Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA SCENARIJI I MODULI

(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)

MERIA SCENARIJI I MODULI

GLAVNI UREDNIK
Kristijan Cafuta

TEKST NAPISALI
Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Britta Jessen, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

PRIJEVOD
Sanja Antoliš, Matija Bašić, Aneta Copić, Željka Milin Šipuš, Eva Špalj, Vesna Županović

DIZAJN I VIZUALNO OBLIKOVANJE
Irina Rinkovec

Projekt MERIA, kolovoz 2019.
www.meria-project.eu

(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)

Sadržaj

Uvod

Knjižica *MERIA scenariji i moduli* predstavlja jedan od glavnih rezultata projekta MERIA i sastoji se od pet nastavnih scenarija s pripadajućim modulima. "Model" ili uzorak za scenarije i module je opisan u knjižici *MERIA predložak za scenarije i module,* u kojoj je objavljen još jedan primjer scenarija i modula. Dizajn ovih nastavnih materijala je nastao na temelju teoretske osnove dane u *MERIA praktičnom vodiču za istraživački usmjerenu nastavu matematike*.

Scenarij opisuje jednu didaktičku situaciju, koju se može realizirati u jednom nastavnom satu, i epistemoloških pretpostavki i rasuđivanja u njegovoj pozadini. Također opisuje ciljeve didaktičke situacije u terminima nastavne cjeline i specifičnog ciljanog znanja i vještina, te pruža jasnu strukturu za izvođenje nastavnog sata na temelju Teorije didaktičkih situacija. *Modul* sadrži – uz scenarij – pisani i digitalni materijali poput zadataka i digitalnih radnih listića, razvoj ideje pri izboru problema i metoda poučavanja s daljnjom perspektivom danom Realističnim matematičkim obrazovanjem, te iskustva i rezultate prikupljene tijekom testiranja scenarija, uključujući potencijalne prednosti i mane scenarije za učenike sa specifičnim predznanjem.

Upotreba scenarija može biti izazovan zadatak za nastavnika. Osnovne ideje u pozadini ponekad nisu očite, te nije jednostavno postići ciljano znanje. Stoga, su u modulima namjere autora scenarija eksplicitno opisane i ponuđena je podrška nastavniku u obliku varijacija koje se mogu očekivati prilikom izvedbe. Potpuni moduli su objavljeni u ovoj knjižici. Sami scenariji su objavljeni odvojeno na stranici projekta u verziji koja je pogodnija za korištenje.

Svi scenariji imaju potencijal za korištenje IKT u istraživanju učenika, ali problemi se mogu riješiti i bez tehnologije. Ovakve varijacije su također opisane u scenariju ili u modulu. Svi dodatni materijali za učenje i poučavanje objavljeni su na službenoj internetskoj stranici projekta MERIA.

Treba naglasiti da je potrebno vrijeme kako bi se učenici navikli na istraživački usmjereno učenje, a nastavnici pronašli ravnotežu između pretjeranih intervencija (koji uništavaju priliku za istraživanje učenika) i prepuštanja učenika s premalo resursa za smisleno istraživanje. MERIA tim je čvrsto uvjeren da je za nastavnika optimalno isprobati scenarije tijekom ciklusa stručnog usavršavanja u obliku MERIA radionica uz čitanje MERIA praktičnog vodiča za IUNM.

Od srpnja 2017. godine do prosinca 2018. godine, MERIA tim je razvio oko deset različitih scenarija koji pokrivaju različite teme, a uklapaju se u kurikulume u sve četiri partnerske države: Danska, Hrvatska, Nizozemska, Slovenija. U svakoj državi tri do četiri škole su se pridružile projekte i u njima su testirani scenariji. Ovim putem zahvaljujemo našim partnerima u pridruženim škola na njihovoj iznimnoj posvećenosti. Pridružene škole su:

- Iz Hrvatske: Gospodarska škola Varaždin, Tehnička škola Požega, Elektrostrojarska škola Varaždin, XII. gimnazija Zagreb
- Iz Danske: ZBC, Next København, Roskilde Katedralskole

- Iz Nizozemske: Comenius College Hilversium, Hermann Wesseling College, Stedelijk Gymnasium Utrecht
- Iz Slovenije: Ekonomska šola Novo mesto, Gimnazija Jesenice, Gimnazija Franca Miklošiča Ljutomer

Proces testiranja scenarija vodio je do višestrukih revizija i polučio vrlo zanimljive informacije na temelju kojih su scenariji unaprijeđeni. Bilo je potrebno izdvojiti pet modula za ovu knjižicu, kao najrelevantnije (za sve države!) i najuspješnije proizvode projekta. Nastavnici iz pridruženih škola su prvo stekli uvid u teoretske okvire kroz interaktivne radionice koje su izvodili članovi projektnog tima. Na taj način nastavnici su se pripremili za rad prema scenarijima. Izvođenje svakog scenarija u razredu promatrao je član projektnog tima ili drugi nastavnik iz iste škole. Nakon izvedbe nastavnici su se osvrnuli na provedeni sat odgovarajući na upitnik, te usmenim izvještavanjem članovima projektnog tima na sljedećem sastanku. Učenički radovi su dokumentirani, te su učenici također ispunili kratki upitnik kroz koji su izvijestili u kojoj mjeri im je nastavni sat bio izazovan i zanimljiv, te bi li se voljeli ponovno uključiti u slične aktivnosti. Više informacija o upitnicima, rezultatima i metodologiji je dostupno u knjižici *MERIA project impact analysis*.

Izbor pet scenarija, za koje su potpuni moduli objavljeni u ovoj knjižici, je određen prema kriterijima donesenim na projektnom sastanku u Kopenhagenu u kolovozu 2018. godine. To su istraživački i adidaktički potencijal scenarija, izvedivost scenarija iz perspektive učenika i nastavnika, primjernost teme u okvirima značaja i primjene, učeničke reakcije, te raznovrsnost tema koje su zastupljene u srednjoškolskim kurikulumima u partnerskim državama.

Prema tome, izbor MERIA scenarija pokriva sljedeće teme: modeliranje jednostavnog poslovnog problema koristeći po dijelovima linearne funkcije, modeliranje ovisnosti puta kočenja o početnoj brzini koristeći kvadratnu funkciju, rješavanje elementarnog geometrijskog problema koristeći simetrale dužina, rasuđivanje o razdiobama plaćama u tri tvrtke koristeći aritmetičku sredinu, mod i medijan, te modeliranje zakrivljenog objekta (tobogana ili skijaške skakaonice) kao glatke krivulje. Naša namjera nije bila pokriti što više tema (zajedničkog) srednjoškolskog kurikuluma, već proizvesti istaknute primjere koji podržavaju nastavnike u ostvarivanju istraživački usmjerene nastave u svojoj učionici. Smatramo da su scenariji primjereni za razvoj matematičkog modeliranja, progresivne formalizacije, postavljanje hipoteza i dokazivanje, znanstveni pristup, poticanje razumijevanja prije pamćenja, kritičko razmišljanje, samostalno istraživanje i primjenu matematike u problemima iz stvarnog svijeta.

Ovaj uvod završavamo predstavljanjem svakog od pet scenarija pregledom glavnog problema koji se postavlja učenicima i ciljanog znanja scenarija.

U prvom scenariju od učenika se traži da analiziraju podatke o proizvodnji bicikala i izgradnji tvornice na četiri različite lokacije, kako bi savjetovali tvrtke o optimalnoj lokaciji, na temelju predviđene proizvodnje. Proizvodnja na svakoj lokaciji se može modelirati linearnom funkcijom i učenici mogu razviti različite strategije za uspoređivanje lokacija. Učenici koriste grafove i vrlo često tehnologiju, razmišljaju kritički i sažeto predstavljaju svoj zaključke kako bi savjetovali tvrtke.

