski čas voznika je 1 s in se lahko podaljša zaradi utrujenosti voznika, bolezni, zaradi uživanja alkohola ali drog. Reakcijski čas voznika pod vplivom alkohola (0,5 g/l alkohola v krvi) je 1,5 s. Predvidevamo, da se v obdobju reakcijskega časa vozilo premika s konstantno hitrostjo.
Pot, ki jo vozilo prevozi od trenutka zaviranja do trenutka, ko se ustavi, imenujemo zavorna pot. Zavorna pot je v največji meri odvisna od hitrosti pred začetkom zaviranja (tj. začetne hitrosti) in pogojev na cesti, lahko pa je odvisna tudi od stanja vozila. Če zanemarimo stanje vozila, lahko zavorno pot izračunamo s formulo $s = \frac{v^2}{254\mu}$, kjer je v hitrost v kilometrih na uro, μ pa je koeficient trenja, ki je odvisen od pogojev na cesti:

Koeficient trenja μ	**Suho cestišče**	**Mokro cestišče**
nov asfalt	0,7 – 0,8	0,5 – 0,6
star, umazan asfalt	0,6 – 0,7	0,25 – 0,45
prod, majhno kamenje	0,6 – 0,7	0,3 – 0,5
sneg	0,2 – 0,4	
led	0,05 – 0,1	

   a) Raziščite, kako je reakcijska pot odvisna od hitrosti pred zaviranjem za voznika z reakcijskim časom 1 s in za voznika z reakcijskim časom 1,5 s.
   b) Ugotovite, kako je zavorna pot odvisna od hitrosti pred zaviranjem za suh in moker asfalt ter za cestišče, prekrito s snegom.
   c) Ugotovite, kako je pot ustavljanja odvisna od hitrosti pred zaviranjem za različne reakcijske čase in različne pogoje na cesti.

2. Koliko diagonal ima štirikotnik, petkotnik, šestkotnik in n-kotnik?

3. Koliko (največ) kosov pice lahko dobimo, če jo prerežemo dva, tri, štiri ali n krat?

4. Enakostranični trikotnik s stranico dolžine n cm razdelimo na enakostranične trikotnike s stranico dolžine 1 cm. Koliko takšnih trikotnikov dobimo?

5. S pomočjo matematike opišite pot žoge v prostih metih pri košarki.

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Pomembnost in uporabnost

Znanje iz scenarija je povezano z vsakodnevnimi izkušnjami z vozili in zaviranjem. Učenci ugotovijo, da hitrost pred zaviranjem vpliva na dolžino zavorne poti. Znanja in spretnosti, povezane s temo kvadratne odvisnosti, se pojavljajo na mnogih področjih.

Preiskovalne veščine

Preiskovanje je prisotno v vseh fazah scenarija. Dijake je potrebno navaditi na preiskovanje in jih pogosteje postavljati v situacije, kjer uporabljajo tak način dela. Tako dijaki med razvijanjem matematičnih kompetenc razvijajo tudi preiskovalne veščine. Med izvedbo scenarija bodo dijaki tvorili primere, sistematično eksperimentirali, organizirali podatke, oblikovali hipoteze, iskali in utemeljevali formule, sodelovali in komunicirali. Preiskovalne veščine morajo biti vključene v povratni informaciji v fazi potrditve in institucionalizacije.

Možnosti za nadaljevanje učnih ur

Scenarij je lahko del sklopa več učnih ur na temo kvadratne odvisnosti in lastnosti kvadratnih zaporedij in kvadratnih funkcij.

- *Predznanje*: Za poglavje o kvadratnih odvisnostih se pričakuje, da bodo dijaki razumeli koncept in lastnosti funkcije, še posebej linearne funkcije, ter koncept in lastnosti aritmetičnega zaporedja.
- *Uvod*: primer avtomobila, ki zavira, lahko uporabimo kot bogat odprti problem.

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija*: Matematični jezik uvedemo za opis situacije. Dijaki naredijo prvi neformalni model situacije – scenarij zavorne poti, uvede se kvadratna odvisnost.
- *Vertikalna matematizacija*: Matematika, ki jo uporabljamo v problemu, se nadalje razvija. Model postane natančnejši, splošnejši. Dijaki proučujejo vzorce števil in njihovih vsot.

  Dijaki preučujejo kvadratna zaporedja in njihove lastnosti: prve razlike so linearne, druge pa konstantne. Poleg tega, vsote členov v linearnih (aritmetičnih) zaporedjih so kvadratna zaporedja. Posplošitev – kvadratna funkcija: prvi odvod je linearen, drugi pa konstanten. Nadalje, integral linearne funkcije je kvadratna funkcija.

MERIA modul “Vodnjaki v puščavi – uvod”

Delitev ravnine s simetralami

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Delitev ravnine s simetralami parov danih točk v ravnini.
Splošni cilji	Konstrukcija simetrale. Razumevanje karakterizacijo simetrale kot množico točk, ki so od danih dveh točk enako oddaljene. Lastnosti simetral in njihovih presečišč v trikotnikih in štirikotnikih in lastnosti točk v delih ravnine, ki jih določajo simetrale. Uporaba simbolnega zapisa $d(P,X) < d(P,Y)$. Preiskovalne veščine: sistematično preizkušanje in risanje območij ali robov območij, ki so določena z danimi točkami (oziroma razdaljami do danih točk). Jasna predstavitev ugotovitev z odločitvijo, katere premice je treba uporabiti. Interdisciplinarne veščine: dijaki lahko povežejo ozemeljske probleme ali konflikte (geografijo) z geometrijskimi načini predstavljanja in reševanja teh problemov. Pri uporabi navigacije za robote se lahko uporabijo drugi problemi.
Potrebno matematično predznanje	Pitagorov izrek in trikotniška neenakost (posebej za dokaz).
Letnik	Dijaki, stari 15 – 16 (oziroma kadar se uvedejo simetrale)
Trajanje	40 minut, z interaktivnim programčkom 70 minut
Potrebni material	učni listi, papir, IKT in MERIA interaktivni programček: https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html Dodatne strani: http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

Problem:

V puščavi je nekaj vodnjakov. Dijak mora pobarvati posamezne dele puščave tako, da je za vsako točko v posameznem pobarvanem delu ravnine tisti vodnjak, ki se nahaja v istem delu pobarvane ravnine, od vseh ostalih vodnjakov dani točki najbližji. [2]

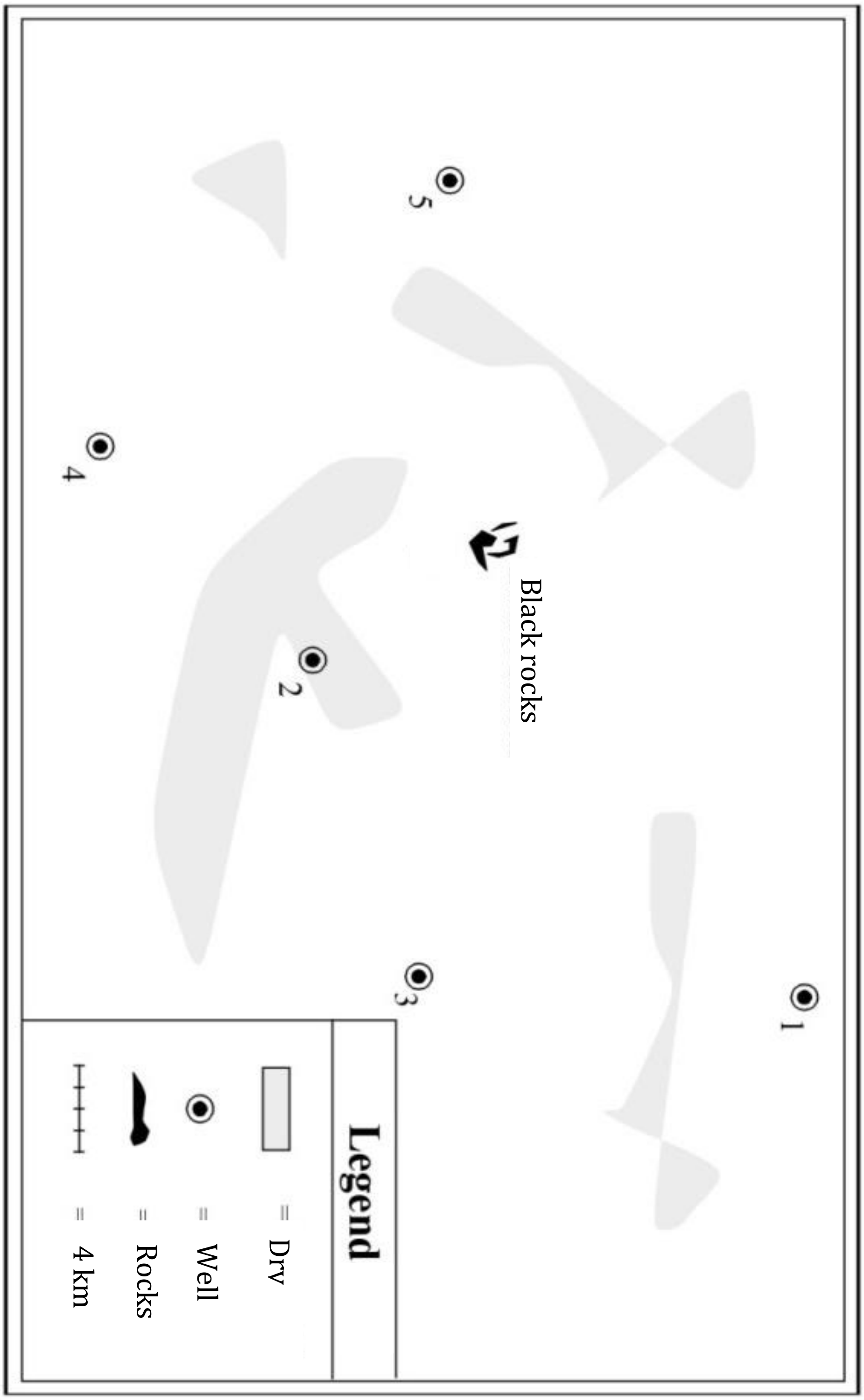
[2] Problem in zemljevid puščave sta bila predstavljena v knjigi »*Geometry with Applications and Proofs, Voronoi Diagrams*« avtorjev A. Goddijn, M. Kindt, W. Reuter

Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija (Prenos) 1 (didaktična) 5 minut	Učitelj predstavi pojem »delitvene črte«: recimo, da imata dijaka X in Y nekaj bonbonov. Bonbon boš vzel od tistega dijaka, ki ti je najbližje. Učitelj izbere dva dijaka X in Y ter ostale dijake vpraša: kdo je bližje dijaku X in kdo bližje dijaku Y? Na koncu dvignejo roke tisti, ki se ne morejo odločiti.	Dijaki prevzamejo vlogo točke v puščavi in se z dvigom rok opredeljujejo glede najbližjega vodnjaka. Opazujejo, kako se opredeljujejo drugi.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 2 minuti	Učitelj povzame ključne ugotovitve: problem je ugotoviti, katere točke imajo 'isto razdaljo' in izziv je, kako najti tak postopek, ki bo omogočal najti vse točke s to lastnostjo. Učitelj se z dijaki dogovori za uporabo oznak (npr. d(A,C)<d(B,C) pomeni, da je točka C bliže točki A kot točki B). To oznako bodo dijaki uporabili v naslednjem koraku (za utemeljevanje razdalj).	Dijaki poslušajo in so zmožni povezati utemeljitev in zapis s svojim delom.
Devolucija (Prenos) 2 (didaktična) 3 minute	Učitelj zastavi nov problem: Postavite se nekam v puščavo (dijaki dobijo delovne liste in na listu izberejo točko). Poiščite vodnjak, ki vam je najbližji. Poiščite vse točke, za katere je ta vodnjak prav tako najbližji. Razdelite zemljevid v več območij okrog vodnjakov tako, da za vsak vodnjak in za vse točke v danem območju velja, da je ta vodnjak v tem območju njim najbližji.	Dijaki poslušajo.
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 15 minut	Učitelj hodi po razredu.	Skupina najprej določi svoj položaj v puščavi in ugotovi, kateri vodnjak je najbližji. Nato konstruirajo območje, ki vsebuje vse točke s to lastnostjo: da je dani vodnjak njim najbližji. To naredijo za vsak vodnjak. Dijaki ugotovijo, da za razdelitev puščave potrebujejo neko strategijo (dokaz), saj postanejo za več točk stvari bolj zapletene.

Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 5 minut	Učitelj hodi po razredu in ugotavlja, katere ideje so dijaki uporabili in jih povabi k predstavitvam.	Dijaki v skupinah razpravljajo o tem, kako so razmišljali, kakšno je območje z dano zahtevo in kako bi to zapisali.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična in adidaktična) 5 minut	Učitelj nekaj skupin povabi k predstavitvam njihovega dela (če je možno, k predstavitvi povabi skupino, ki je uporabila krožnice z istim polmerom in skupino, ki je uporabila simetrale).	Dijaki predstavijo svoje delo.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 minut	Učitelj izpostavi temeljni izrek: d(A,P)=d(B,P) velja natanko tedaj, ko točka P leži na simetrali. Voronoijevi diagrami se konstruirajo s pomočjo simetral in to so osnove za algoritem konstruiranja teh diagramov. Lahko se razpravlja tudi o definicijah simetrale: »množica točk, ki so enako oddaljene od točk A in B« in »premica, ki poteka skozi razpolovišče daljice AB in je na daljico AB pravokotna«. Po izbiri: Ali lahko ta izrek dokažete? (vsi dijaki ne bodo videli potrebe po dokazovanju in jim to ne bo predstavljalo izziva).	Dijaki razumejo predstavljen zapis, saj se nanaša na njihovo dejavnost, npr. vse točke P, za katere velja d(A,P)=d(B,P), ležijo na premici (ta premica se imenuje premica delitve za točki A in B). Vse točke P, za katere velja d(A,P)<d(B,P), ležijo v območju (t. i. »varnem« območju). Razumejo matematični problem, ki se je pojavil pri njihovem reševanju.
Devolucija (Prenos) 3 (po izbiri) 5 minut	Za risanje Voronoijevih diagramov je lahko uporabljena IKT. Učitelj prikaže, kako rešimo nalogo z uporabo IKT. Za dve točki dijake spomni, da premica z enako razdaljo do dveh točk razdeli ravnino v dve območji. Nato nadaljuje s tremi točkami in ugotovi, da obstaja točka, ki je enako oddaljena od danih treh točk. Uporabi lahko povezavo: https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html. Učitelj se vrne k izhodiščnemu problemu in razišče, kaj se zgodi v posameznem primeru. Preigrava različne položaje točk in ugotavlja,	Dijaki poslušajo in opazujejo, kako se s tehnologijo narišejo Voronoijevi diagrami. Tudi sami želijo preizkusiti to tehnologijo in preiskovati, kaj se zgodi, ko premikajo točke.

	kakšne zanimive vzorce dobi. Lahko na primer raziskuje, kakšne vzorce dobi, če premika 4 točke.	
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 10 minut	Učitelj hodi po razredu in vzpodbuja dijake k sistematičnem preizkušanju. Pomaga jim le v primeru, ko imajo težave z uporabo tehnologije. Če ima več dijakov isti problem, učitelj razloži vsem skupaj.	Dijaki s pomočjo tehnologije rešijo začetni problem in svojo rešitev primerjajo s svojo skico na papirju. Raziščejo, kaj se zgodi v primerih, ko so točke pravilno razporejene in/ali ko so točke nepravilno razporejene.
Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 5 minut	Učitelj prosi dijake, da pripravijo predstavitev svojih ugotovitev (najbolj presenetljivih) in jih vzpodbudi, da jih tudi utemeljijo (npr. Kdaj ima Voronoijev diagram na 4 točkah eno točko, ki je četveromeja, tj. točko, ki meji na 4 območja?)	Dijaki pripravijo dva posnetka zaslonov: enega za rešitev začetnega problema in drugega za kakšen zanimiv vzorec (povedo tudi, kako so ga dobili). Svoje ugotovitve poskusijo utemeljiti z uporabo orodja za risanje krožnic, zapisom razdalj in uporabo izrekov (Pitagorovega, Talesovega ...).
Verifikacija (Potrditev) (didaktična in adidaktična) 5 minut	Predstavitve dijakov pomagajo pri ugotavljanju tega, kar se dogaja v diagramih. Dijaki se ob tem bolje seznanijo s formalnimi zapisi in uporabljajo geometrijsko utemeljevanje za različne situacije.	Dijaki ugotovijo, kakšna je povezava med validacijo in formulacijo njihovih ugotovitev.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 minut	Splošne ugotovitve koncepta Voronoijevih diagramov, ki vsebujejo simetrale, in zanimivi primeri in vzorci v teh diagramih.	Dijaki ugotovijo, kako so institucionalizirani učni cilji povezani z njihovim preiskovanjem v kontekstu puščave in te učne cilje usvojijo.

Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja	• Nekateri dijaki bodo pričeli z risanjem črt med danimi točkami. Te črte bodo lahko ponekod ukrivljene in ne bo jasno, kje se tri ali štiri črte sekajo. • Nekateri dijaki bodo risali kroge ali delili ravnino z ukrivljenimi črtami. Ti dijaki morajo ugotoviti, da z risanjem ukrivljenih črt ne bodo prišli do rešitve, z risanjem krogov pa bodo dobili le točke, ki so od danega vodnjaka enako oddaljene, ne bodo pa našli meje iskanega območja. • Nekateri dijaki bodo takoj ugotovili, kaj morajo narediti in bodo pričeli z risanjem simetral. Zanje je ključno, da ugotovijo, kaj se zgodi na presečišču simetral. Ali se sekajo v eni točki?

Delovni list	

Pojasnilo glede materialov za dijake

Dijaki za preiskovanje v začetku dobijo zemljevid puščave z vodnjaki. Učitelj zemljevid pripravi za vsako skupino dijakov. Pri tem bi poudarili, da nekateri grafični elementi na zemljevidu, npr. črne skale, prikazujejo, da je bil del matematizacije pri prenosu iz realne puščave na zemljevid že izveden, vendar ne v celoti. V primeru, da dijakov ne želite obremenjevati s temi elementi, jih lahko izbrišete ali pa jih lahko ignorirate. Na voljo je tudi interaktivni programček za preiskovanje različnih situacij. Vnaprej preverite, ali program deluje in razmislite, kako ga boste uporabili kot demonstracijsko sredstvo. Presodite, kdaj, kako in pri katerem vprašanju/nalogi ga bodo dijaki uporabili.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

Začetek: Premislite, kako boste predstavili uvodni problem. Situacijo predstavite na način, da bodo dijaki morali premisliti in bodo nekateri oklevali, preden bodo odgovorili. Po prvi fazi devolucije (prenosa) učitelj presodi, ali bo dijakom predstavil formalni zapis za razdaljo, kar je odvisno od predznanja dijakov.

Didaktično okolje (Milje): Ustvarimo problemsko situacijo s puščavo in vodnjaki. Lahko bi situacijo predstavili tudi z drugim kontekstom ali z drugim številom vodnjakov in njihovim položajem v puščavi. Problem lahko podamo tudi z drugimi besedami: opišite strategijo, s pomočjo katere se boste lahko za čim več točk v puščavi odločili, h kateremu vodnjaku boste šli. Dobra stran tega problema je, da milje ponuja kriterije, po katerih lahko vrednotimo delo dijakov. Zmagovalna strategija, tj. strategija, po kateri se odločamo za vodnjak za vsako točko v puščavi, razen za točke na »delitvenih črtah« je usklajena s standardi znanja (pričakovanimi dosežki).

Delitev zemljevida Slovenije, da se je za vsako točko možno odločiti, katero helikoptersko vzletišče je najbližje. (Nadja Marušić, Slovenija)

Trajanje posamezne faze se lahko prilagodi glede na delo dijakov.

Med prvo fazo reševanja:

V primeru, da bi večina dijakov uporabila simetralo in bi se faza reševanja hitro zaključila, večji poudarek namenite dokazu ali preiskovanju z interaktivnim programčkom:

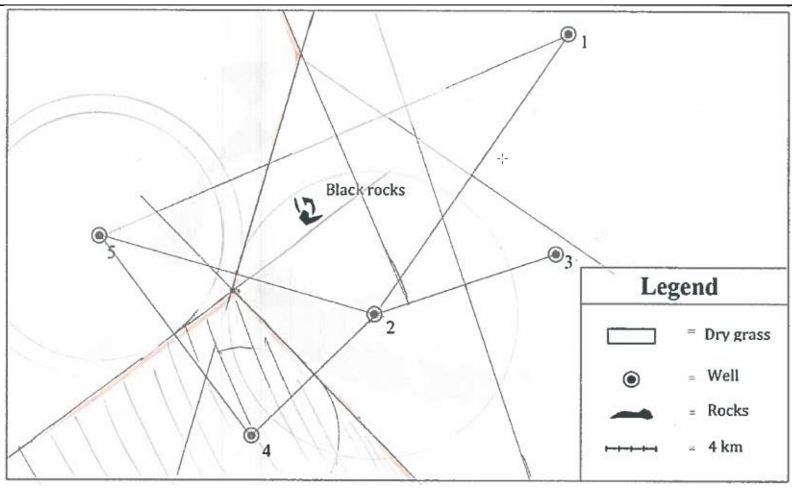
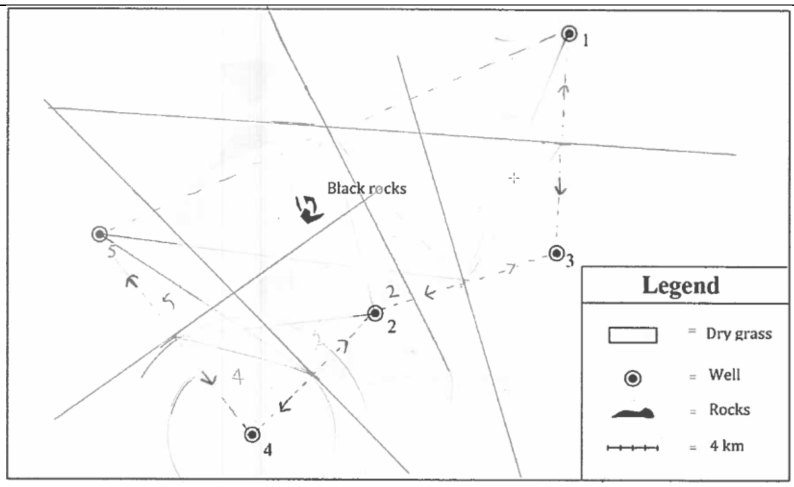
- Dijake lahko povabite, da dokažejo izrek o simetrali in/ali da dokažejo enakost med točkami na Voronoijevem robu in točkami na simetrali.
- Pri preiskovanju s programom lahko dijaki narišejo različne vzorce, čeprav lahko pri tem pridejo do težkih primerov z vidika potrditve in institucionalizacije matematičnih idej. V tem primeru predlagamo, da dijakom zastavite jasna vprašanja: Preiskujte situacijo za 4 točke (Koliko različnih vzorcev lahko najdete? Kdaj se vse simetrale sekajo v eni točki?). Vzpodbudite jih, da najdejo kriterij in/ali dokaz za svoje ugotovitve.

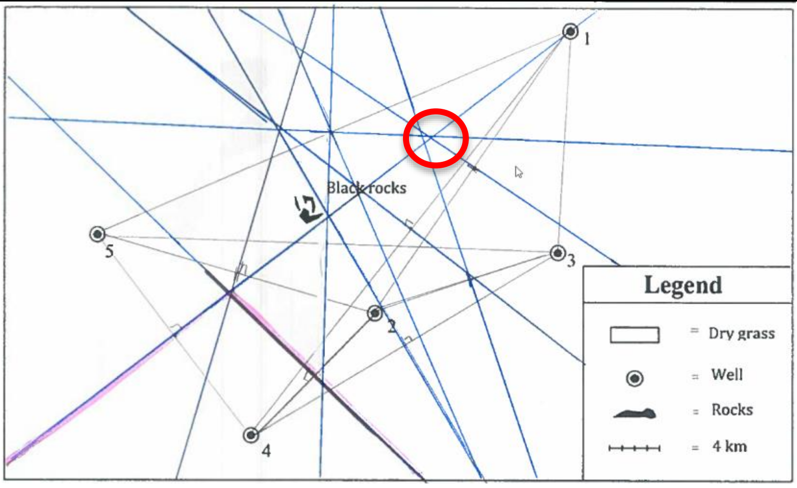
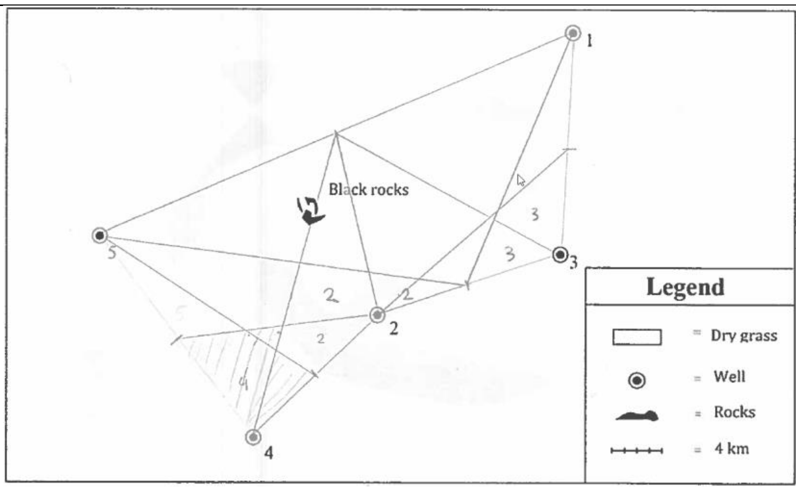
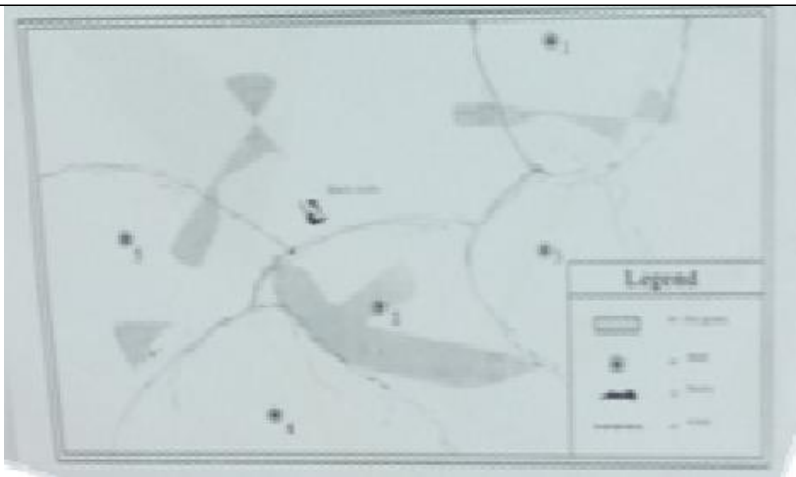
Če kdo od dijakov nima ustreznega predznanja, da bi napredoval pri nalogi, mu učitelj pomaga s podpornimi vprašanji: Kako je ta problem povezan z uvodnim problemom (prva faza devolucije)? Kako je deljenje med dvema točkama povezano z uvodnim problemom? Kako se odločite, če imate dve točki? Zakaj? Če večina dijakov zna rešiti nalogo, ta vprašanja zastavimo samo dijakom, ki ne znajo sami naprej. Učitelj naj ne predava vsaki skupini posebej. Še več, *ni potrebno*, da bi učitelj ostal pri skupini, dokler ta ne pride do odgovora. Na to glejte kot na manjšo devolucijo omejenega problema in dijake pustite, da rešujejo naprej. Ne zastavljajte jim dodatnih vprašanj in jim ne dajajte namigov. Če pa si večina dijakov v razredu mora pomagati z dodatnimi vprašanji, se ta faza skrajša in učitelj z vprašanji frontalno pomaga vsem skupaj. Taka situacija je navadno signal, da je je bil problem za dijake pretežak ali pa ni bil zastavljen dovolj jasno, čemur bi se morali izogniti.

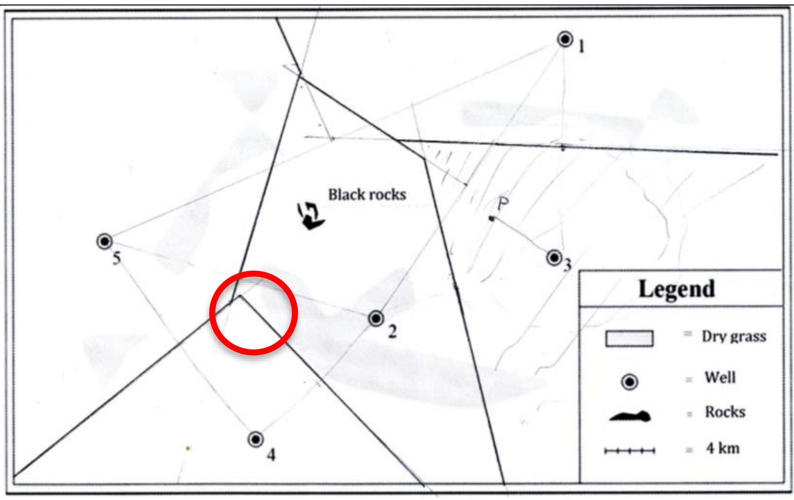
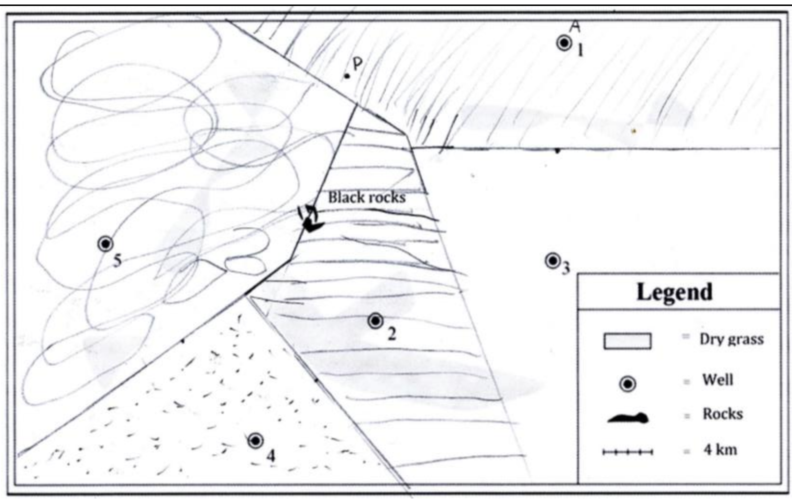
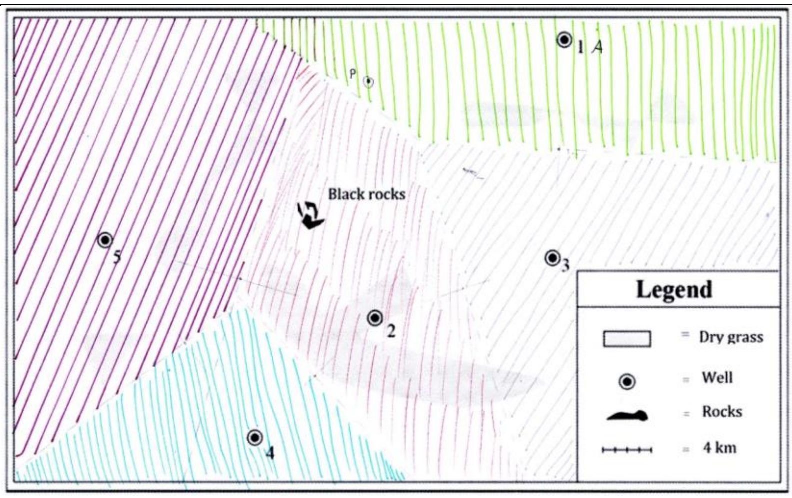
V primeru, da nobena skupina ne uporabi simetrale, se o prej navedenih vprašanjih pogovorite plenarno (namesto posebej z vsako skupino).