U drugom scenariju od učenika se traži da prouče ovisnost puta kočenja automobila o brzini na početku kočenja. Ovisnost je kvadratna, što je nova vrsta funkcija za učenika (očekuje se da predznanje učenika uključuje poznavanje linearnih funkcija). Stoga, scenarij može poslužiti kao uvod u kvadratne funkcije, povećati numeričke vještine i rasuđivanje, ali i izvođenje zaključaka i osvrtanje na svakodnevne situacije s osjećajem odgovornosti.

U trećem scenariju učenici dobivaju kartu pustinje sa šest bunara i od njih se traži da kartu podijele u područja ovisno o udaljenosti točaka od bunara. Za uspješno rješavanje problem (konstrukciju takozvanih Voronojevih dijagrama) potrebno je koristiti simetrale dužina. Učenici mogu koristiti posebno dizajnirane aplikacije za istraživanje problema, te konstruirati slične situacije koje će ih voditi u daljnje istraživanje o koncikličnim skupovima točaka.

Četvrti scenarij stavlja naglasak na jednostavno statističko rasuđivanje o skupu podataka. Podaci predstavljaju plaće zaposlenika u nekoliko različitih tvrtki, a zadatak učenika je analizirati podatke i doći do zaključka gdje bi se radije zaposlili. Očekuje se da učenici koriste mjere srednje vrijednosti, kao što su prosjek i medijan, iako, njihova analiza može lako dovesti do drugačijih pogleda na zadatak, na primjer koristeći grafičke prikaze za percentile itd.

U petom scenariju se radi o konstrukciji tobogana koji se sastoji od ravnog i zakrivljenog dijela, glatko spojenih – pri čemu „glatko" ima preciznu matematičku definiciju. Učenicima se samo kaže da trebaju konstruirati tobogan tako da spuštanje bude ugodno. Dakle, zadatak je analizirati na koje načine se dva dijela mogu spojiti i otkriti da ravni dio treba biti tangencijalan na zakrivljeni dio u točki spajanja. Učenici mogu koristiti različite krivulje za zakrivljeni dio i onda pomoću različitih strategija konstruirati tangentu. U slučaju krivulja drugog reda problem se može riješiti elementarno, ali za ostale krivulje problem vodi učenike na ideju derivacije funkcije.

MERIA Modul “Tvornica bicikala”

Linearna i po dijelovima linearna funkcija

Scenarij poučavanja

<table>
<tr><td>Ciljano znanje</td><td>Konstrukcija po dijelovima linearne funkcije koja je optimalno rješenje problema zadanog pomoću linearnih uvjeta.</td></tr>
<tr><td>Širi ciljevi</td><td>Crtanje grafova (linearnih funkcija) na papiru i koristeći IKT. Diskutirati skaliranje grafova duž jedne koordinatne osi. Produbiti razumijevanje linearne funkcije (koeficijent smjera a i odrezak na osi ordinata b) koristeći je za konstrukciju po dijelovima linearne funkcije. Proučiti kontinuirane i diskretne aspekte algebarske i grafičke prezentacije podataka tijekom procesa modeliranja.
Istraživačke vještine: eksperimentiranje s brojevima prije crtanja grafova, zanemarivanje nevažnih podataka i očitih suboptimalnih tvornica, interpretiranje rezultata dobivenih procesom modeliranja, preuzimanje odgovornosti za pisanje izvještaja i prezentaciju rezultata u obliku savjeta.
Interdisciplinarne vještine: učenici mogu diskutirati o raznim ekonomskim aspektima problema kao što je razlika između prihoda i dobiti. Vještine komuniciranja u stručnoj okolini su naglašene u pisanju izvještaja.</td></tr>
<tr><td>Potrebno matematičko predznanje</td><td>Učenici znaju nacrtati graf linearne funkcije, poznat im je izraz $f(x) = ax + b$ te interpretacija koeficijenata a i b.</td></tr>
<tr><td>Razred</td><td>Dob 15-16 godina, 1. i 2. razred (može i ranije, ali s manjim brojevima)</td></tr>
<tr><td>Vrijeme</td><td>50 min (80 min)</td></tr>
<tr><td>Potrebni materijal</td><td>Tablica s podacima o troškovima
<table>
<tr><th>Lokacija</th><th>Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €</th><th>Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €</th></tr>
<tr><td>A</td><td>300 000</td><td>120</td></tr>
<tr><td>B</td><td>450 000</td><td>110</td></tr>
<tr><td>C</td><td>660 000</td><td>60</td></tr>
<tr><td>D</td><td>680 000</td><td>80</td></tr>
</table>
Papir na kvadratiće ili milimetarski papir i/ili neka aplikacija (za promjenu linearnih uvjeta) i/ili neko računalo sa softwareom za crtanje, promjenu i dodavanje linearnih uvjeta, te za računanje presjeka pravaca. Školska ploča ili pametna ploča.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problem: Ti si konzultant koji savjetuje tvrtku gdje je najbolje izgraditi tvornicu koja proizvodi bicikle (ili neke druge proizvode). Tvoja se ekspertiza temelji na tablici u kojoj su prikazani troškovi na pojedinim lokacijama. Koja je tvoja preporuka o lokaciji? Obrazloži svoju preporuku gdje treba izgraditi tvornicu[1].

</td></tr>
</table>

[1] Problem je inspiriran Primjerom 2.10. iz knjige *Primijenjena matematika podržana računalom*, kojeg je dizajnirao autor ovog scenarija u okviru projekta "STEM genijalci".

Faze	**Postupci nastavnika, uključujući i upute**	**Postupci i reakcije učenika**
Primopredaja (didaktički) 5 min	Nastavnik objašnjava situaciju i tablicu, te postavlja problem: „Kako bi savjetovao tvrtku gdje je najbolje izgraditi tvornicu? Trebaš raditi zajedno sa svojim susjedom i kasnije pripremiti prezentaciju svog rješenja pred pločom."	Učenici slušaju, shvaćaju važnost problema, te žele biti uključeni u rad na problemu. Mogu imati pitanja o tablici i problemu. Nastavnik treba učenicima eksplicitno dati priliku da postave takva pitanja, te osigurati da su svi razumjeli zadatak.
Djelovanje (adidaktički) 15 (20) min	Nastavnik zapaža i zapisuje različite načine rješavanja problema, te uočava kakvo je predznanje učenika. Važno je da nastavnik ne daje učenicima smjernice za rješavanje problema, te da grupe rade samostalno. Jedino može ponoviti zadatak, ako je to potrebno.	Grupe počinju raditi pokušavajući s različitim strategijama ovisno o njihovom predznanju. Vidi dolje "Mogući načini za učenike…" Budući da učenici rade u grupama, adidaktička formulacija će se pojaviti.
Formulacija (didaktički) 10 (15) min	Nastavnik bira grupe (minimalno 5) koje će prezentirati različite strategije na ploči. Prije prezentacije ploču treba podijeliti na onoliko dijelova koliko grupa ima. Predstavnici grupa trebaju napisati svoje odgovore istovremeno, prije usmenog objašnjenja korištene strategije. Rješenja ostaju na ploči dok grupe usmeno prezentiraju svoja rješenja, počevši od jednostavnijih pristupa prema složenijim. U ovom trenutku se ne traži potvrđivanje.	Grupe prezentiraju rješenja po redu koji odredi nastavnik (najprije jednostavna rješenja pomoću brojeva, nakon toga rješenja pomoću grafova i funkcija)
Primopredaja (didaktički) 1 min	Komentiraj sa svojom grupom sličnosti i razlike koje vidiš u prezentiranim strategijama. Kreni od sličnosti. Iskoristi to kako bi poboljšao savjet za upravu tvornice. Prezentirat ćeš to nakon 5 (10) minuta.	Učenici slušaju. Ponovno provjerite da svi razumiju zadatak.

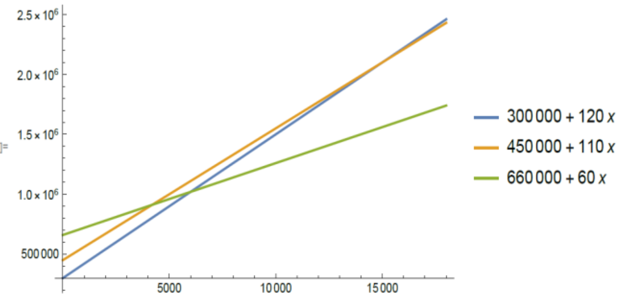
Djelovanje i formulacija (adidaktički) 5 (15) min	Nastavnik obilazi razred da vidi što su grupe primijetile, o čemu raspravljaju i kako koriste ideje drugih grupa.	Grupe uočavaju sličnosti i razlike , pokušavaju razumjeti druge strategije i pomoću njih poboljšati svoje rješenje.
Potvrđivanje (didaktički) 10 (15) min	Nastavnik poziva različite grupe, da čuje što više različitih zapažanja i poboljšanih rješenja. Nastavnik nastoji da učenici identificiraju pogreške u prethodnim rješenjima.	Različiti učenici formuliraju sličnosti i razlike strategija, te objašnjavaju kako su popravili svoja rješenja koristeći rješenja ostalih. Učenici također mogu ukazati na nedostatke nekih rješenja.
Institucionalizacija (didaktički) 5 (10) min	Nastavnik ističe da ne postoji jedno točno rješenje, već da ono ovisi o broju proizvedenih bicikala. Nastavnik prvo utemeljuje svoja objašnjenja na učeničkim rješenjima koja su napisana na ploči, a nakon toga uvodi oznake za funkcije definirane po dijelovima, koristeći primjer: $f(x)=\begin{cases}120x+3\cdot 10^5, x\leq a\\ 60x+6{,}6\cdot 10^5, x\geq a\end{cases}$ gdje je a=6000. Nakon toga zaključuje da tvrtku možemo savjetova da lokacije B i D nisu nikad optimalne, dok su A i C optimalne ovisno o tome je li količina proizvodnje redom manja ili veća od 6000 bicikala. Funkcija optimalnih troškova je po dijelovima linearna funkcija (definirana na pozitivnim cijelim brojevima).	Učenici zapažaju različite strategije rješenja, prepoznaju svoju strategiju te je uspoređuju s drugim strategijama. Učenici pišu svoje bilješke.

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	• Neki učenici rade s brojevima kako bi vidjeli što oni znače: ○ Neki učenici računaju cijenu određenog broja bicikala u pojedinom području. Oni mogu koristiti pokušaje i pogreške kako bi pronašli brojeve za koje dva područja daju istu cijenu. ○ Učenici mogu kreirati tablice za svaku lokaciju tako da računaju ukupne troškove za neki broj bicikala, uspoređuju ih i traže najjeftinije rješenje za taj broj bicikala (to se može učiniti olovkom i papirom ili proračunskom tablicom). ○ Promatrajući dvije lokacije, gledaju kako bi se pokrila razlika između fiksnih troškova razlikom između

	varijabilnih troškova (na primjer, koliko bicikala mora biti proizvedeno prije nego je B bolji od A); potrebno je ukupno šest takvih usporedbi kako bi se dao potpuni odgovor. • Neki učenici imaju pristup pomoću funkcija, te zapisuju četiri jednadžbe, pri čemu svaka funkcija predstavlja troškove proizvodnje x bicikala: $f(x) = 120x + 300\,000,$ $g(x) = 110x + 450\,000,$ $h(x) = 60x + 660\,000,$ $k(x) = 80x + 680\,000.$ ○ Grafovi funkcija su nacrtani u jednom ili više koordinatnih sustava, a iz grafičkog prikaza učenici zaključuju gdje bi trebalo izgraditi tvornicu. ○ Učenici koji koriste mrežni papir mogu pročitati sjecišta. ○ Učenici koji koriste IKT mogu odmah iscrtati sve linearne funkcije, ali bi mogli imati problema sa skaliranjem koordinatnih osi. ○ U svakom slučaju, tumačenje funkcija i optimiranje troškova ne dolazi automatski iz navedenih pristupa, već zahtijeva razmišljanje o problemu. Doći će do pogrešaka, kao što su miješanje troškovi proizvodnje s prodajnom cijenom ili profitom itd. ○ Na temelju jednadžbi, presjeci između funkcija nalaze se izjednačavanjem parova jednadžbi. Učenici će iskoristiti grafički prikaz kako bi znali koji su parovi jednadžbi relevantni. Ova strategija također zahtijeva tehnike rješavanja jednadžbi. • Učenici mogu donijeti različite zaključke. ○ Neovisno o tome rade li učenici s brojevima (i tablicama) ili funkcijama (i grafovima) neki će shvatiti da ne postoji jedno "najbolje područje", već da savjet treba dati ovisi o tome koliko se bicikala proizvodi. Zaključak može biti više ili manje precizan, formuliran riječima, jednadžbama, grafovima itd. ○ Neki će učenici dati brz i pogrešan odgovor, npr. "A je najbolja lokacija jer kad izračunamo trošak za izradu 1, 2, ..., 10 bicikala, uvijek dobivamo najniže cijene tamo." • **Primjer grafova i jednadžbi koje učenik može dobiti** (na papiru ili koristeći neku tehnologiju) za određivanje različitih područja ovisnih o broju proizvedenih bicikala.

```
In[70]:= Plot[{300000 + 120 x, 450000 + 110 x, 660000 + 60 x},
          {x, 0, 18000}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[70]=




```
In[66]:= Solve[300000 + 120 x == y && 450000 + 110 x == y, {x, y}]
Out[66]= {{x → 15000, y → 2100000}}