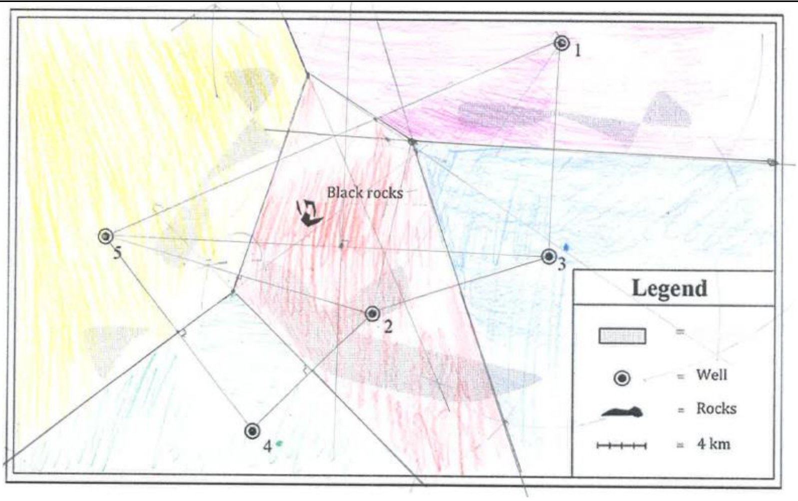
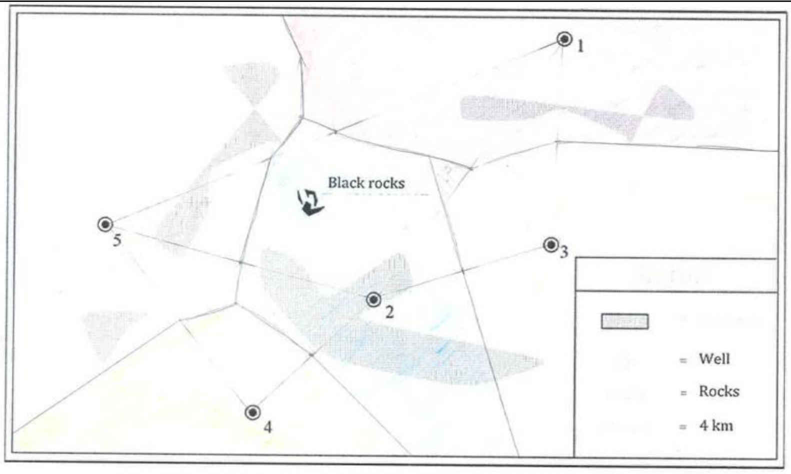
Opažanja iz prakse

Pri reševanju so dijaki uporabili naslednje pristope:

	*Dijaki začnejo okrog vodnjakov risati kroge. Nato točke povežejo in narišejo simetrale. Težko je videti, katero področje ustreza posameznemu vodnjaku in ni povsem jasno, kaj se zgodi tam, kjer se simetrale sekajo (oz. naj bi se sekale).*
	*Tudi v tem primeru dijaki začnejo z risanjem krogov, nato pa narišejo črtkane črte in poiščejo razpolovišča. Kaže, da nadaljujejo s krogi, ki se dotikajo v razpoloviščih in nato narišejo (nekaj) simetral.*

	*Dijaki povežejo točke in narišejo vse simetrale. Težko je videti območja, ki pripadajo posameznemu vodnjaku. Ni jasno, kaj se zgodi na presečiščih simetral (npr. v rdečem krogu).*
	*Dijaki povežejo točke in poiščejo razpolovišča. Nato razpolovišča povežejo in določijo območja. Območja so v večini določena pravilno, niso pa opredeljena vsa potrebna območja. Ne uporabijo simetral.*
	*Dijaki narišejo območja brez matematične strategije z ukrivljenimi črtami.*

	*Dijaki povežejo točke in narišejo simetrale. Ker pri risanju niso dovolj natančni, se trojice simetral, ki bi se morale sekati v eni točki, ne sekajo. Pojavi se vprašanje, kaj narediti s trikotnimi območji, ki se pojavijo.*
	*Dijaki narišejo neke simetrale, vendar niso dovolj natančni (npr. simetrala med točkama 2 in 5 je preblizu točki 2).*
	*Rešitev je popolna, vendar ni jasna pot do nje.*

	*Jasna rešitev in vidna strategija, ki je pripeljala do nje.*
	*Dijaki približno narišejo nekaj črt. Nakažejo, da se za nekatera območja ne morejo odločiti (to označijo z vprašajem).*

Pri opazovanju dela dijakov smo ugotovili, da so njihovi dosežki na štirih nivojih:

1. Približno risanje (ukrivljenih) črt.
2. Uporaba nekaterih matematičnih pravil (krogi ali razpolovišča), ki ne pripeljejo do strategije za celotno območje.
3. Uporaba simetral brez natančne konstrukcije ali ne za vse simetrale z nekaj odstopanji.
4. Narisane vse simetrale in pravilno določena območja, ki pripadajo posameznim vodnjakom.

Glede na to, katere strategije so dijaki uporabili in predstavili v razredu, se učitelj odloči, kako bo izpeljal fazo potrditve in institucionalizacije. Pomembno je, da je faza institucionalizacije izpeljana na osnovi dela dijakov in ugotovitev, do katerih je prišla večina dijakov. Ob tem učitelj vseeno vzpodbudi dijake, da najdejo načine za izboljšanje manj učinkovitih strategij. Učitelj povabi dijake, da predstavijo svoje različne strategije in rešitve, pri tem pa celotnemu razredu zastavlja vprašanja: V čem se predstavljene strategije razlikujejo in v čem so si podobne? Kako jih izboljšati in potrditi? Kako bi opisali splošno strategijo, za katero se vsi dijaki strinjajo?

Možne ideje za institucionalizacijo:

- »Delitvena črta« med danima dvema točkama je simetrala daljice, ki povezuje ti dve točki.
- Simetrale za primer danih treh točk se sekajo v eni točki (izjema je primer, ko so dane tri točke kolinearne).

Orodja za evalvacijo

Ob koncu ure ali čim prej v eni od naslednjih ur lahko učitelj znanje, ki so ga dijaki pridobili, preveri z naslednjimi nalogami:

1. Dijaki dobijo situacijo s tremi točkami in »delitvenimi črtami« ter dodatno četrto točko. Njihova naloga je, da rekonstruirajo delitev ravnine.

2. Dijaki dobijo situacijo s tremi točkami in »delitvenimi črtami«. Njihova naloga je, da ustvarijo situacijo s četrto točko na način, da rezultat nima niti ene ali dveh izoliranih celic. Če kateri od zahtev ni mogoče ugoditi, naj to utemeljijo.

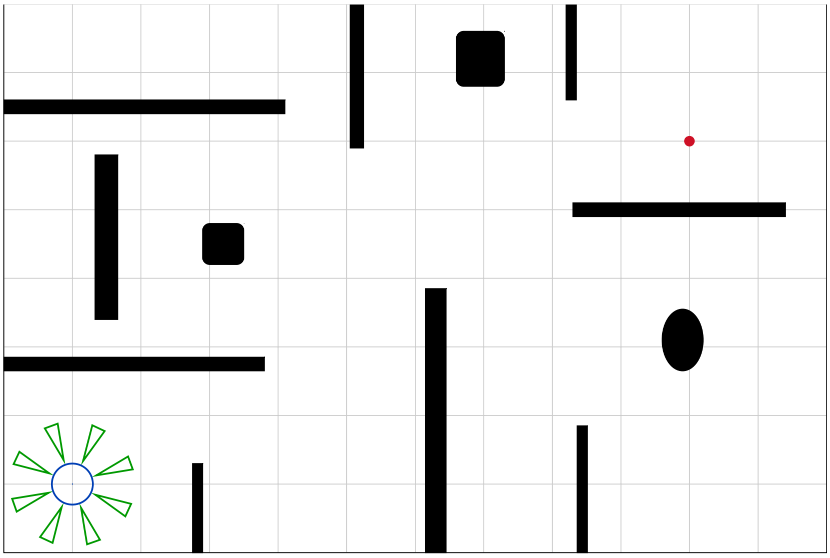
3. Dijaki naj opišejo in ilustrirajo, kako načrtati razdelitev ravnine za dane točke.

4. Dijaki naj raziščejo Voronoijev diagram s tremi točkami z interaktivnim programčkom. Pojasnijo naj, zakaj skoraj vedno vidijo »tri ozemeljske točke«.

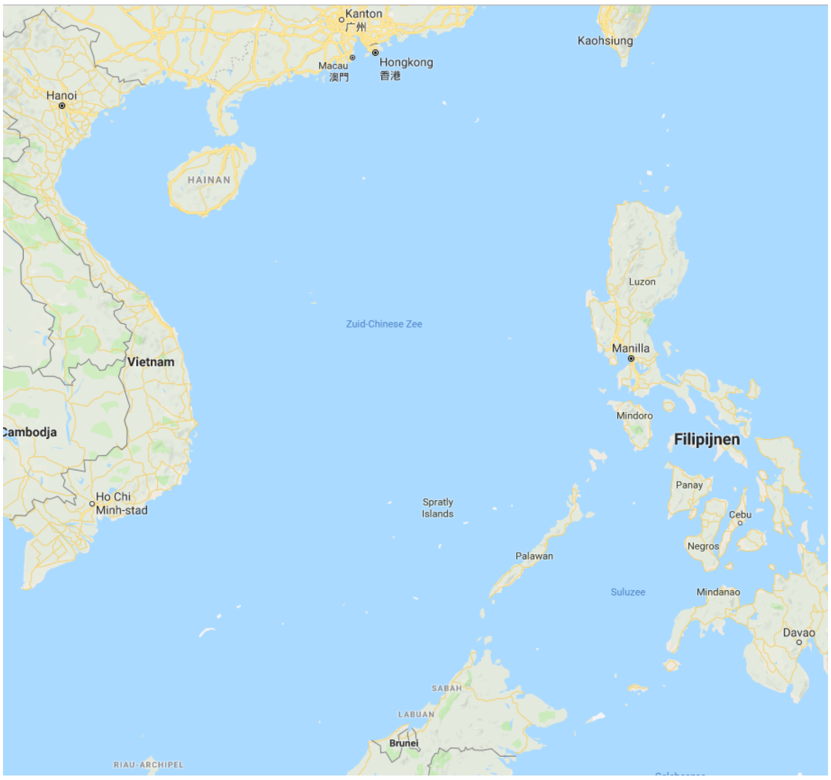
Predlogi za nadaljnje preiskovanje »delitvenih črt«

Več preiskovanj, ki se nanašajo na enako razdaljo med objekti, je povezanih z delitvijo območja na morju in navigacijo robota, npr. najti je treba optimalno pot robota za varno premikanje ali kako se gibati po morju, da se izognete radarjem ali strelnemu orožju.

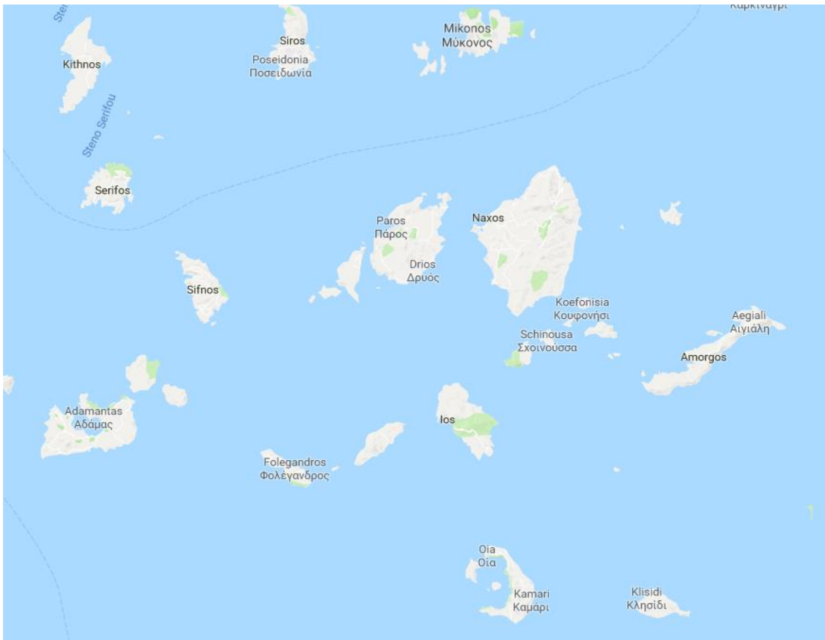
1. Robot se giblje po stanovanju. Kakšne je njegova optimalna pot? Kako robot določi optimalno pot po stanovanju?



2. V Kitajskem morju se nahaja precej otokov, ki so vpleteni v ozemeljski spor. Kako narisati meje na morju, da bi bilo jasno, kateri del morja pripada posamezni državi? (To je pomembno tudi zaradi razpolaganja z naravnimi viri.)



3. Kikladi so skupina otokov v Egejskem morju. Njihovo območje je razdeljeno na devet enot v Južni Egejski regiji glede na največje otoke Andros, Kea-Kythnos, Milos, Mikonos, Naxos, Paros, Thira, Siros in Tinos. Kako bi na spodnji sliki razdelili morje z otoki?



4. Na naslednji sliki je ozemeljska delitev Severnega morja. Opišite, kako bi utemeljili možno delitev morja med pripadajoče države.

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Pomembnost in uporabnost

Dotaknili se bomo treh vidikov:

- *Realno življenje*: ta kontekst povezuje izkušnje dijakov z deljenjem ozemlja v regije in s pojmom »biti najbližji«. Koncept Voronoijevih diagramov se uporablja v različnih kontekstih, ki so dijakom blizu, na primer pri nogometu:

- *Področje dela*: Voronoijevi diagrami so zelo pomemben koncept v različnih disciplinah, kot so biologija (modeliranje strukture celice), hidrologija (računanje padavin za posamezno območje), ekologija (vzorci rasti gozda), kemija (položaj jedra v molekuli) in računalništvo (prostorsko načrtovanje in nadzor robotov).
- *Nadaljnje možnosti*: Kot naravno nadaljevanje scenarija bi dijaki lahko dokazali, da točka leži na simetrali daljice AB natanko tedaj, ko je enako oddaljena od točke A in točke B (leži torej na Voronoijevem robu). Prav tako bi dijaki lahko preiskovali različne probleme z deljenjem zemljevidov in iskanjem optimalne poti za krmiljenje robota. Dodatna smer preiskovanja je tudi preiskovanje tetivnih štirikotnikov in drugih geometrijskih izrekov, ki temeljijo na simetralah (npr. ali lahko načrtamo trikotnik, če so dane tri sekajoče simetrale?). Učitelj bi lahko uporabil tudi scenarij Vodnjaki v puščavi-parabola.

Preiskovalne veščine

Dijaki preiskujejo situacije iz realnega življenja in pri tem preizkušajo ter primerjajo različne strategije. Njihova rešitev je podprta z vizualizacijo in konceptom simetrale. Da bi dijaki ugotovili, katera strategija je najbolj učinkovita, morajo dobro razumeti kontekst naloge in uspešno uporabljati geometrijski jezik in pojme.
Dijake vzpodbujamo, da položaj točk kritično reflektirajo in da utemeljijo svoje ugotovitve za situacije, kjer se seka tri ali več simetral. Na koncu morajo dijaki svoje rezultate jasno predstaviti in ustrezno sporočiti svoje strategije.

Možnosti za sklop zaporednih ur

Ta scenarij predstavlja naravni uvod v obravnavo »delitvenih črt« za različne geometrijske primere ali v obravnavo bolj tradicionalnih tem, ki so povezane s simetralami, trikotniki, tetivnimi štirikotniki, ipd.

- *Predznanje*: Da bi dijaki lahko preiskovali problem in razdelili ravnino v območja, morajo do neke mere znati načrtovati s šestilom in ravnilom. Za dokaz morajo poznati trikotniško neenakost za razdalje. Za dokaz in za primerjavo strategij morajo biti sposobni abstraktnega razmišljanja.