In[67]:= Solve[300000. + 120 x == y && 660000 + 60 x == y, {x, y}]
Out[67]= {{x → 6000., y → 1.02 × 10^6}}
```

Objašnjenje materijala

Priča o savjetovanju tvrtke na temelju tablice s troškovima, namijenjena je uključivanju učenika u fazi primopredaje. Tablica se može dati na papiru, na običnoj ili pametnoj ploči, ili u PowerPoint prezentaciji, koja će se preuzeti na računalo, pametni telefon ili tablet. Učenici u nekim zemljama poznaju ideju modeliranja, dok je u drugim zemljama to još uvijek novost. Ako je potrebno, uzmite više vremena za razjašnjenje podataka iz tablice. Učenici mogu koristiti mobilne telefone, grafičke kalkulatore, GeoGebru, Wolfram Alpha, mrežni papir, ravnalo i/ili ICT općenito, za crtanje, mijenjanje i dodavanje uvjeta, te za pronalaženje sjecišta itd. Obična ili pametna ploča ili plakati, potrebni su za prikaz svih učeničkih prezentacija u isto vrijeme (trebaju ostati vidljivi do kraja sata), kao i dodatni prostor za fazu institucionalizacije.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

Fokus u didaktičkim fazama trebao bi biti na učeničkim formulacijama (prvo), a zatim na njihovom potvrđivanju. Učenike ne bi trebalo usmjeravati k rješenju u adidaktičkim fazama. U ovom dijelu raspravljamo o tome što bi se moglo promijeniti gore (didaktičke varijable).

Nastavnik bi trebao objasniti učenicima da je ovaj financijski model pojednostavljen i da zanemarujemo mnoge čimbenike. Modeli obično jesu pojednostavnjeni. U našem izračunu uzimamo:

a) troškove izgradnje tvornice u tom području (fiksni troškovi),
b) troškove proizvodnje jednog bicikla u tvornici (varijabilni troškovi).

Prema standardnim definicijama postoje i drugi mogući fiksni troškovi, čak i u situaciji bez ikakve proizvodnje. Fiksni troškovi mogu uključiti troškove grijanja i plaće zaposlenika sa stalnim radnim mjestima i slično. Mi sve te troškove zanemarujemo u našem modelu. Troškovi b) uključeni su u varijabilne troškove ovisno o količini proizvodnje, uključujući sirovine, troškove dijelova strojeva koje treba zamijeniti, električne energije za rad strojeva, plaće zaposlenika koji nisu stalno zaposleni itd. Problem se može generalizirati dodavanjem nekih drugih troškova , ali ovaj problem sada ima samo dvije vrste troškova.

Izvješće konzultanta trebalo bi se temeljiti samo na troškovima a) i b). Može se jasno reći da izvješće treba biti utemeljeno samo na danim informacijama, dok vlastite pretpostavke ili procjene učenika mogu pružiti bogatiji skup rješenja. Sprječavanje "pogrešnih odgovora" nije primarna briga, jer učenici mogu iz njih učiti.

Treba naglasiti da će direktor tvrtke odlučiti o lokaciji na temelju analize konzultanta. Nije nužno da konzultant (učenik) zna planira li tvrtka proizvesti veliku količinu bicikala ili ne, ali učenici ponekad spontano donose takve pretpostavke.

Po odluci direktora, tvornica će biti izgrađena samo na jednom mjestu, i tamo će ostati. Nema preseljenja tvornice.

Okolina (milieu): troškovi (iznos i vrsta) mogu se izabrati drugačije, ali za početnike je prednost da nemaju puno sjecišta između grafova minimalnih troškova. Ovdje postoji samo jedno takvo sjecište za x = 6000. Ako postoji nekoliko sjecišta, koja su vrlo blizu jedan drugome, problem postaje više umjetan. Na primjer, nije dobro ako imate dva presjeka x_1=5000 i x_2=5050. U tom slučaju zaključak bi bio da ste odabrali lokaciju zbog 50 bicikala, što nije baš realno. Bolje je izbjeći takve situacije.
Za osnovnu školu mogu se uzeti manji brojevi, odnosno manji troškovi, pa i proizvode onda treba prilagoditi tim nižim troškovima.

Dakle, proizvodi i drugi elementi problema mogli bi se mijenjati. Tvornice koje proizvode više od jednog proizvoda, opisuju se s više varijabli, pa optimiranje njihovih troškova dovodi do problema linearnog programiranja.

Tijekom faze potvrđivanja, važno je da sve pogrešne strategije ili formule budu ispravljene, pri tome bilo bi dobro da to učine drugi učenici. Nastavnik može uključiti ostatak razreda s pitanjima određenim učenicima kao što su: Možete li ponoviti ono što je upravo rečeno? Je li točno? Zašto to misliš? Odakle to znate? Pitanja koja se postavljaju ovise o preduvjetima i postignućima razreda.

Duljinu faza svakako treba prilagoditi učenicima i njihovom tempu rada.

Tijekom prve faze djelovanja, učenicima se ne smije govoriti što treba izračunati ili što iz matematike treba koristiti, na primjer ne smije se reći da koriste linearnu funkciju.
Ako je nastavnik u nedoumici ima li učenik potrebno predznanje, nastavnik treba postaviti pitanja kao što su: Kako možemo usporediti troškove? Možemo li zanemariti neku lokaciju? Zašto?
Predložena pitanja trebala bi se postavljati samo skupinama ili pojedincima, ako se procijeni da većina drugih učenika posjeduje potrebna predznanja. Nastavnik ne bi smeo objašnjavati svakoj skupini odvojeno. Nadalje, nije potrebno ostati u grupi dok ne dođu do odgovora na takvo pitanje. Smatrajte to malom primopredajom ograničenog problema i dopustite učenicima da djeluju, formuliraju i potvrde. Ne podržavajte ih daljnjim potpitanjima niti im sugerirajte odgovor. Ako većina razreda treba razmotriti ta pitanja, fazu treba skratiti i dati takva mala pitanja svima. Takva potreba je obično znak da je početni problem bio pretežak ili nije bio jasno postavljen, što treba nastojati izbjeći.

Intervencije tijekom druge faze djelovanja, formulacije i validacije:
Glavne ideje slične su gore navedenim. Ako je nekim grupama teško započeti, nastavnik može predložiti da svoju potencijalnu strategiju usporede sa strategijom druge grupe. Ova usporedba strategija trebala bi biti dobro odabrana matematički. Ideja je da se na grupu prenese problem, koji je nešto manje otvoren. Ako identifikacija sličnosti i razlika strategija bude nejasna za učenike, može se odabrati i prenošenje nešto specifičnijeg zadatka, kao što je: "identificirajte jedno od rješenja druge grupe koje možete upotrijebiti za poboljšanje vlastitog rješenja; zatim, identificirajte pogrešku ili nedostatak u jednom od rješenja i objasnite zašto tako mislite. "