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija*: Ta scenarij dijake povabi v matematično modeliranje problema v kontekstu. Pri reševanju morajo dijaki prepoznati, kateri podatki so za rešitev pomembni (npr. opaziti morajo, da so črne skale, suha trava in dejanske razdalje za reševanje nepomembni). Prepoznati morajo, da za rešitev potrebujejo matematične pojme, kot so točke, premice, razdalje, bliže-dlje, simetrale in delitev ravnine. Prav tako se moramo zavedati, da se pri vstopu v matematično modeliranje v tem primeru pri dijakih lahko pojavijo nova vprašanja in izzivi.
- *Vertikalna matematizacija*: Delo, ki ga dijaki opravijo na tem problemu, predstavlja vstopno točko za nadaljnje matematično preiskovanje. Glede na interes in znanje dijakov je eden od izzivov, s katerim se lahko ukvarjamo v nadaljevanju, dokaz trditve, da točke, ki so enako oddaljene od danih dveh točk, ležijo na simetrali. Ob tem razmišljajo tudi o konstrukciji simetrale.
  Nadalje se vzpostavi potreba po preiskovanju vzorcev, ki nastanejo pri treh točkah. Izgleda, da se v tem primeru simetrale sekajo v eni točki. Pri štirih točkah se pojavijo še dodatni vzorci. Te razmisleke lahko učitelj poveže s temami v učbeniku, ki se nanašajo na izrek o simetralah trikotnika in nadaljnje geometrijsko

preiskovanje, npr. središče očrtane krožnice ali tetivni večkotniki. Še druga možnost za nadaljnje ure je pojem »delitvenih črt« za preiskovanje definicije in lastnosti parabole (glejte MERIA scenarij Vodnjaki v puščavi-parabola).

Zaključek

Ta scenarij ponazarja, kako lahko problem delitve puščave, ki je bogat in dijakom blizu, uporabimo, da od besede »najbližji« pridemo do strategij reševanja in reprezentacij kot koncentrični krogi, razpolovišča in »delitvene črte«. Na teh elementih skozi proces horizontalne in vertikalne matematizacije gradimo matematiko simetral in delitve ravnine. Če se dijaki teh pojmov učijo preko uporabe v realnem problemu, bodo lažje prepoznali njihovo uporabo tudi v drugih situacijah.

MERIA modul "Zaposlitveni oglas"

Mere osredinjenosti podatkov

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Izračunati in razlikovati med različnimi merami osredinjenosti podatkov (aritmetična sredina, modus, mediana). Sprejeti odločitev na podlagi izračunanih vrednosti.
Splošni cilji	Analiziranje podatkov. Risanje histogramov in ostalih grafičnih predstavitev, kakor tudi računanje statističnih mer z ali brez uporabe IKT. Razumevanje problemov in napačnih predstav, ki se pojavijo v statistiki. Preiskovalne veščine: sprejemanje in vrednotenje odločitev na podlagi argumentov, primerjava različnih načinov utemeljevanja, interpretiranje podatkov in oblikovanje sklepov. Interdisciplinarne veščine: povezovanje statističnih problemov z vsakodnevnimi situacijami in situacijami v ekonomiji. Dijaki se naučijo ceniti uporabo matematičnega utemeljevanja pri sprejemanju odločitev.
Potrebno matematično predznanje	Računanje aritmetične sredine. Poznavanje pojma povprečje. Osnovne veščine uporabe računalnika: ravnanje z Excelovimi (ali primerljivimi) preglednicami (npr. Google Sheets, OpenOffice); uporaba osnovnih funkcij za izračun vsote in povprečja; grafična predstavitev podatkov (histogrami, razsevni diagrami, grafikoni kvantilov – škatla z brki)
Letnik	Katerikoli srednješolski (kadarkoli je uvedena aritmetična sredina)
Trajanje	45 minut (lahko se razširi na 90 minut)
Potrebni material	Računalnik, primerna programska oprema (Excel, Google Sheets, OpenOffice, GeoGebra ...). Množica podatkov, ki jo bomo v nadaljevanju poimenovali "plačne liste". Podatki so dodani v datoteki MERIA_zaposlitveni_oglas.xlsx.

Problem:

Podjetja iščejo nove zaposlene. V oglasu iskalcem zaposlitve ponujajo možnost dohodka v podjetju in zapišejo, kakšna je povprečna mesečna plača v podjetju. V dodatku so zapisane plačne liste treh podjetij.

V katerem izmed treh podjetij bi iskali zaposlitev? Razložite in matematično utemeljite razloge za svojo odločitev.

Razmislite naslednje: Katera plača razdeli zaposlene v dve skupini enakih velikosti? Katera plača bi najbolje opisala celotno plačno listo?

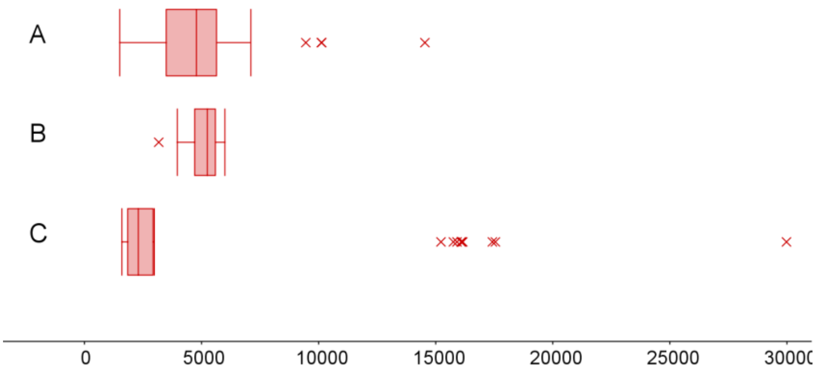
Faza	Dejavnosti in navodila učitelja	Dejavnosti in odzivi dijakov
Devolucija (Prenos) (didaktična) 5 minut	Učitelj predstavi problem in dijakom posreduje povezavo do *Excel* datoteke s podatki (tremi plačnimi listami). Predlaga uporabo tehnologije (orodja za obdelavo in prikaz podatkov) pri sprejemanju odločitve. Dijake razdeli v skupine po dva ali tri.	Dijaki poslušajo in sprašujejo.
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 20 minut	Učitelj opazuje delo različnih skupin in pomaga v primeru tehničnih težav (ne pri težavah z uporabo programa). Zabeleži si, kakšne različne strategije so ubrali dijaki.	Dijaki se v skupinah dogovorijo, kakšno tehnologijo bodo izbrali, kakšno je matematično ozadje in kako se bodo organizirali.
Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 5 minut	Učitelj prosi dijake, naj organizirajo svoje zapiske in zapišejo svojo odločitev.	Dijaki uredijo in povzamejo svoje delo.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična / adidaktična) 10 minut	Učitelj izbere nekaj dijakov, ki kratko predstavijo svoje rešitve – odločitve. Izbere skupine z različnimi strategijami.	Dijaki na kratko razložijo, kaj so počeli. Ostali dijaki poslušajo in razpravljajo.
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 5 minut	Učitelj povzame delo študentov in posploši: Kako izbrati vrednost, ki najbolje opiše dan seznam števil? Definira mere osredinjenosti podatkov – aritmetično sredino, mediano in modus in pove, kako se jih določi. Povzame vpliv podatkov na aritmetično sredino, mediano (in modus) ter prednosti in slabosti vsake od teh mer. Jasno poudari, da ta situacija nima enoličnega odgovora, temveč različne informacije, ki jih vsaka od mer poda.	Dijaki poslušajo in sprašujejo.

<table>
<tr>
<td>Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja</td>
<td>

- Aritmetična sredina in mediana:
  - Nekateri dijaki morda takoj vedo, kaj storiti. Zato grafično predstavijo podatke na znane načine in uporabijo orodja za analizo podatkov, da izračunajo aritmetično sredino in mediano za vsako plačno listo. Primerjali bodo plačne liste in opazili, kako osamelci (veliki podatki) vplivajo na aritmetično sredino (in mogoče mediano). Tako se bodo odločili, katero podjetje izbrati.

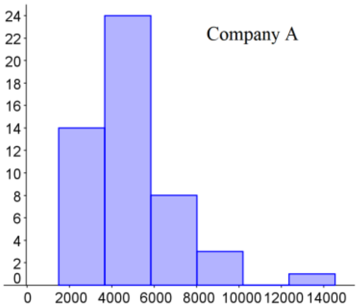
	Podjetje A	*Podjetje B*	*Podjetje C*
Arit. sredina	4939,98	5138,04	4992,6
Mediana	4774,5	5241	2293,5
Razpon	13038	2826	28394
Minimum	1500	3165	1593
Maksimum	14538	5991	29987

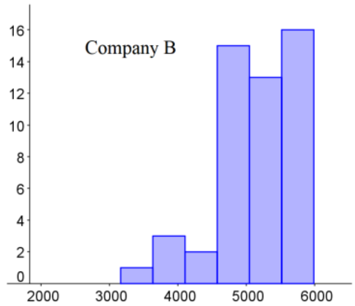
  - Nekateri dijaki bodo opazovali plačne liste, uredili podatke po velikosti in odkrili kako sami poiskati vrednost na sredini podatkov (mediano). Ti dijaki bodo v tabelah urejenih podatkov opazili, še posebej pri plačni listi C, da je nekaj podatkov bistveno večjih od ostalih, in raziskovali, kaj se zgodi z aritmetično sredino in mediano, če te podatke izključijo. Kot posledico bodo ugotovili, kakšne so prednosti in slabosti obeh mer.
  - Nekateri dijaki bodo podatke le grafično predstavili in sprejeli zaključke glede na grafe. Ti dijaki bodo lahko uporabili grafikone kvantilov (»škatle z brki«), iz katerih lahko preberejo vse podatke, ki jih potrebujejo (aritmetično sredino in mediano). Na podlagi tega bodo sprejeli odločitev. Poleg tega bodo v grafikonu kvantilov enostavno opazili osamelce. Ugotovili bodo, kako osamelci vplivajo na aritmetično sredino in mediano.

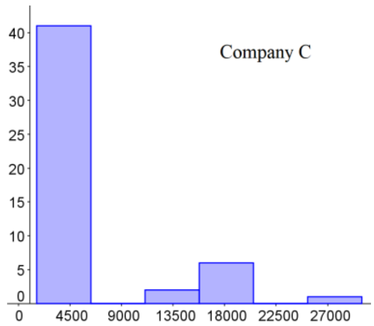


</td>
</tr>
</table>

- Nekateri dijaki bodo narisali histograme in opazili osamelce. Iz histogramov bodo opazili vpliv na osamelcev na srednje vrednosti.







Modus: Da bi dijaki določili modus, jih lahko učitelj spodbudi, da podatke zaokrožijo ali razdelijo v razrede. Potem lahko nove podatke grafično predstavijo na način, ki je primeren za frekvenčne razrede (npr. histogram). Nato poračunajo modus za vse plačne liste (ali ga preberejo iz na primer histograma). S tem lahko podprejo svojo odločitev o tem, katero podjetje izbrati, ne glede na to, katero metodo so uporabili za izračun aritmetične sredine in mediane.

Pojasnilo glede materialov za dijake

Dijaki dobijo množico podatkov (plačne liste), natančneje tri sezname mesečnih plač za 50 zaposlenih in izračunano povprečno plačo. Podatki niso urejeni. Od dijakov pričakujemo, da si bodo podatke uredili po velikosti in narisali nekaj grafičnih prikazov.

Da bi bila naloga dijakom bolj zanimiva, lahko damo podjetjem zanimiva imena ali pa nalogo predstavimo v obliki časopisnega oglasa treh podjetij.

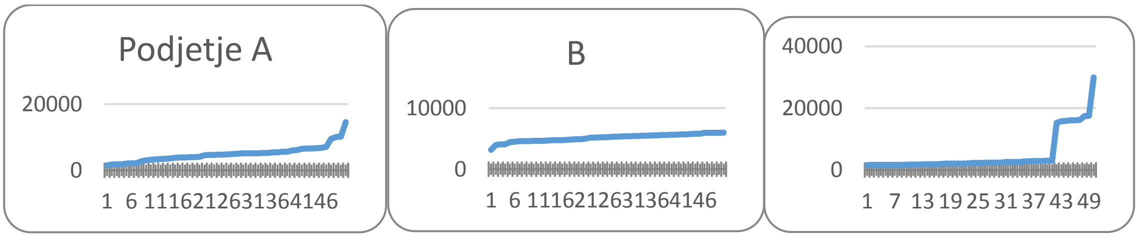
Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

Množico podatkov lahko dijakom podamo v digitalni obliki ali oboje, v digitalni in papirni obliki. Podatke na papirju lahko uporabimo pri predstavitvi problema in iskanju prvih zamisli za reševanje, vendar je uporaba tehnologije v tem scenariju nujna.
Odločamo se lahko pri *organizaciji dela v razredu*: delo v parih ali v skupinah, sestavljenih iz treh dijakov. Večjih skupin dijakov ne priporočamo zaradi dela z računalnikom.
Spreminjamo lahko *trajanje* izvedbe v fazah reševanja in formulacije, vendar naj spremembe ne bodo prevelike.
Zaradi doseganja standardov znanja (pričakovanih dosežkov) ne priporočamo spremembe množice podatkov (plačnih list).
Če imajo dijaki težave z uporabo Excela ali drugega programa, s katerim naj bi po velikosti uredili podatke in z njimi upravljali, lahko podatke vnaprej uredimo po velikosti. Druga možnost je, da pred začetkom scenarija naredimo kratek uvod v uporabo Excela (ali drugega programa, ki ga bodo uporabljali).
Če dijaki že poznajo mere osredinjenosti podatkov, lahko standarde znanja (pričakovane dosežke) razširimo z:

- Uvod v mere razpršenosti (variance)
- Kvantili, ki so zajeti v merah razpršenosti
- Grafične predstavitve (škatlasti diagram)

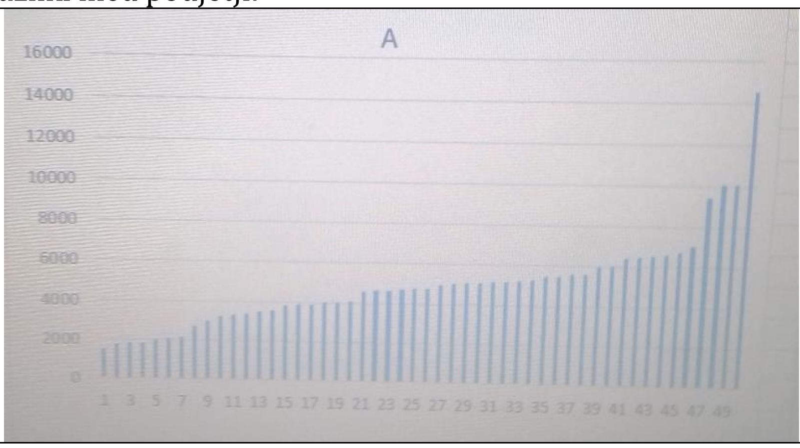
Opažanja iz prakse

Dijaki so po velikosti razvrstili podatke in jih grafično predstavili na različne načine:

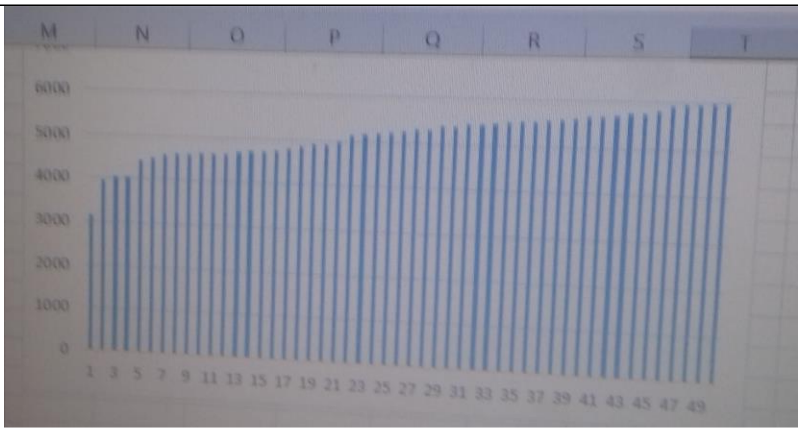
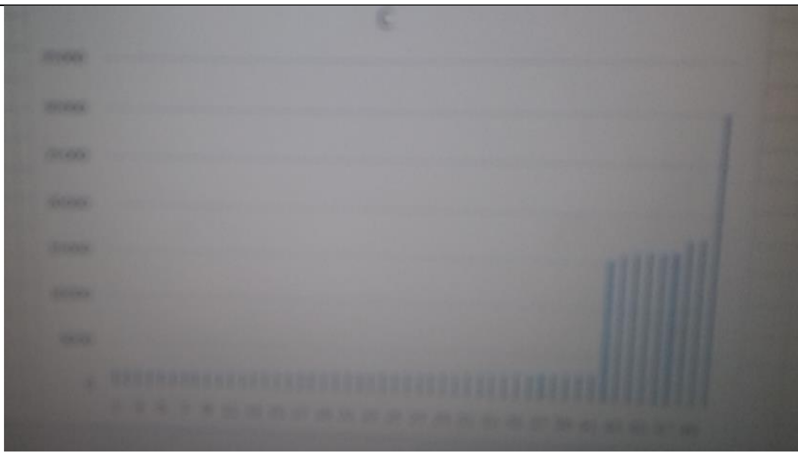
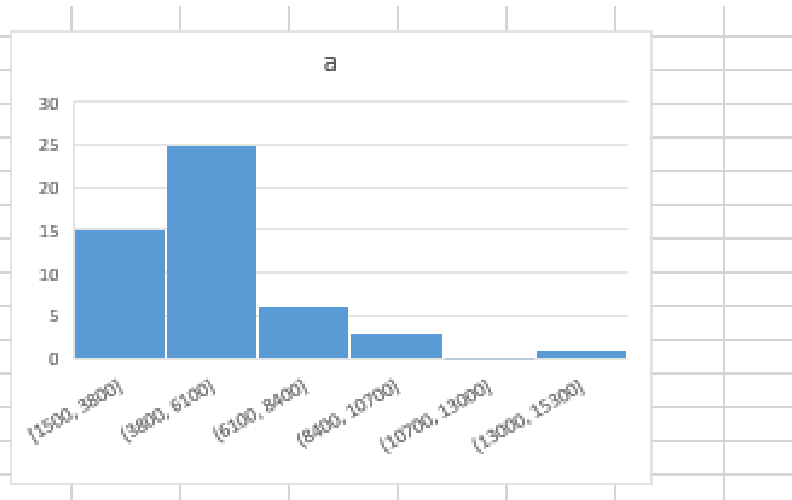


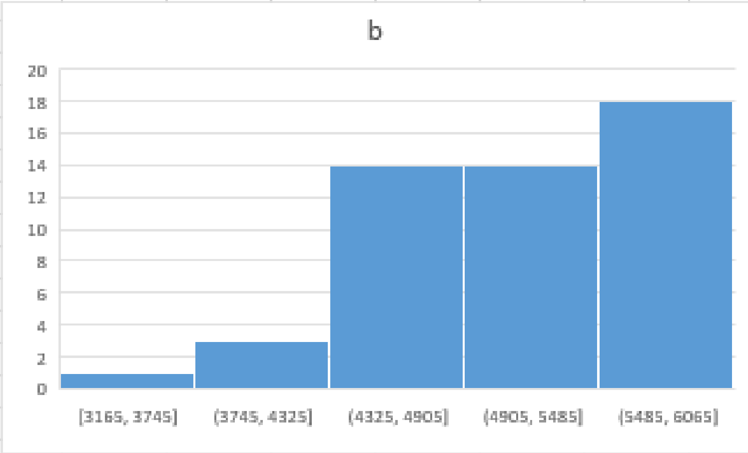
Abscisna os x predstavlja zaposlene, ordinatna os y pa plačo.

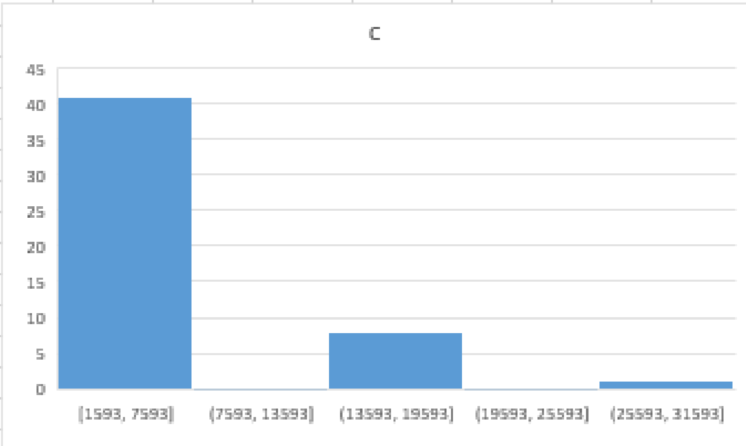
Tudi pri drugih grafičnih predstavitvah podatkov vodoravna os predstavlja zaposlene in navpična os plače. Tako usmeritev za graf predlaga Excel in tak graf nam da informacije o razliki med podjetji:



Graf plač v podjetju A jasno kaže eno ekstremno vrednost.

	*Podoben graf v podjetju B kaže bolj enakomerno razporeditev z nekaj nižjimi plačami. Eden izmed dijakov je izbral to podjetje za prvo službo, saj že na začetku zaslužiš kar nekaj denarja.*
	*Graf v podjetju C kaže na veliko število nizkih plač, nekaj višjih in eno ekstremno vrednost. Ambiciozen dijak se je odločil, da bi se pridružil temu podjetju.*
	*Ta dijakinja je že imela nekaj izkušenj z analizo podatkov. Podatke v vsakem podjetju je razvrstila v razrede in za predstavitev uporabila histogram. Poleg tega je za prikaz uporabila škatlasti diagram, s pomočjo katerega se je odločila.*


b
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
[3165, 3745]
(3745, 4325]
(4325, 4905]
(4905, 5485]
(5485, 6065]


c
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
[1593, 7593]
(7593, 13593]
(13593, 19593]
(19593, 25593]
(25593, 31593]

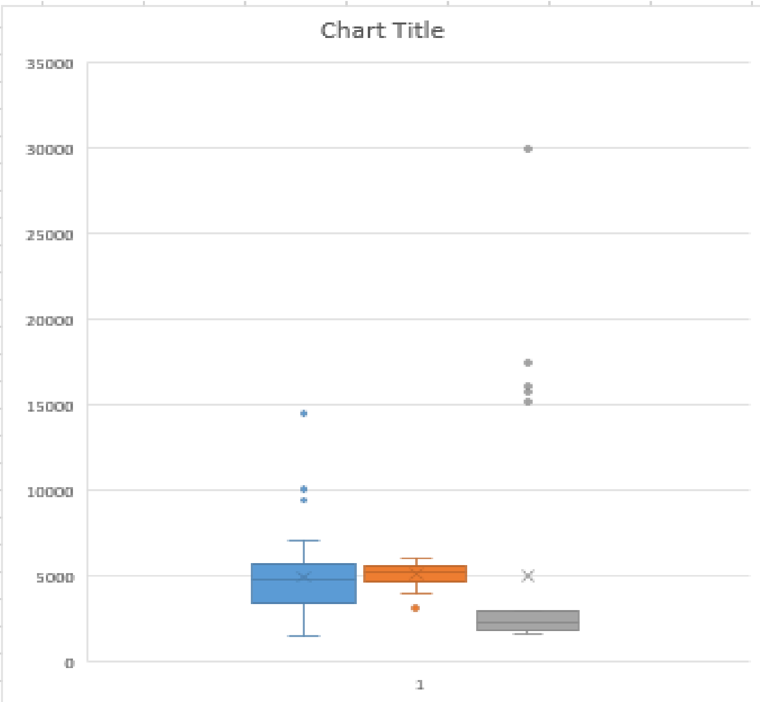


Chart Title
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1

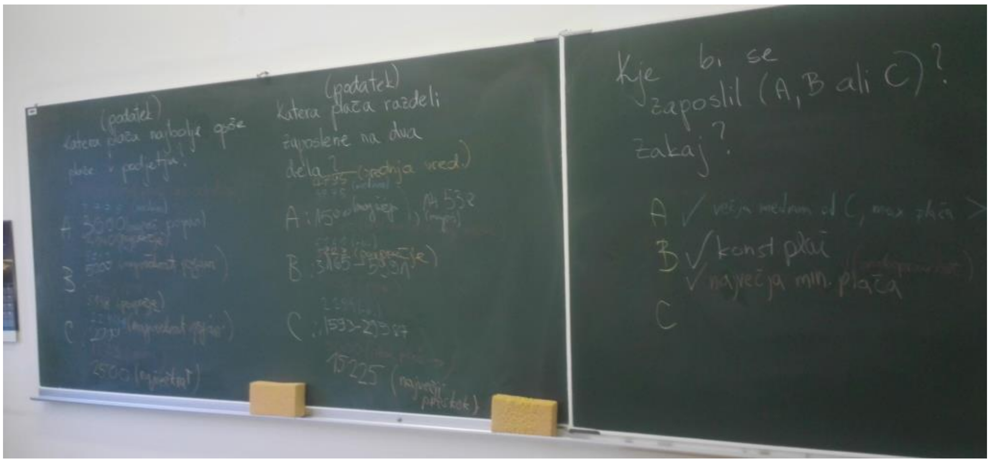
Ko smo dijake prosili, naj zapišejo svoje ugotovitve, ki so rezultat izračunov različnih mer osredinjenosti podatkov, so dobili različne številske rezultate:

odločili smo se za B, ker je najmanjša plača 3165. Najbližja povprečni plači: – A: 5064 → A: najbolj opredeli – B: 5160 B: – C: 2979 C:	*Dijaki so med podatki poiskali plačo, ki je najbližja povprečni plači, in ta plača je zdaj predstavnik za množico podatkov. Za njih je najboljša izbira podjetje B, ker je najnižja plača v tem podjetju najvišja med danimi podjetji.*
Povprečna plača: PODJETJE A: 4940 € PODJETJE B: 5138 € PODJETJE C: 4992 € Kje bi se zaposlili? V podjetju B Zakaj? Ker je manj odstopanja od povprečne plače.	*Dijaki si izpišejo dane povprečne vrednosti in se odločijo za podjetje B, ker se plače v tem podjetju najmanj razlikujejo od povprečja.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	31	4563			13	4998			3	2115
26	18	4632			6	5160			9	2115
27	11	4635			29	5172			12	2205
28	21	4698			38	5208			38	2238
29	15	4755			39	5223			24	2271
30	4	4794			14	5259			23	2316
31	44	4953			17	5310			14	2343
32	34	5064			19	5331			36	2349
33	28	5094			23	5406			17	2355
34	36	5118			24	5406			37	2367
35	24	5133			43	5445			7	2595
36	8	5166			44	5451			15	2631
37	1	5211			31	5487			1	2646
38	13	5265			22	5511			29	2646
39	35	5454			33	5538			46	2757
40	39	5457			27	5550			27	2799
41	37	5580			16	5568			34	2871
42	9	5634			9	5586			31	2925
43	41	5991			20	5637			6	2940
44	17	6063			28	5670			21	2973
45	12	6459			30	5673			30	2979
46	49	6531			47	5700			39	15225
47	25	6585			18	5766			16	15753
48	22	6660			3	5778			22	15909
49	47	6759			32	5826			48	16086
50	45	7101			41	5943			8	16104
51	42	9450			11	5967			47	16158
52	43	10113			36	5976			25	17421
53	14	10131			4	5979			13	17550
54	19	14538			15	5991			33	29987
55	median	4775			median	5241			median	2294

Dijaki so poudarili plače, ki delijo seznam na dva enaka dela in poiskali mediano z uporabo Excela. Izbrali so podjetje B, ker ima najvišjo povprečno plačo in najvišjo mediano.

Učitelj je različne izračune in zamisli zapisal na tablo in zapise uporabil za primerjavo in razpravo:



Orodja za evalvacijo

1. Določite aritmetično sredino, mediano in modus naslednje množice podatkov:
   a) 4, 4, 4, 5, 6, 6, 20 b) 4, 4, 4, 5, 6, 19
   Odgovor:
   a) Aritmetična sredina = 7, Mediana = 5, Modus = 4
   b) Aritmetična sredina = 7, Mediana = 4.5, Modus = 4

2. V nekem podjetju imajo vsi zaposleni enako plačo, razen direktorja, ki zasluži deset krat toliko. Katera bi bila primerna mera osredinjenosti podatkov? Utemeljite svoj odgovor.
   Odgovor: Mediana, saj ima osamelec (visoka plača) velik vpliv na aritmetično sredino.

3. V tabeli so rezultati testa za 45 dijakov (od 100 dijakov).

59	32	81	70	71	72	83	92	95
61	69	59	91	84	73	74	66	77
70	67	65	58	59	78	93	95	50
62	67	92	65	54	90	92	79	62
75	83	98	71	83	67	59	46	64

   a) Poiščite aritmetično sredino, mediano in modus teh meritev.
   b) Ali mediana pravilno predstavlja to množico podatkov? Razložite.
   c) Vaš rezultat je 58. Katero mero boste uporabili za primerjavo, ko boste svoj rezultat povedali svojim staršem?

   Odgovor:
   a) Modus: 59, Mediana: 71, Aritmetična sredina: 72,3
   b) Mediana je dobra mera, če rečemo, da je 32 točk osamelcev.
   c) Modus je najboljša mera, če želimo predstaviti, da rezultat ni daleč od sredine.

4. Izbrati morate kraj, kjer boste preživeli poletne počitnice. Edini podatki, ki jih imate, so mere osredinjenosti podatkov za dnevne temperature v 90 dneh poletja. Temperaturo merimo v stopinjah Celzija ob poldnevu:

	A	B	C
Arit. sredina	32,5	32	33
Mediana	26	32	26
Modus	20	31	26

   Kaj vam ta števila povedo o podnebju na vsaki od treh lokacij?

Predlogi za nadaljnje preiskovanje

V nadaljnji nalogi bi lahko ponovili podobne aktivnosti v drugem kontekstu: Podatki so seznam dijaških ocen. Katere mere osredinjenosti podatkov bolje opisujejo njihove ocene?
Drugačna aktivnost se lahko usmeri v predstavitve podatkov, kot so grafi, škatlasti diagram in histogrami, ter lahko vsebujejo pojme razpršenosti.
Podatki so lahko predstavljeni v grafični obliki namesto v obliki tabele neobdelanih podatkov, naloga pa ostane enaka nalogi iz tega scenarija.
Dijake lahko prosimo, naj poiščejo situacije, v katerih aritmetična sredina, modus ali mediana najbolje predstavlja sredino podatkov.

Primeri:

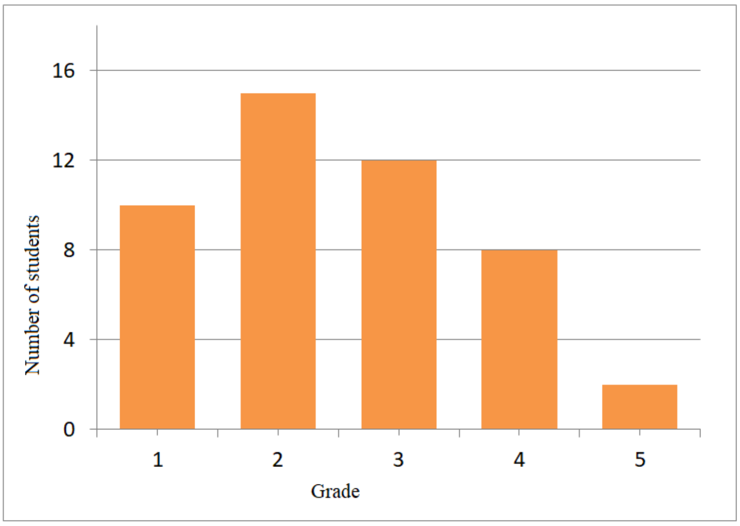
1. Odločiti se morate, kako boste odšli v šolo: z avtobusom, z vlakom ali s kolesom. Našli ste podatke o javnem prevozu v vašem mestu. Nekatere podatke o časih potovanja od doma do šole v minutah (zaokrožene na cele minute) ste zapisali glede na lastne dnevne izkušnje. Imate srečo, vaš dom in vaša šola sta blizu avtobusne in železniške postaje. Podatki so osnovani na meritvah, ki ste jih zbirali

12 mesecev. Zraven teh podatkov lahko upoštevate tudi druge spremenljivke. Odločite se o svojem prevozu in odločitev utemeljite.

		Avtobus	Vlak	Kolo
Ponedeljek	Arit. sredina	20	12	19
	Mediana	14	13	19
	Modus	15	12	19
Torek	Arit. sredina	19	18	19
	Mediana	13	12	18
	Modus	14	13	18
Sreda	Arit. sredina	18	12	18
	Mediana	12	13	17
	Modus	14	12	18
Četrtek	Arit. sredina	19	14	18
	Mediana	12	12	18
	Modus	15	13	18
Petek	Arit. sredina	24	19	20
	Mediana	20	14	19
	Modus	19	15	20

Dijaki naj se pogovorijo o stanju glede na lastna stališča. Na primer, rečejo, da bi se vsak dan, razen v petek, peljali z avtobusom; ali da je odločitev odvisna od letnega časa. Poleg tega lahko pričakujejo, da avtobusi vozijo pogosteje od vlakov, na kolo pa sploh ni treba čakati. Upoštevajo lahko tudi cene vozovnic.

2. Spodnji graf orisuje število dijakov, ki dosežejo določeno oceno.



a) Katero mero osredinjenosti podatkov lahko enostavno določite le s pomočjo grafa?
b) Določite vrednosti vseh mer osredinjenosti podatkov in utemeljite svoj postopek.
c) Opišite in komentirajte rezultate testa s pomočjo vrednosti mer osredinjenosti podatkov.

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

V tem scenariju mere osredinjenosti podatkov nastopijo pri raziskovanju in organiziranju poskusnih podatkov o plačnih listah.
Učenje iz in v uporabi omogoči dijakom, da bolje vidijo, kako lahko uporabijo svoje statistično znanje in veščine. Scenarij pripomore k sposobnosti presoje statističnih rezultatov in njihove kritične interpretacije.
Nadaljnje učne ure lahko nadgrajujejo mere osredinjenosti podatkov v drugih okoljih in vključujejo mere razpršenosti in grafične predstavitve, kot so škatlasti diagrami in histogrami.

Pomembnost in uporabnost

Kdaj in kako uporabiti znanje je še posebno pomembno v statistiki, saj statistiko uporabljamo na mnogih področjih (na primer eksperimentalna fizika, družbene vede, kemija, psihologija, medicina …). Zraven tega se dijaki v vsakdanjem življenju pogosto soočajo s statističnimi rezultati (v časopisih, ocene v šoli).

Preiskovalne veščine

Preiskovanje vsebujejo vse faze. Dijaki bi morali biti vajeni preiskovanja in večkrat postavljeni v položaje, kjer bodo delovali na tak način. Poleg tega, da se usposabljajo v matematičnih orodjih, se učijo tudi veščin preiskovanja. Skozi izvajanje scenarija bodo dijaki sistematično raziskovali, organizirali podatke, se odločali, sodelovali in se sporazumevali. V fazi institucionalizacije naj bi bile vključene tudi veščine preiskovanja, posebno veščina organizacije, strukturiranja in povzemanja podatkov.

Možnosti za nadaljevanje učnih ur

Scenarij je lahko del niza učnih ur o statistiki in predstavitvi podatkov.

- *Predznanje:* Pričakujemo, da dijaki znajo uporabljati Excel za osnovno obdelavo podatkov, kot je urejanje po velikosti, grafično predstavljanje in računanje. Predvidevamo, da dijaki poznajo aritmetično sredino.
- *Uvod:* Nalogo lahko zastavimo kot zgodbo o osebi, ki je pravkar zaključila fakulteto in išče službo. Oseba prebira časopis, v katerem so oglasi o prostih delovnih mestih v treh podjetjih, ki jo zanimajo. Zato poišče informacije o plačah v teh podjetjih in primerja možnosti zaslužka v njih. Kako naj se odloči?

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija*: Kontekst podpira dijake pri uporabi lastnega besedišča za opis značilnosti podatkov pri matematizaciji problema. Besede, ki jih uporabljajo so: ekstrem, urediti, razpon, vsi skoraj enaki, velika razlika. Zato imajo potrebo, da narišejo podatke ali da jih organizirajo po intervalih, saj veliko množico težko nadzorujejo ali analizirajo. Taki opisi in predstavitve jim pomagajo vstopiti v svet statistike in ga povežejo z resničnimi situacijami.
- *Vertikalna matematizacija*: Pričakovano različnost v razmišljanju dijakov lahko uporabimo pri fazi potrditve in institucionalizacije, da razvijemo formalne statistične mere osredinjenosti podatkov, načine njihovega izračuna in uporabe. Nadaljnje učenje lahko usmerimo v povezave med grafičnimi predstavitvami podatkov in merami razpršenosti v povezavi z merami osredinjenosti podatkov. Raziščemo lahko učinkovito uporabo tehnologije v statistiki. Samo po sebi pa je zelo pomembno vključiti dijake v način, na katerega statistiko uporabljamo za povzemanje podatkov ter sprejemanje odločitev in napovedi o svetu okrog njih.

MERIA modul “Tobogan”

Uvod v odvod

Učni scenarij

Standardi znanja (pričakovani dosežki)	Konceptualno razumevanje naklona krivulje kot naklona tangente.
Splošni cilji	Matematično modeliranje tobogana z uporabo grafov funkcij. Računanje naklona (odvoda funkcije) brez ali z uporabo računalnika. Smiseln uvod v analizo. Preiskovalne veščine: eksperimentiranje z različnimi grafi funkcij brez in z uporabo računalnika, ponavljanje postopka z namenom izboljšanja rešitve, primerjava različnih strategij, utemeljevanje karakteristik dobljene rešitve. Interdisciplinarne veščine: dijaki lahko povežejo svoje izkušnje gladkosti fizičnih predmetov z matematičnimi izrazi za tangento na krivuljo in odvod funkcije. Matematični modeli se lahko uporabijo za izdelavo 3D predmetov s pomočjo 3D printerja (IKT spretnosti) ali iz drugih materialov (ročne spretnosti).
Potrebno matematično predznanje	Grafi in enačbe linearnih in nekaterih nelinearnih krivulj (krožnica, parabola ali graf eksponentne funkcije).
Letnik	Dijaki, stari 16 - 18 let (oziroma kadar se uvede odvod)
Trajanje	60 - 90 minut, dve šolski uri
Potrebni material	Papir, svinčnik, računalniško orodje za risanje grafov funkcij, npr. GeoGebra (Uporaba računalnika ni nujna, ampak lahko izboljša izkušnjo dijakov).

Problem:
Oglej si sliki smučarske skakalnice in otroškega tobogana. Obe imata ukrivljen del na dnu in/ali na vrhu ter raven del v sredini. Uporabi matematična orodja in zasnuj tako obliko. Osredotoči se na enega od ukrivljenih delov in sredinski ravni del. Upoštevaj, da želiš ustvariti čim bolj enakomerno vožnjo.

Skakalnica Holmenkollen, Oslo, Norveška. Fotograf: Mathias Stang in otroški tobogan.

Vpeljite koordinatni sistem in poiščite enačbo za *en* ukrivljeni del in enačbo za ravni del.
Opomba: Za daljšo izvedbo učne ure z več aktivnostmi modeliranja izpustite zadnji stavek iz opisa problema (glejte modul za dodatne faze učne ure).

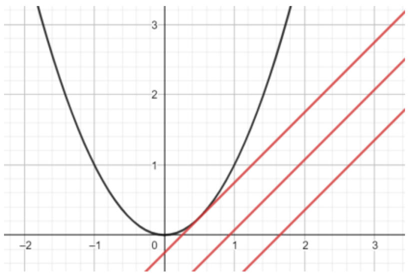
Faza	**Dejavnosti in navodila učitelja**	**Dejavnosti in odzivi dijakov**
Devolucija (Prenos) (didaktična) 5 min	Učitelj predstavi problem. Dijake opozori, da je potrebno zasnovati model, ki bo omogočal <u>enakomerno vožnjo</u> (ki ne trese). Učitelj poskrbi, da se dijaki osredotočijo na enega od ukrivljenih delov in sredinski ravni (linearni) del.	Dijaki se posedejo v skupine po dva ali tri. Dijaki so navdušeni!
Reševanje (Delovanje) (adidaktična) 20 min	Učitelj si beleži zamisli dijakov, njihove strategije in izsledke. Učitelj preveri, ali dijaki razumejo, kako geometrijsko izgleda dober primer povezave med ukrivljenim delom in premico (rešitev zahteva ne le zvezno, ampak gladko – vsaj zvezno odvedljivo - krivuljo). Če po 10 minutah ni popolnoma nobene zamisli za izbiro ukrivljenega dela, učitelj dijake spomni na oblike grafov funkcij $y = x^2$ in/ali $y = \cos x$ (toda ne krožnice) s kratko (didaktično) prekinitvijo pred celotnim razredom. Če so kakšni dijaki reševali s krožnico, naj nadaljujejo z naslednjimi problemi: "Kaj se zgodi, če spremenimo kot ali če spremenimo točko, v kateri se krožnica in premica dotikata? Kako se spremeni enačba tangente/premice?" Za tem učitelj prosi skupino učencev, da se osredotočijo na primer, kjer ukrivljeni del ni krožnica.	Dijak nariše skico in vpelje koordinatni sistem. Pristope dijakov lahko opišemo z eno izmed naslednjih kategorij: 1. Pristop z »mejno« premico (Bounding line): poljubno izberejo premico, ki jo nato premikajo (translacija in rotacija) dokler ne izgleda, da je le eno presečišče (v območju gledanja). 2. Pristop s sekanto (Secant line): izberejo eno točko na krivulji - predvidno točko tangentnosti; nato še eno točko na krivulji in narišejo premico skozi ti dve točki in premikajo drugo točko bližje prvi, da dobijo bolj gladek prehod. 3. Pristop z linearno aproksimacijo (Linear approximation): Dijaki izberejo eno točko na krivulji, narišejo premico skozi to točko in poizkušajo prilagoditi naklon tako, da se čim bolje prilega krivulji. Nekateri dijaki bi lahko uporabili krožnico za ukrivljeni del in dejstvo, da je tangenta pravokotna na polmer. Takemu reševanju bomo rekli *reševanje s krožnico*. Za podrobnosti teh (kategorij) strategij/pristopov glejte spodaj

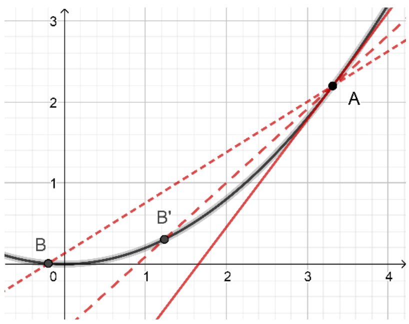
		Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja.
Formulacija (Zapis ugotovitev) (adidaktična) 15 min	Učitelj prosi dijake, naj izoblikujejo svoje predstavitve rešitev. Med delom dijakov učitelj izbere skupine različnimi pristopi, ki bodo predstavile svoje izsledke.	Dijaki oblikujejo rezultate znotraj svojih skupin. Za določene skupine posamezen dijak predstavi njihove izsledke.
Verifikacija (Potrditev) (didaktična) 10 min	Učitelj vpraša: "Kako vemo, da je rešitev dobra?" in "Ali obstaja najboljša rešitev?" Če so dijaki uporabili le vizualno validacijo, lahko učitelj predlaga algebraičen ali numeričen pristop.	Dijaki razložijo, zakaj je posamezna rešitev dobra in ali je kakšna boljša od drugih. • Vizualna validacija: Nekateri se bodo zanašali na vizualno oceno konstrukcije; če izgleda dobro, je dobro. Uporabijo lahko tudi povečavo krivulje. • Algebraična validacija: Dijaki lahko izračunajo presečišče (oz. presečišča) algebraično in mogoče vidijo, da je lokalno edino. • Numerična validacija: Dijaki lahko izračunajo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za dve točki na krivulji in opazijo, da je to približno naklon njihove premice. Če so dijaki reševali s krožnico in izračunali enačbo tangente, bi morali biti prepričani v to, da imajo najboljšo rešitev, in razložiti zakaj (geometričen in/ali algebraičen dokaz).
Institucionalizacija (Oblikovanje ustaljenega zapisa) (didaktična) 10 min	Učitelj razpravlja o pojmu tangente na enak način, kot so ga uporabili dijaki. Učitelj lahko izpostavi enega *ali več* od naslednjih vidikov naklona krivulje v točki: a) najboljša lokalna aproksimacija sledi vizualni validaciji	Nekateri lahko govorijo o naklonu. Lahko govorijo o "tangenti" ali uporabi gumba v GeoGebri. Dijaki poslušajo in jih zanima, kako izračunamo najboljšo rešitev tega problema za poljubne oblike in krivulje.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>b) lokalno ena »mejna« premica – eno presečišče sledi algebraični validaciji
c) klasična definicija z uporabo sekant in limit diferenčnih količnikov sledi numerični validaciji

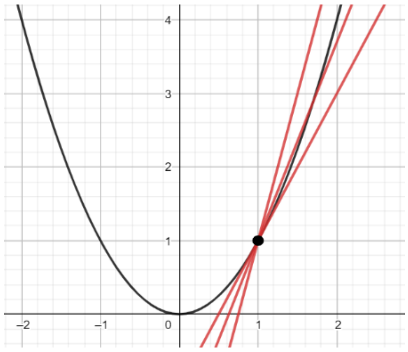
Če so dijaki reševali s krožnico, lahko učitelj govori o tangenti na krožnico in tangenti na druge krivulje. Učitelj spomni, da je tangenta najboljša rešitev za krožnico, s tem, da so dijaki računali približek za tangento na ostalih krivuljah.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Možni načini, kako lahko dijaki dosežejo standarde znanja</td>
<td>Dijaki lahko uporabijo več pristopov:

1. Pristop z »mejno« premico (Bounding line approach):
Dijaki izberejo na primer $y = x^2$.
Algebraična validacija:
obravnavajmo družino premic
$$y = x + b.$$
»Mejno« krivuljo dobimo z eliminiranjem y-spremenljivke:
$$x^2 = x + b.$$
Ta enačba ima eno rešitev, če je diskriminanta enaka 0: $1 + 4b = 0$.
Torej $b = -\frac{1}{4}$ nam da gladek prehod.


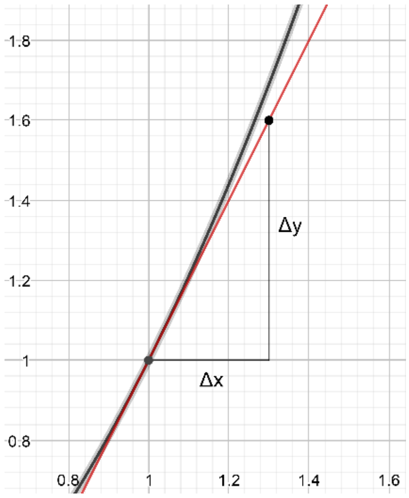
2. Pristop s sekanto (Secant line approach):
Dijaki fiksirajo eno točko na krivulji – točko, kjer želimo prehod med krivuljama. Nato izberejo še eno točko na krivulji, narišejo premico skozi ti dve točki in premikajo drugo točko bližje prvi, da dobijo bolj gladek prehod. Bližje se izbere točka, boljša aproksimacija bo.
Ta pristop je najbolje uporabiti s pomočjo računalnika.

</td>
</tr>
</table>

3. Pristop z linearno aproksimacijo (Linear approximation approach): Dijaki na primer izberejo $y = x^2$ in točko $(1{,}1)$, kjer se ukrivljen del konča in se premica $\mathrm{y = ax + b}$ začne. Ugotovijo lahko $a > 1$ in poizkušajo različne vrednosti (kjer je $a = 2$ pravilna vrednost). »Poizkušajo« pomeni s skiciranjem ali risanjem grafov.



Z opisom premice kot $y = ax + b$, zaključijo $a + b = 1$. Torej lahko za vsak naklon a izračunajo b.