Tijekom *konačne institucionalizacije*: važno je da se većina (ako ne i sve) strategije koje su se pojavile u razredu rješavaju i povezuju jedne s drugima. Razmatranje svih mogućih strategija pomaže nastavniku u kretanju i predviđanju procesa ispitivanja učenika. Dok podučavate, sjetite se da ste u interakciji s dinamičnim sustavom - učenicima treba dopustiti da se prilagode okolini (milieu), tako da ne možete očekivati da svi daju isti odgovor!

Proces istraživanja u nastavi treba imati sve faze. Nadalje, često nije dovoljno održati samo jednu lekciju na ovakav istraživački način, već učenicima treba više lekcija da se naviknu na ovakav način rada. Ujedno je važno naglasiti da možemo učiti i iz alternativnih ili čak pogrešnih rješenja.

Neki nastavnici kreiraju shemu mogućih učeničkih strategija, koje se mogu pojaviti tijekom adidaktičkih faza. Očekivane strategije mogu biti skicirane na papiru, te za svaku strategiju nastavnik formulira npr. tri pitanja koja može postaviti tijekom učeničke prezentacije. Tijekom adidaktičkih faza, nastavnik može uočiti koje grupe raspravljaju o različitim strategijama, te ih koristiti za uvođenje dodatne didaktičke formulacije i potvrđivanja.

Zapažanja iz prakse

Važno zapažanje iz scenarija je da su nastavnici pokušavali ne podučavati učenike tijekom svih faza scenarija. Ovo je lijepo poboljšanje kako bi se zadržao adidaktički potencijal situacije. Učenici su postavljali pitanja kako bi razjasnili problem. Neki su razmišljali o profitu, a ne o troškovima. Neki učenici na početku su bili zbunjeni (prva primopredaja) i postavljali pitanja o kvaliteti bicikala, prodajnoj cijeni, porezima, broju proizvedenih bicikala ... Neki su vrlo brzo shvatili: troškovi s najmanjim nagibom, najjeftiniji su.

Tijekom faze djelovanja učenici su formulirali sljedeće pristupe:
I. modeliranje pomoću linearne funkcije i crtanje grafova
- I.1. crtanje rukom i računanje sjecišta kao rješenja sastava linearnih jednadžbi;
- I.2. korištenje tehnologije za crtanje grafova i nalaženje (nije uvijek točno dobiveno)

II. Usporedba lokacija po parovima i analiza rezultata
- II.1. korištenje linearnih jednadžbi;
- II.2. direktno iz tablice, usporedba fiksnih troškova;

- II.3. različita zaključivanja temeljena na računanju i usporedbi lokacija, ponekad uz izmišljene pretpostavke i pogreške.

Usporedba:

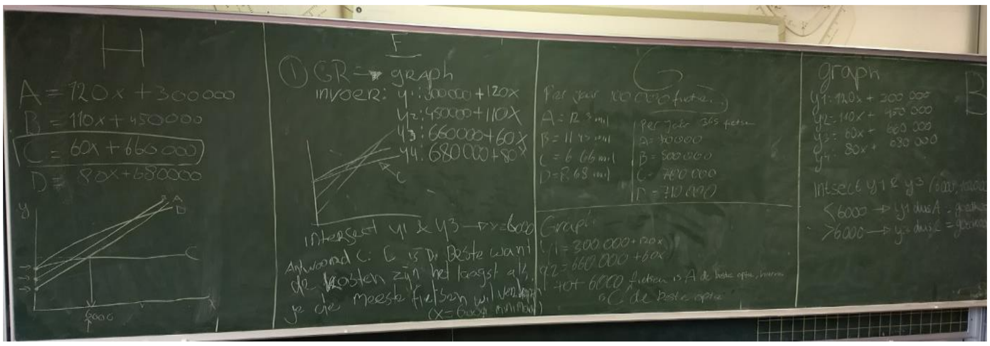
- Pristupi I.1. I I.2. su slični, osim u korištenju tehnologije. Učenici smatraju da je I.2. preciznije i stoga najbolje rješenje, a nastavnik smatra da je I.1. jako dobar pristup. Vrijednost tog pristupa je da vidimo znaju li učenici nacrtati grafove.
- Pristup II. zahtijeva logičnije razmišljanje da bi se došlo do zaključka. Razgovarali smo o varijantama u kojima učenici samo uspoređuju A i C na temelju svoje intuicije i nužnosti usporedbe s područjem B.

Istaknuli smo taj pristup II.2. pokazuje da se problem može riješiti bez poznavanja linearnih funkcija i njihovih grafova, pa se problem može upotrijebiti za uvođenje linearnih funkcija.

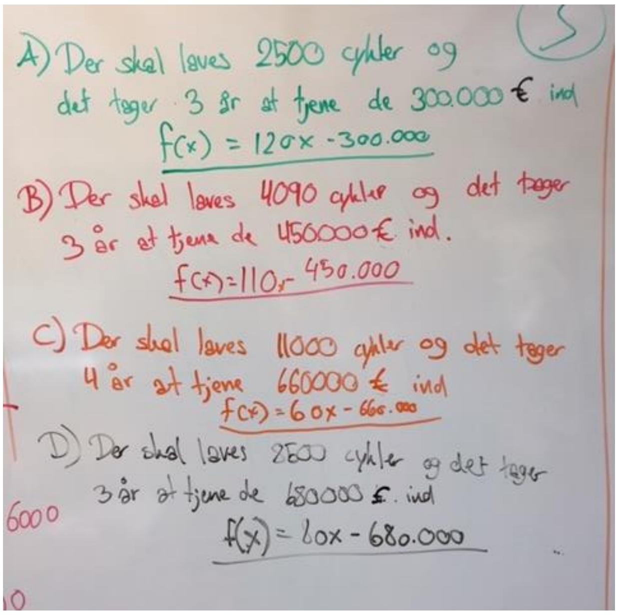
Neke su grupe izračunavale i uspoređivale cijene za određeni broj bicikala u svakom području A, B, C i D. U tom slučaju, imale su poteškoće s formulacijom jer nisu mogle pronaći točan broj bicikala kada je jedna od opcija bila bolja. nego drugi; ponekad su samo napravili pretpostavke o tome. Uzeli su aproksimacije ili su samo rekli da je za manji broj bicikala bolji A, a za veći broj - opcija C. Neke grupe su nakon druge primopredaje, u fazi djelovanja, shvatile da bi taj broj mogli pronaći rješavanjem sustava jednadžbi.
Naprednije grupe rješavale su jednadžbe, a zatim uspoređivale vrijednosti funkcija na intervalima koje su dobile. Neke grupe koristile su grafički pristup i pronašle točke presjeka iz grafikona pomoću GeoGebre ili drugog softvera. U tom slučaju, kalibracija (skaliranje) osi postaje važna zbog velikih brojeva.

Učenicima je bilo potrebno više vremena za prvu primopredaju i akciju, ali manje za drugu, pa smo prema toj primjedbi promijenili vrijeme. Neki nastavnici su utvrdili da trebaju dati neke naznake ili dodatna pitanja u prvoj fazi djelovanja i formulacije. Učenici nisu znali kako usporediti opcije bez pomoći.

Prema upitniku MERIA-e, nakon jednog sata održanog na ovaj način 73,3% hrvatskih učenika slaže se s tvrdnjom da je matematika povezana sa stvarnim životom, 87% da je lekcija bila zanimljiva ili mnogo zanimljivija od uobičajenog predavanja, a 91,9% učenika bi voljelo imati takve satove svaki mjesec.

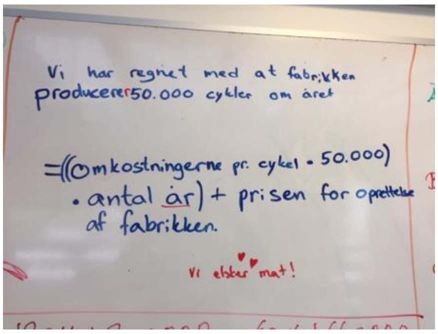


Rješenja grupa učenika (Nizozemska)



Primjer pisane prezentacije iz Danske. Učenici su četiri područja razmatrali odvojeno. Pogrešno su shvatili "cijenu proizvodnje po biciklu" kao "dobit po biciklu". Tada je za svako područje f(x) dobit ostvarena pri proizvodnji x bicikala. Oni su izračunali, za svako područje, koliko bicikala treba napraviti za pokrivanje troškova izgradnje tvornice, pronalaskom nultočke od f.

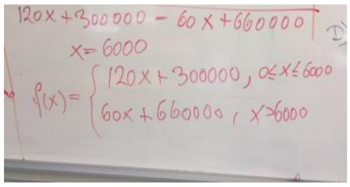
Doslovno, za svako područje, pišu: "Treba napraviti ... bicikla, a potrebno je ... godina da se vrati uloženih... €" i onda ide spomenuta funkcija. Broj godina dolazi iz pomalo proizvoljnih pretpostavki kao što su "proizvode najmanje 2,5 bicikla dnevno" (usmeno objašnjenje za slučaj A, nijedno nije dano za druga područja). Nije jasno kako su došli do broja godina u svakom slučaju, osim što su učenici objasnili, za slučaj A, da se dnevno može napraviti 2,5 bicikla.



Rješenje druge grupe iz istog danskog razreda: pretpostavljaju da tvornica godišnje proizvede 50000 bicikala. Formula glasi:

((troškovi po biciklu · 50000) · broj godina) + cijena za izgradnju tvornice

(i na kraju, "volimo matematiku"). Tijekom formulacije nisu donosili daljnje zaključke, te je samo ostalo na ovoj formuli.



Institucionalizacija je vezana uz rješavanje jednadžbi povezanih s problemom, uz po dijelovima linearne funkcije i uz uvođenje oznaka za takve funkcije. U ovom razredu, samo je polovica grupa pronašla "dobre" funkcije koje se ovdje koriste.

Alati za procjenu

Na kraju lekcije ili ubrzo nakon toga, sljedeći zadaci mogu se koristiti za brzo testiranje znanja stečenog tijekom scenarija:

1. Vaš prijatelj kaže: "Graf s najmanjim nagibom i najmanjim odreskom na ordinati odgovara najjeftinijem području." Što mislite?
   Odgovor: Istina, ali nemamo uvijek slučaj u kojem postoji graf kojemu su te obje vrijednosti najmanje od svih grafova. U scenariju je baš takva situacija.

2. Vaš prijatelj kaže: "Onaj s najvećim nagibom i najvećim odreskom na ordinati odgovara najskupljem području " Što mislite?
   Odgovor: Istina, ali opet, ovdje nemamo takvo područje.

3. Imate vrlo jednostavnu situaciju s podacima iz tablice. Potpisali ste ugovor za proizvodnju 5000 bicikala. Koju lokaciju odabirete?

Lokacija	Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €	Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €
G	0	200
H	300 000	100

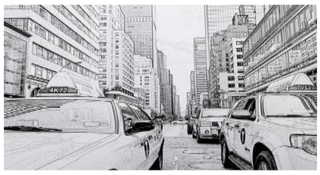
   Odgovor: H je jeftiniji za proizvodnju veću od 3000 bicikala.

4. Moguće domaće zadaće: direktoru tvrtke napišite dokument sa savjetom i obrazloženjem gdje da smjesti tvornicu.

Preporuke za daljnje probleme vezane uz linearno modeliranje

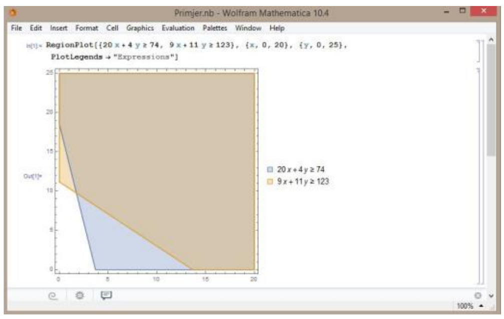
Uključite i druge kontekste (npr. taksi, brzinu ...) za primjenu ciljnog znanja u drugim situacijama (za daljnju institucionalizaciju ciljanih metoda i ideja).

1. Taxi AA ima startnu cijenu 15 kn, a svaki kilometar stoji 5 kn. Taxi BB ima startnu cijenu 20 kn, a svaki kilometar stoji 4 kn. Planirate se voziti taxijem 8 kilometara.
   Koju tvrtku biste izabrali?



2. Cijena plina je 0,5 kn po m^3 za prvih 10 m^3, zatim se cijena smanjuje za veću potrošnju plina. Sljedećih 20 m^3 trošak je 0,4 kn po m^3, a cijena pada na 0,3 kn po m^3. Pronađite funkciju troška.

3. Sportaš bi trebao uzeti najmanje 74 mg vitamina B i najmanje 123 mg vitamina C svaki dan. Multivitamin MM sadrži 20 mg vitamina B i 9 mg vitamina C u 1 g. Multivitamin NN sadrži 4 mg vitamina B i 11 mg vitamina C u 1 g. Koje su minimalne doze multivitamina MM i NN za sportaša kako bi ostvario svoje dnevne potrebe? Nije opasno ako uzima veću dozu nego što je potrebno.

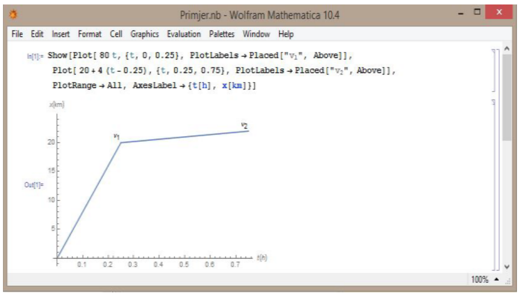


4. Ivana želi unajmiti salu za 17 prijatelja, za proslavu svog rođendana.
   Cijena sale RR je 100 € za salu i još 10 € dodatno za svakog gosta. Cijena sale PP iznosi 80 € za salu i još 12 € za svakog gosta. Koju salu bi Ivana trebala izabrati?

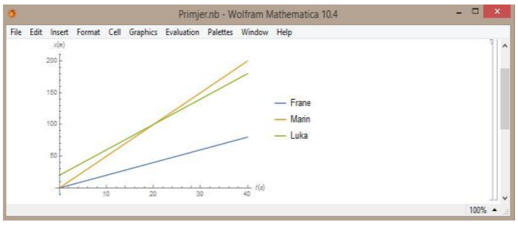
5. Cijena jednog para tenisica je 70 €. Tvrtka koja proizvodi tenisice investirala je 10000 € za početak proizvodnje. Proizvodnja jednog para košta 15 €. Izračunajte dobit tvrtke ako su proizveli 1000 pari tenisica.

6. Banka nudi različite kamatne stope, ovisno o uloženoj svoti novca. Ako imate manje od 5000 € dobivate 2% kamatne stope godišnje, između 5000 € i 20000 € dobivate 2,2%, a iznad 20000 € dobivate 2,5%. Izrazite ukupnu sumu novca nakon jedne godine, kao funkciju uloženog novca.

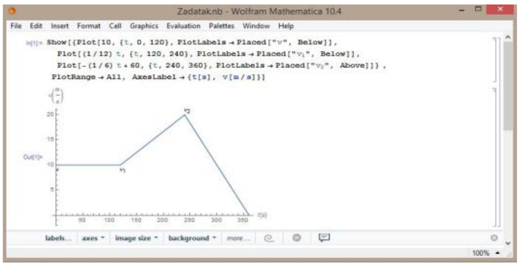
7. Ana vozi automobil prema Zagrebu konstantnom brzinom 80 km/h. Nakon 20 km nestalo joj je goriva, pa je otišla do najbliže benzinske postaje koja je udaljena 2 km. Ani je trebalo 30 minuta da stigne do stanice. Pronađite graf puta u ovisnosti o vremenu. Pronađite Aninu prosječnu brzinu. (Prikazani graf je dio rješenja)



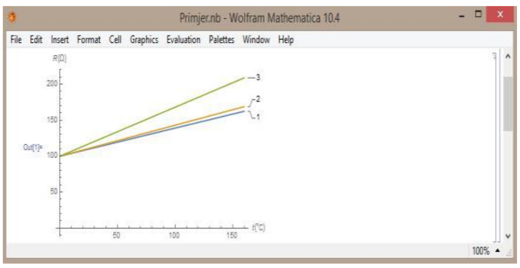
8. Marin i Frane idu na izlet biciklom. Luka ih nije htio čekati pa je krenuo ranije. Nacrtan je graf puta u ovisnosti o vremenu. Tko je najbrži biciklist? Tko je najsporiji? U kojem trenutku se Marin susreće s Lukom? (Graf treba dati učenicima)



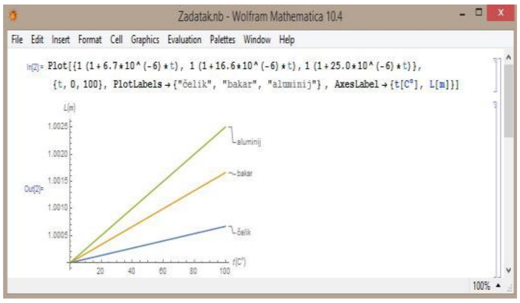
9. Peter vozi motocikl. Prve 2 minute imao je stalnu brzinu od 10 m/s, a zatim je nakon 2 minute postigao brzinu od 20 m/s uz konstantno ubrzanje. Nakon toga je počeo kočiti i zaustavio se nakon 2 minute. Nacrtajte graf brzine u ovisnosti o vremenu. (Prikazani graf je rješenje)



10. Promjena otpora žice u ovisnosti o temperaturi: $R(t)=R_0(1+\alpha t)$ gdje je R_0 otpor na 0 ºC, α temperaturni koeficijent otpora, a t je temperatura u ºC. Koristeći zadani graf odredite temperaturni koeficijent otpora za 3 materijala, ako su njihovi otpori na 100 ºC:
139 Ω (materijal 1), 143 Ω (materijal 2) i 168 Ω (materijal 3).
Pronađite tablicu s temperaturnim koeficijentima otpora na internetu i odredite koji su materijali 1, 2 i 3!



11. Šipke su izrađene od različitih metala, ali sve imaju duljinu od 1 m na 0 ºC. Duljina se mijenja u ovisnosti o temperaturi: $L(t) = L_0(1 + \alpha t)$ gdje je L_0 duljina na 0 ºC, α koeficijent linearnog toplinskog širenja, a t je temperatura u ºC. Koeficijenti linearnog toplinskog širenja su:
čelik $6.7 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
bakar $16.6 \cdot 10^{-6}$ / ºC,
aluminij $25.0 \cdot 10^{-6}$ / ºC.
Nađite funkciju duljine u ovisnosti o temperature, za čelik, bakar i aluminij. Nacrtajte graf funkcije. (Prikazani graf je rješenje)



Načela i RME perspektiva u scenariju

Uloga konteksta u pružanju mogućnosti učenicima da razviju matematičke ideje, osnovno je načelo u RME-u. U ovom scenariju, kontekst tvornice bicikala, trebao bi potaknuti učenike u kreiranju formula i grafova, te u izvođenju zaključaka iz toga. Definira se po dijelovima linearna funkcija i crta njezin graf. Može se uključiti i drugi kontekst (npr. taksi, brzina, rođendan, unajmljivanje prostora ...) za primjenu ciljnog znanja u drugim situacijama (za daljnju institucionalizaciju ciljanih metoda i ideja). Od učenja matematike u realnim životnim situacijama očekuje se da učenici razviju fleksibilne i primjenjive matematičke vještine.

Relevantnost i primjenjivost

Razmatramo sljedeće mogućnosti:

- *Stvarni život i ekonomija:*
  - Linearno modeliranje (trošak taxija, mobitela i interneta, brzina, proslava rođendana, unajmljivanje i iznajmljivanje prostora ...)
  - Financijsko modeliranje (financijski modeli mogu biti linearni i nelinearni, npr. prihod tvrtke, profit, prosječni troškovi, inflacija ...)
  - Uvod u optimizaciju
- *Buduće istraživanje*: Znanja i vještine povezane s ovom temom relevantne su za mnoga područja:
  - Linearni fenomeni pojavljuju se posvuda u znanosti. Nadalje, za nelinearne probleme linearizacija je uobičajena metoda rješavanja problema, ako je to moguće. Često izračunavamo koeficijente linearne regresije i korelacije kako bismo proizveli linearni model i testirali linearnost skupa podataka, čak i kada nije poznato da li se podaci ponašaju linearno.
  - Svatko bi trebao biti u stanju voditi osobne financije, izraditi tablice kojima se vodi evidencija o zaradi i potrošnji, što je iznimno važno za donošenje financijskih odluka i planova. Osobne financije, poslovanje manjih i većih tvrtki nemoguće je bez financijskog modeliranja.
  - Uprave tvrtki rutinski koriste optimizacije procesa. Linearno programiranje, koje se naziva i linearna optimizacija, metoda je za postizanje najboljeg rezultata (kao što je maksimalni profit ili najniža cijena u planiranju, proizvodnji, transportu) u matematičkom modelu čiji su zahtjevi predstavljeni linearnim jednadžbama i nejednadžbama.

Upravljanje lancem opskrbe u poduzeću optimizira prijevoz proizvoda ili usluge od dobavljača do kupca.

- Može se napraviti algoritam i računalni program za rješavanje problema iz scenarija ili općenitijeg problema.

Istraživačke vještine

U ovom scenariju s linearnom funkcijom učenici stječu iskustvo istraživanja u matematici, iskustvo matematičkog modeliranja, pretvaranja podataka iz stvarnog života u matematički jezik, organiziranja podataka, prikazivanja podataka, pronalaženja optimalnog, formuliranja prijedloga, a pritom još vježbaju suradnju i komunikaciju. Opseg u kojem se te vještine razvijaju uvelike ovisi o načinu na koji nastavnik uključuje učenike tijekom faze potvrđivanja, kada on ili ona poziva grupe da prezentiraju svoja rješenja. U nekim slučajevima predlažemo nastavnicima da učenicima daju dodatne povratne informacije tijekom sljedećih lekcija.

Potencijal za slijed lekcija

Linearni scenarij mogao bi biti dio duljeg niza lekcija o linearnom modeliranju, financijskom modeliranju i linearnoj optimizaciji.

- *Predznanje*: Za takav slijed očekujemo da učenici budu upoznati s linearnim funkcijama i linearnim jednadžbama.
- *Uvod*: kontekst s bogatim otvorenim problemom, kao što je ovdje predložen. Varijacije gore navedenih dodatnih problema mogle bi se koristiti u budućim lekcijama.

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija*: uvodi se nova tablica s prikazom troškova, kao uvod u novu diskusiju o troškovima. Učenici čine prvi neformalni model situacije, na primjer
  $$((\text{trošak po biciklu} \cdot 50000) \cdot \text{ broj godina}) + \text{cijena izgradnje tvornice},$$
  te počinju koristiti jezik koji ide prema metodama matematičke optimizacije "troškovi po biciklu", "vrijeme potrebno za povrat ulaganja". Ova matematizacija tvorničkog konteksta u svijet matematike pruža mnoge mogućnosti za daljnji razvoj i institucionaliziranje ciljanog znanja na temelju doprinosa učenika. Učenici pokušavaju naći rješenje u grupama i pripremiti prezentaciju svojih rješenja. Nastavnik vodi raspravu o sličnostima i razlikama između tih rješenja kako bi svi došli do konačnih zaključaka.
- *Vertikalna matematizacija*: daljnji razvoj i primjena matematike povezane s ovim problemom. Izraditi opću hipotezu ili algoritam za pronalaženje optimalnih troškova za danu tablicu podataka. Nadalje, model se može napraviti apstraktnije ili općenitije, vidjeti gore ideje za to.

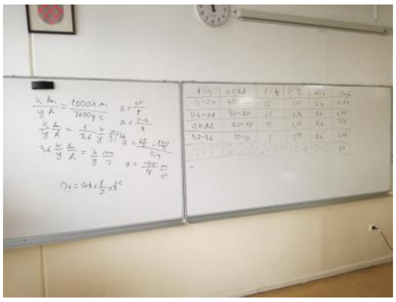
Zaključci, razmišljanja i prijedlozi za nastavak istraživanja

Učenik usvaja nove ideje i koncepte te ih primjenjuje; nastavnik naglašava najvažnije ideje i koncepte. Tijekom sljedećih sati nastave moglo bi se dalje istražiti što nam govore početna rješenja grupa učenika: Koje su ideje korisne? Što se moglo poboljšati? Kako možemo napraviti opću hipotezu ili algoritam za pronalaženje optimalnih troškova za danu tablicu podataka? Koje su vam strategije ili načini rada pomogli da dođete do rezultata?

MERIA Modul "Put kočenja"

Kvadratna ovisnost

Scenarij poučavanja

Ciljano znanje	Ovisnost puta kočenja o brzini neposredno prije kočenja je kvadratna
Širi ciljevi	 *Prezentacija rješenja - Hrvatska.* Kvadratna funkcija i karakterizacija kvadratne funkcije konstantnom drugom derivacijom (konstantnom drugom razlikom za kvadratne nizove) ili konstantnim rastom ili padom prve derivacije (razlike za kvadratne nizove). Računanje s različitim mjernim jedinicama. Organiziranje podataka. Određivanje pravila pridruživanja u obliku formule. Crtanje grafova (kvadratnih) funkcija na papiru ili korištenjem ICT-a. Istraživačke vještine: analiziranje podataka i traženje uzoraka u tablicama s brojevima, obrazlaganje rezultata (argumentacija) tijekom prezentacija (proračuni dominiraju procesom i učenici moraju sažeti svoje rezultate i predstaviti svoj pristup drugima). Interdisciplinarne vještine: učenici rade s varijablama iz fizike pa moraju razumjeti što računaju (povezivanje notacije i procedura iz područja matematike i fizike). U pisanju izvješća naglašene su profesionalne komunikacijske vještine. Učenici također raspravljaju o odgovornosti vozača i sigurnosti u prometu.