Nekateri dijaki lahko dobijo aproksimacijo za a z uporabo dveh točk na narisani premici in uporabo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Numeričen primer: Dijak lahko dobi $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}6}{0{,}3} = 2$.
Iz $a + b = 1$ sledi $b = -1$.
Validacija je najverjetneje vizualna, toda lahko je tudi numerična – predvidoma predlagana s strani učitelja, saj je metoda podobna. Izberite dve točki na paraboli in izračunajte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; na primer $(1\,,1)$ in $(1{,}1\,,1{,}21)$. Tedaj $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1$, kar je dokaj blizu pravilnega odgovora.

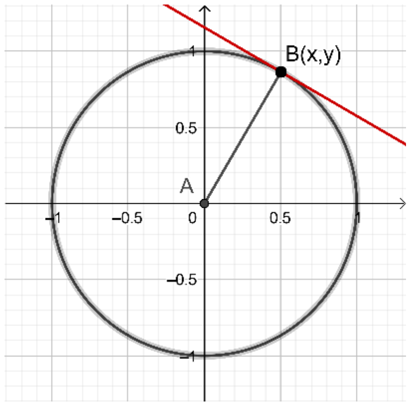
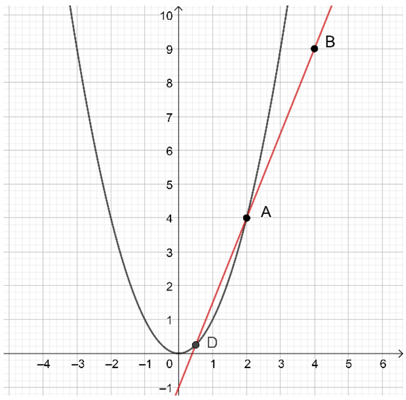
Dijaki lahko preverijo pravilnost rešitve tudi z računanjem presečišč med parabolo in premico (algebraična validacija). Če dijaki poznajo kvadratne enačbe in diskriminante, lahko nadaljujejo z reševanjem sistema enačb:

$$y = x^2, y = ax + 1 - a,$$

in dobijo $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Enačba bo imela eno rešitev, če bo diskriminanta enaka 0:

$$a^2 - 4(a - 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

4. Reševanje s krožnico: Dijaki izberejo krožnico. Če so dijaki izbrali krožnico, lahko izberejo enačbo $x^2 + y^2 = 1$ in točko $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, ki ustreza kotu $\frac{\pi}{4}$. Če se spomnijo, da je polmer krožnice pravokoten na tangento, lahko ugotovijo $a = -1$. Od tu lahko določijo enačbo tangente.

	Če učitelj naroči dijakom, da izberejo drugo točko (x, y), lahko določijo naklon tangente a iz naklona premice skozi izhodišče in točko (x, y), ki je enak $\frac{y}{x}$. Torej $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (v splošnem), toda najverjetneje bodo dijaki to naredili le za posamezno konkretno točko. Če dijaki poznajo in uporabljajo vektorje, je ta razmislek nekoliko lažji.  5. Z računalnikom (GeoGebra in podobni) Če dijaki uporabljajo GeoGebro, bodo verjetno uporabljali podobne korake in razmisleke kot sicer. Razlika je v tem, da računalnik izračuna enačbo premice hitreje in nariše natančen prikaz izbrane krivulje. Z računalnikom lahko dijaki preizkusijo več možnosti v manj časa in zato lahko opazijo kaj, česar ne bi s papirjem in svinčnikom. Na primer: • Nekateri lahko najdejo gumb za risanje tangente in nadaljujejo tam. • Mogoče narišejo krivuljo in poljubno "dobro" premico skozi točko na krivulji in neko drugo točko. Nato sliko približajo in preverijo, ali izgleda v redu. Za boljše prileganje lahko premikajo drugo točko. Nato lahko izberejo možnost, ki se jim zdi najboljša, in preberejo enačbo premice s pomočjo orodja v programu. • Nekateri bi lahko začeli tako, da sliko povečajo, dokler graf krivulje ne izgleda raven. Nato lahko izberejo dve točki na grafu, iz katerih določijo enačbo premice (ali vsaj narišejo bolj ali manj tangento). • Lahko preverjajo, ali ima njihova premica presečišča s krivuljo (v tem primeru je pomembno, ali so narisali premico ali poltrak). Računalnik jim lahko tudi prikaže presečišča med premico in krivuljo. Nato lahko opazijo: kadar spremenijo naklon premice s fiksno točko na krivulji, spremenijo tudi (drugo) presečišče s krivuljo (na to smo opozorili tudi v institucionalizaciji). Ker takoj vidijo rezultat, lahko pridejo do hipoteze, da je najboljša rešitev, ko točki A in D sovpadata. 

Pojasnilo glede materialov za dijake

Zamisel načrtovanja znane oblike bi morala dijake navdušiti v fazi devolucije (prenosa), saj vpelje kontekst iz resničnega življenja, v katerem je gladkost pomembna na intuitivni ravni. Če dijakom oblika smučarske skakalnice ali otroškega tobogana ni dovolj zanimiva, jim lahko učitelj pove, da enaka načela veljajo tudi pri gradnji železnic, vlakcev smrti ipd. (osredotočiti se morajo na združevanje enega ukrivljenega dela z linearnim delom). To dijakom govori tudi o aktualnosti problema.

Razen možne uporabe IKT za izvedbo scenarija ne potrebujemo dodatnih gradiv.

Variacije na podlagi didaktičnih spremenljivk

V scenariju so možne naslednje spremembe, ki ne spremenijo njegovih ciljev:

Didaktično okolje (Milje): izberemo lahko drugačne slike, ki pa morajo vsebovati ukrivljen in raven del. Po možnosti naj bo predmet, ki ga načrtujemo, sestavljen iz enega ukrivljenega in enega ravnega dela. Dijakom mora biti čim bolj znan.

V nekaterih primerih dijaki v prvih minutah prve faze reševanja (delovanja) nimajo ideje, kaj bi storili, ali njihovo delo ne vsebuje produktivnega matematičnega dela. V tem primeru lahko učitelj delo prekine in se pogovori o prvih spoznanjih dijakov in njihovih izzivih, pri tem pa jih usmeri v pogovor o tem, kaj pomeni enakomerna vožnja. Nato s fazo reševanja nadaljuje.

Če se je učitelj odločil izpustiti stavek »Vpeljite koordinatni sistem in poiščite enačbo za *en* ukrivljeni del in enačbo za ravni del.« iz devolucije (opisa naloge), lahko doda vmesni pogovor o nujnosti vpeljave koordinatnega sistema za matematizacijo problema. Ob koncu pogovora bi morali dijaki razumeti, da morajo delati s koordinatnim sistemom in konkretnimi funkcijami/enačbami za ukrivljen del in za premico. Pred nadaljevanjem učitelj preveri, ali dijaki razumejo geometrijski pomen dobrega in slabega ujemanja ukrivljenega dela in premice (rešitev zahteva ne le zvezno, ampak gladko krivuljo). Po tem pogovoru dijaki nadaljujejo s fazo reševanja, kot je opisana v scenariju.

Dijaki lahko uporabljajo geometrijska programska orodja, npr. GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Desmos, Wolfram Alpha (ali Mathematica), Maple, MATLAB, Octave idr. Lahko uporabljajo tudi grafični kalkulator ali mobilni telefon z geometrijskim programskim orodjem. Priporočamo, da dijakom predstavimo tudi to možnost, odločitev o uporabi pa naj bo njihova.

Trajanje posamezne faze se lahko spremeni glede na delo dijakov, vendar razlika ne sme biti prevelika glede na predlagano.

V *fazi reševanja (delovanja)* naj dijaki sami izberejo enačbe za ukrivljen del. Samo v primeru, da nekatere skupine (ali celoten razred) po 10 minutah nimajo nikakršne zamisli, s katero bi nadaljevali, lahko učitelj opomni te skupine (ali razred), kakšne možnosti imajo, npr. $\cos x$, $\frac{1}{x}$ ali x^2 (vendar ne krožnica). Ko se dijaki odločijo za funkcijo, ki opisuje ukrivljen del, se faza reševanja nadaljuje.

Če le nekateri dijaki rešujejo s krožnico, jim učitelj individualno postavi nadaljevalna vprašanja, ki so opisana v scenariju. S tem se izogne prekinjanju razmišljanja ostalih dijakov. Če ni dijakov, ki rešujejo s krožnico, lahko to rešitev učitelj omeni v fazi verifikacije (potrditve) ali fazi institucionalizacije, vendar ne pred tem.

Opažanja iz prakse

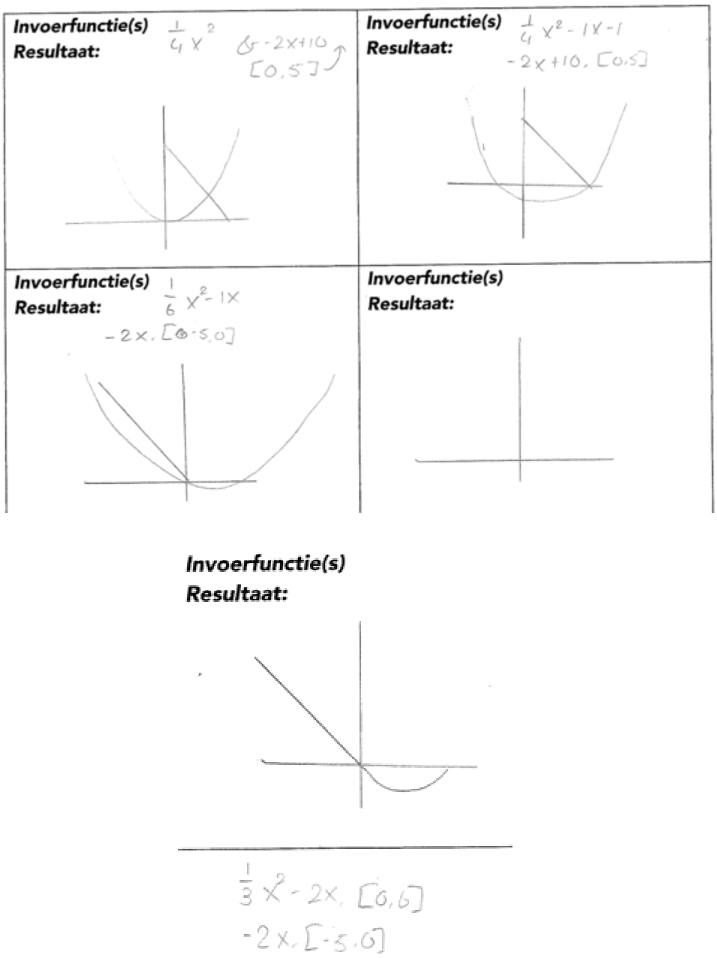
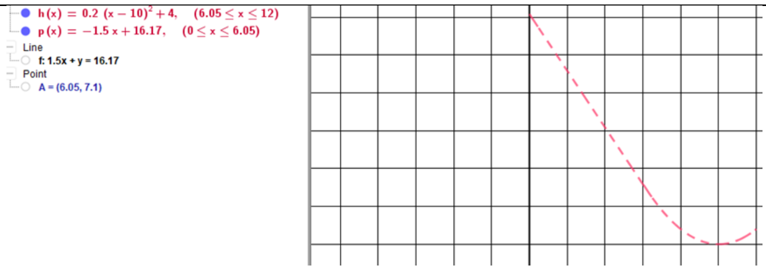
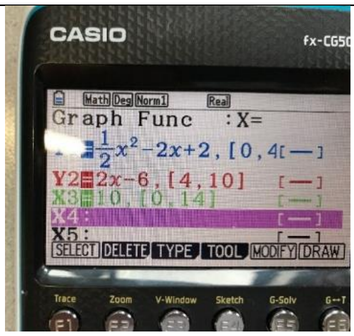
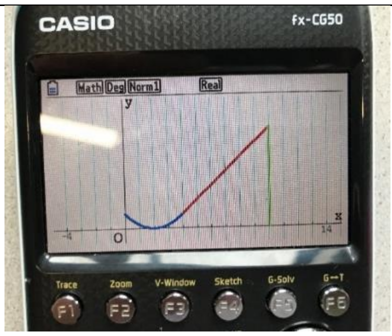
Nekaj splošnih ugotovitev:

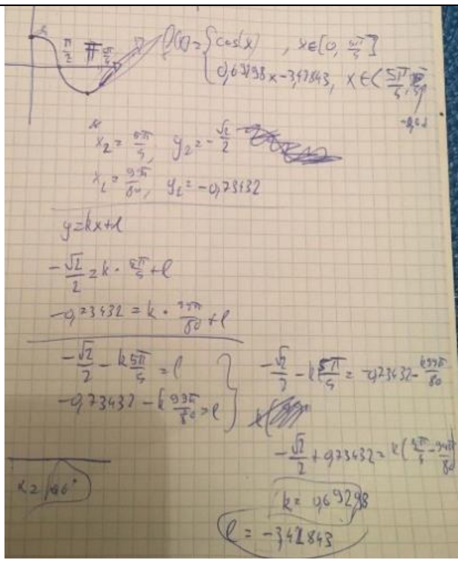
- Učna ura je bila učiteljem in dijakom v glavnem všeč.
- V nekaterih primerih so se dijaki preveč osredotočali na obliko ukrivljenega dela in jih je učitelj moral opozoriti, da načrt mora vsebovati tudi raven del, ki ga morajo združiti z ukrivljenim delom.
- Nekateri dijaki so se ukvarjali z uporabnimi malenkostmi tobogana, ki niso povezane z gladkostjo, zato je moral učitelj res dobro preveriti, ali dijaki razumejo, kaj geometrijsko pomeni dobro in kaj slabo ujemanje.
- Nekateri učitelji in dijaki so uporabili IKT, npr. GeoGebro, Geometer's Sketchpad, Desmos graph mobilno aplikacijo, grafični kalkulator. Skupine, ki so uporabljale IKT, so raziskale več zamisli. Nekateri dijaki so začeli na papirju in rešitev preverili z IKT. Drugi pa obratno.
- V nekaterih preizkusnih izvedbah scenarija so dijaki že poznali odvode in večina teh je ugotovila, da je prava rešitev tangenta.
- Nekateri dijaki so razpravljali o tem, kaj bodo spreminjali: parabolo, naklon premice, njeno začetno vrednost.
- Nekateri dijaki niso ugotovili, da bi nekje lahko uvedli parameter: na primer a ali b v enačbi $y = ax + b$ oziroma a, b ali c v enačbi $y = ax^2 + bx + c$, ali celo Δx kot parameter.

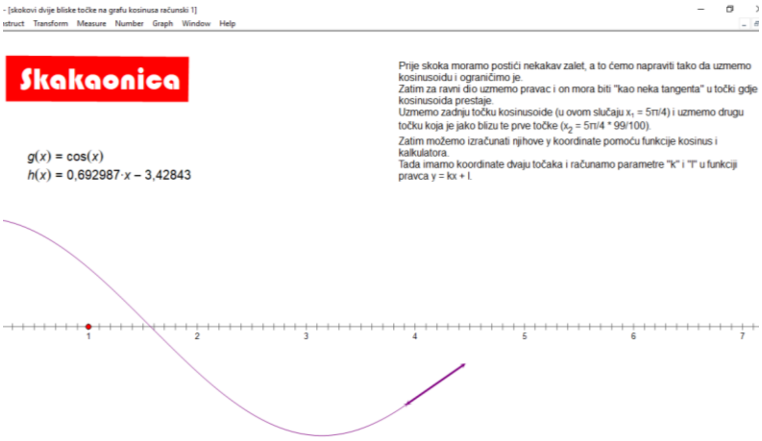
Pristopi načrtovanja dijakov so povezani z različnimi predstavami, ki jih imajo o tangentni premici.

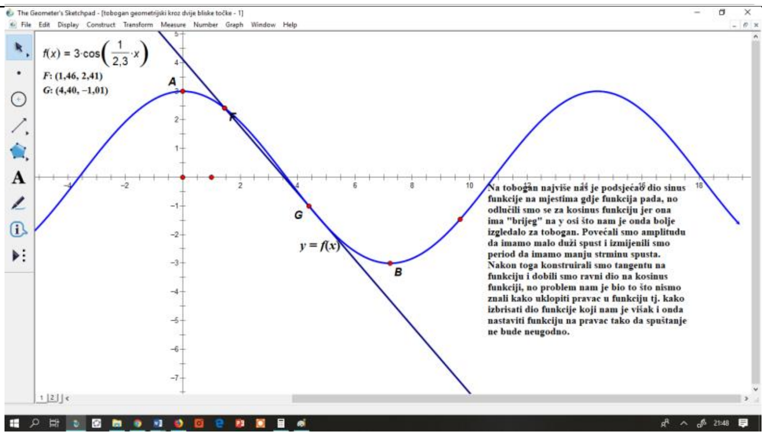
1. Pristop z »mejno« premico (Bounding line approach): izberejo prosto premico in jo premikajo (translirajo in rotirajo), dokler nima premica (navidezno) samo enega presečišča s krivuljo v izbranem območju.
2. Pristop s sekanto (Secant line approach): izberejo tako točko na krivulji, v kateri se bo tangenta krivulje dotikala; nato izberejo drugo točko na krivulji in obe točki povežejo s premico. Drugo točko približujejo prvi, da dobijo boljše prileganje.
3. Pristop z linearno aproksimacijo (Linear approximation approach): Dijaki izberejo točko na krivulji, narišejo premico in spreminjajo njen naklon, dokler se vizualno ne prilega krivulji.

Nekateri dijaki so za krivuljo izbrali krožnico in upoštevali dejstvo, da je tangenta pravokotna na polmer. Temu rečemo *reševanje s krožnico*.

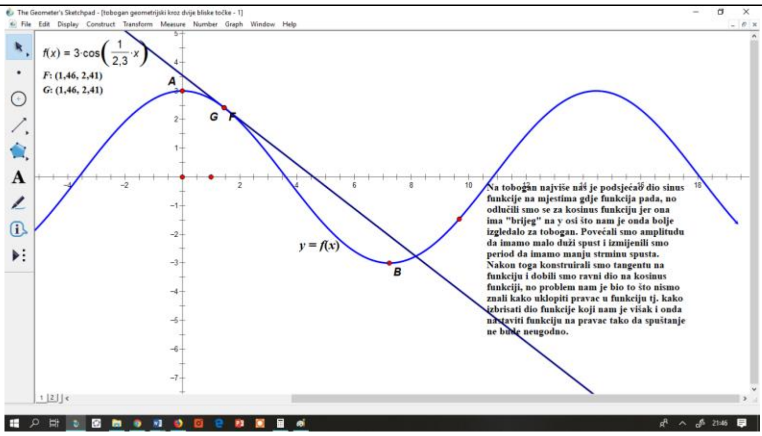
	*Dijaki spreminjajo parametre parabole in premice. Na koncu najdejo dobro rešitev. Izgleda, da se osredotočajo na presečišča in rezultat vrednotijo vizualno.*
	*Ta skupina spreminja le parameter b v enačbi $y = ax + b$ in tako poišče približek za rešitev.*
 	*Rešitev prikažejo na grafičnem kalkulatorju.*

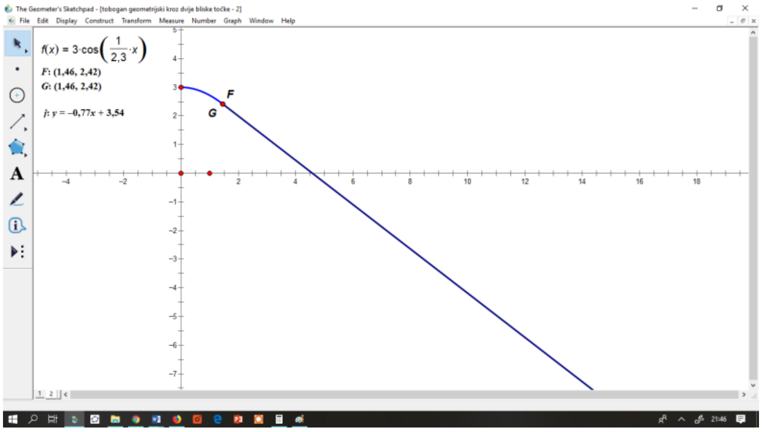
<table>
<tr>
<td>


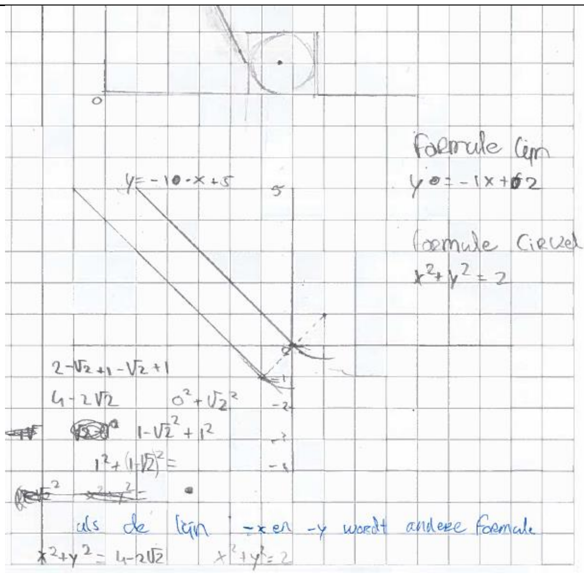


</td>
<td>Ta skupina je uporabila pristop s sekanto (2): določili so enačbo premice skozi dve bližnji točki na krivulji za približek linearnega dela. Za iskanje enačbe premice so uporabili numerične metode: pišejo, da so izbrali točko, kjer se kosinus konča ($x = 5\pi/4$), in drugo točko malo pred njo ($x = \frac{99}{100} \cdot 5\pi/4$).</td>
</tr>
<tr>
<td>


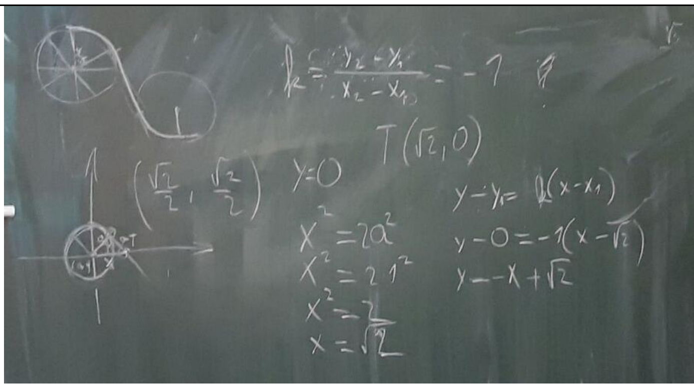
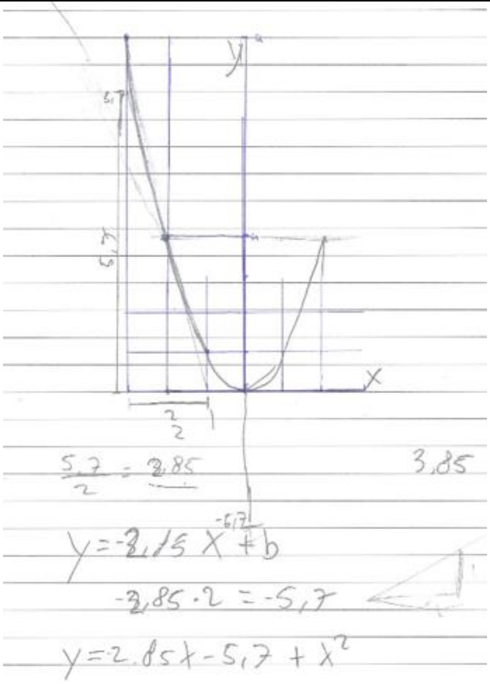
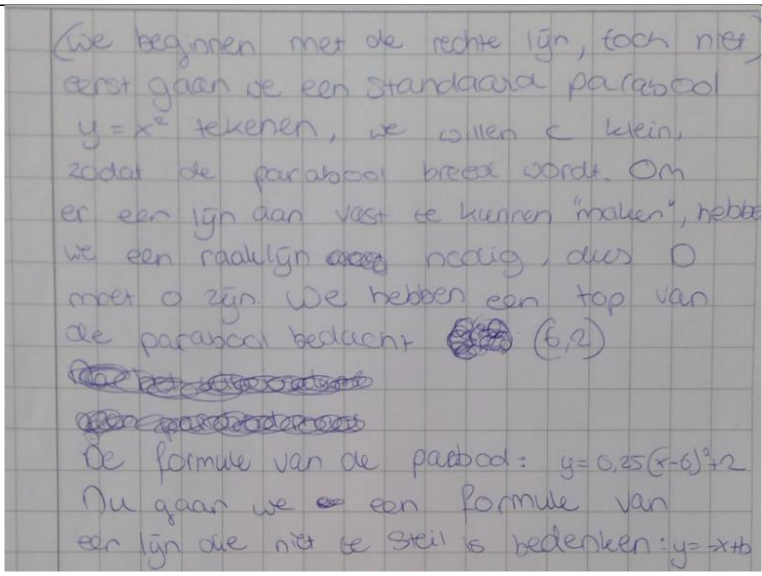
</td>
<td>Tudi ta skupina je uporabila pristop s sekanto (2). Enačbo so razbrali z ekrana.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>




</td><td></td></tr>
<tr><td>


</td><td>Ta skupina je poskušala z reševanjem s krožnico. Vedeli so, da je tangenta pravokotna na polmer (validacija je torej geometrijska: uporabijo izrek iz ravninske geometrije). Težave so imeli, ko so želeli z navpično translacijo doseči, da bi se premica in krožnica sekali.</td></tr>
</table>

	*Tudi ta skupina rešuje s krožnico. Poznajo točko* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *na enotski krožnici in konstruirajo premico z naklonom -1 skozi to točko.*
	*Ta skupina nariše graf parabole* $y = x^2$*. Nato želijo doseči ujemanje tangentne premice v eni točki na način, ki je podoben pristopu linearne aproksimacije (3). Naklon premice določajo tako, da izmerijo* Δx *in* Δy *in izračunajo kvocient. Validacija je vizualna.*
	*Ena skupina dijakov je uporabila diskriminanto, da bi določila, kdaj je med premico, ki je kandidatka za tangento, in parabolo eno presečišče. Izbrali so parabolo* $y = 0{,}25\,(x-6)^2 + 2$ *s temenom* $(6\,,2)$ *in skušali poiskati vrednost parametra b v enačbi premice* $y = -x + b$ *z uporabo diskriminante.*

Orodja za evalvacijo

Za hiter test pridobljenega znanja lahko učitelj postavi naslednja vprašanja:

1. Učitelj nariše poljubno krivuljo in premico, ki očitno ni tangenta. Nato vpraša dijake, ali mislijo, da je taka oblika primerna za železnico. Dijaki pojasnijo, zakaj ne.
2. Določite enačbo tangente na enotsko krožnico v točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Ocenite naklon parabole $y = x^2$ v točki $(2, 4)$.

Predlogi za nadaljnje preiskovanje

1. Pojem mejne premice (*bounding line*) in razlika med njo in tangento.
2. Evklidov pojem tangente – taka premica, da nobena druga ravna črta ne more potekati med njo in krivuljo.
3. Po tem, ko dijaki spoznajo limito diferenčnega količnika kot odvod funkcije, lahko izračunajo formulo za odvod enostavne funkcije, na primer $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$. V razredu lahko nato razpravljate o tem, kaj to pomeni za tangente te funkcije.

Utemeljitev in pogled na scenarij z vidika RME

Pomembnost in uporabnost

- *Realno življenje*: problem je povezan z vsakodnevno izkušnjo dijakov. Objekte, ki jih načrtujejo, poznajo in razumejo, kakšen je rezultat različnih oblik. Naloga izkorišča njihovo predhodno poznavanje pojma gladkosti, posebej njihove telesne izkušnje spuščanja po gladkem toboganu.
- *Področje dela*: Dijaki se naučijo načrtovati in matematizirati oblike, ki jih srečujejo v resničnem življenju. Naučijo se povezati predmet z matematičnim prikazom. Obliko predmeta poenostavijo iz tridimenzionalnega prostora v krivuljo. Te veščine so pomembne pri načrtovanju (na primer v arhitekturi) in modeliranju v profesionalnih kontekstih.
- *Nadaljnje možnosti*: Scenarij je uvod v odvod in matematično analizo.

Preiskovalne veščine

Dijaki se naučijo poenostaviti problem in uporabiti matematiko za opis tistega dela, ki ga obravnavajo. Postavljajo hipoteze in jih testirajo. Načrtujejo primere in primerjajo različne rešitve. Odločajo se o tem, katera rešitev je bolj primerna. Lahko zagovarjajo boljšo rešitev in svoje argumente posredujejo drugim. Lahko predvidevajo in posplošijo svoje rezultate.

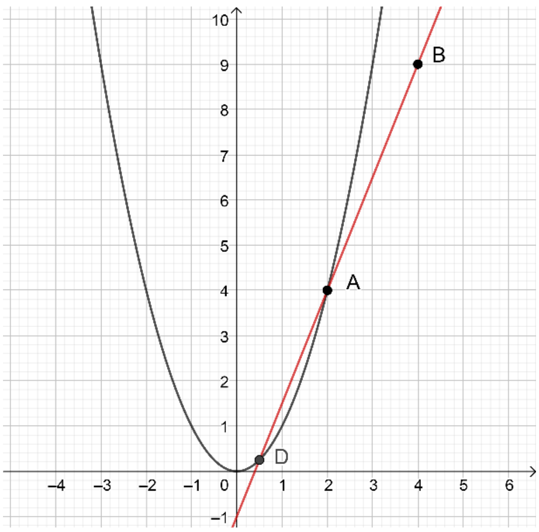
Možnosti za nadaljevanje učnih ur

Scenarij je lahko del niza učnih ur o odvodu. Predznanje, ki ga zahteva od dijakov, zajema: risanje funkcij, linearne funkcije in premice, primere nelinearnih funkcij.
Kasneje v nizu učnih ur se lahko problemu tobogana posvetimo bolj formalno, z limitami in odvodi. Če uvajamo implicitno odvajanje, lahko izpostavimo povezavo z reševanjem s krožnico. Uporabimo implicitno odvajanje na krožnici in rezultat, ki ga dobimo s pomočjo implicitnega odvoda, primerjamo z intuitivno geometrijsko rešitvijo tega scenarija. Ko primerjamo rešitve, ki so jih ustvarili dijaki, znanje o implicitnem odvodu dodatno preverimo.

Utemeljitev scenarija

- *Horizontalna matematizacija:* Problem je postavljen v bogat kontekst, ki je dijakom znan. Vsi vedo, kaj pomeni, ali je tobogan gladek ali ne. Dijake povabimo, da uporabijo matematični jezik in modelirajo situacijo: koordinatni sistem, predstaviti trirazsežno obliko tobogana z dvorazsežno krivuljo, predstavitev krivulje z enačbami.
- *Vertikalna matematizacija:* V nekaterih primerih dijaki razvijajo svoje zamisli z uvedbo parametrov in pri tem razpravljajo, kateri parameter uporabiti (kaj parametrizirati). Nekateri uporabijo druge matematične metode, kot so algebra (diskriminanta) ali diferenčni količniki (naklon premice). Od tu naprej imajo velik potencial za nadaljnjo matematizacijo. Če so dijaki uporabili pristop sekante, je naraven prehod k uvedbi naklona krivulje kot limite diferenčnega količnika. Če uporabijo algebraične metode in se osredotočijo na izračun presečišč, imamo možnost razpravljati o tem, zakaj želijo imeti (lokalno) eno presečišče in mogoče raziščemo večkratnost presečišč kot prvi korak k izračunu naklona krivulje. Če dijaki uporabijo približevanje slike kot metodo potrditve, imamo naravno povezavo do pristopa lokalne aproksimacije naklona krivulje.

Neformalni modeli/rešitve dijakov so lahko zelo raznoliki. Učitelj mora premostiti razlike med njimi (reševanje/potrditev), da bo lahko izvedel skupno institucionalizacijo. *Institucionalizacija* mora biti zgrajena na zamislih, ki so jih predlagali dijaki. Na primer, dijaki so raziskovali situacijo v GeoGebri:



Premikali so točko B. Učitelj jih usmeri, da ugotovijo, da to ustreza premikanju presečišča D. To lahko pripelje do razprave o diferenčnih količnikih in limitah (na neformalen način). Nato lahko na ta način definiramo odvod.