Potrebno matematičko predznanje	Temeljno znanje o funkcijama, veza stalne brzine i udaljenosti, prosječna brzina, pretvaranje km/h u m/s i obratno.
Razred	16 godina, 10 razred (kad se uvodi kvadratna funkcija)
Vrijeme	90 minuta, dva školska sata
Potrebni materijal	Tablice za popunjavanje, kalkulatori, računala, milimetarski papir

Problem: U gradskom području s osnovnim školama roditelji se žale na postavljeno ograničenje brzine, jer smatraju da ono nije adekvatno za područje sa školskom djecom. Skupina bezobzirnih vozača kaže da se ne moraju brinuti jer vozila koče na vrijeme. Istražite kako put kočenja ovisi o brzini neposredno prije kočenja. Savjetujte gradonačelnika o posljedicama promjene ograničenja brzine. Potkrijepite svoj savjet prikazima poput grafova, tablica i formula.

Razmislite najprije o kočenju automobila kod kojeg se brzina smanjuje za 10 km/h svake 0.4 sekunde. Možete upotrijebiti tablice u nastavku za organiziranje izračuna i izradu opažanja, a zatim opravdajte svoj odgovor na najbolji mogući način.

Faze	**Postupci nastavnika, uključujući upute**	**Postupci i reakcije učenika**
Primopredaja (didaktički) 10 minuta	Nastavnik dijeli učenike u tročlane ili četveročlane skupine. Nastavnik postavlja problem i provjerava razumiju li učenici pretpostavku o konstantnom smanjivanju brzine tijekom kočenja. Nastavnik i učenici raspravljaju o ideji malih vremenskih intervala na kojima se gibanje može aproksimirati jednolikim gibanjem sa stalnom (prosječnom) brzinom. Nastavnik provjerava razumiju li učenici pojmove u tablicama, osnovne veze između brzine, vremena i puta, kako pretvarati km/h u m/s i ideju da 40 km/h mogu zamijeniti nekom drugom početnom brzinom. Nastavnik naglašava da učenici mogu koristiti različite strategije. Mogu koristiti sve vrste tehnologije. Nastavnik dijeli učenicima tablice i osigurava džepna računala (ako učenici nemaju svoja), računala, milimetarski papir. Nastavnik zadaje učenicima zadatak da u 20 minuta istraže kako se mijenjaju početna brzina i put kočenja i da predstave neke zaključke o načinu na koji su povezani.	Učenici slušaju, iznose svoje ideje i odgovaraju na pitanja.
Djelovanje (adidaktički) 20 minuta	Nastavnik obilazi, promatra učenike bez uplitanja. Ako primijeti da većina grupa započinje s novom tablicom za svaku početnu brzinu nastavnik može zatražiti kratko plenarno	Učenici raspravljaju u grupi o strategijama. Učenici popunjavaju tablice koristeći kalkulatore ili koriste ICT za crtanje točaka ili …

	predstavljanje grupa o tome na koji način popunjavaju nove tablice. Vjerojatno će barem u jednoj grupi učenici uočiti da mogu koristiti prethodne račune pri određivanju puta kočenja za novu početnu brzinu i pročitati iz prethodne tablice put kočenja za manje početne brzine. Ovo može biti korisna povratna informacija za sve grupe.	Učenici raspravljaju o preciznosti, biraju različite početne brzine… Članovi grupa mogu imati različite ideje i razvijati ih samostalno. Učenici mogu koristiti računanje, grafove ili činjenice iz fizike kako bi došli do zaključaka: - put kočenja ne mijenja se konstantno - veza puta kočenja i početne brzine nije linearna - put kočenja se povećava kad se povećava početna brzina ali ne proporcionalno Neki učenici možda će primijetiti da su druge razlike konstantne i koristiti rekurzivnu metodu za računanje.
Formulacija (didaktički) 10 minuta	Nastavnik obilazi grupe i sluša kratko predstavljanje zaključaka grupe. Nastavnik postavlja pitanja i komentira ideje osobito u grupama koje imaju poteškoća u zaključivanju. Nastavnik upućuje grupe koje imaju više različitih strategija da odaberu jednu od njih i koriste ju za generalizaciju i prezentiranje ideja. Nastavnik podsjeća učenike da je cilj aktivnosti otkriti kako je put kočenja ovisan o brzini neposredno prije kočenja kako bi mogli savjetovati gradonačelnika. Učenici trebaju izraditi preporuke, potkrijepljene tablicama i grafovima, za gradonačelnika o posljedicama promjene ograničenja brzine.	Učenici kratko predstavljaju svoj rad i postavljaju pitanja.

Djelovanje i formulacija (adidaktički) 20 minuta	Nastavnik promatra.	Učenici nastoje generalizirati svoje račune i razmatranja. Neki od njih će možda promijeniti strategiju za generalizaciju ili pristup problemu. Učenici pripremaju preporuku za gradonačelnika.
Potvrđivanje (didaktički) 25 minuta	Nastavnik poziva učenike da predstave i usporede strategije i rješenja.	Učenici predstavljaju rješenja svojih grupa, slušaju, postavljaju pitanja i raspravljaju o strategijama i rješenjima.
Institucionalizacija (didaktički) 5 minuta	Nastavnik ističe sličnosti i razlike u matematičkom argumentiranju različitih strategija, objašnjava zašto neke od strategija nisu dovele do dokaza da je ovisnost kvadratna, ali promatrajući grafove i formule dobivene pomoću tehnologije može se pretpostaviti da je ovisnost kvadratna. Nastavnik uvodi opći zapis kvadratne funkcije.	Učenici slušaju i povezuju svoja rješenja s općom kvadratnom funkcijom.

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	Učenici će popunjavajući tablicu odrediti put kočenja za početnu brzinu od 40 km/h:

	Vrijeme (sekunde)	Promjena brzine za vrijeme kočenja (km/h)	Prosječna brzina (km/h)	Prosječna brzina (m/s)	Vremenski interval Δt	Prijeđeni put Δd (m)
	$t = 0$ do $t = 0.4$	$v = 40$ do $v = 30$	35	$\frac{175}{18}$	0.4	$\frac{35}{9} \approx 3.89$
	$t = 0.4$ do $t = 0.8$	$v = 30$ do $v = 20$	25	$\frac{125}{18}$	0.4	$\frac{25}{9} \approx 2.78$
	$t = 0.8$ do $t = 1.2$	$v = 20$ do $v = 10$	15	$\frac{25}{6}$	0.4	$\frac{15}{9} \approx 1.67$
	$t = 1.2$ do $t = 1.6$	$v = 10$ do $v = 0$	5	$\frac{25}{18}$	0.4	$\frac{5}{9} \approx 0.56$
Put kočenja (m)						$\frac{80}{9} \approx 8.89$

	Zamijene li početnu brzinu nekim drugim brojem, analogno će dobiti put kočenja. Dobivenim će podatcima popunjavati tablicu (v, d).

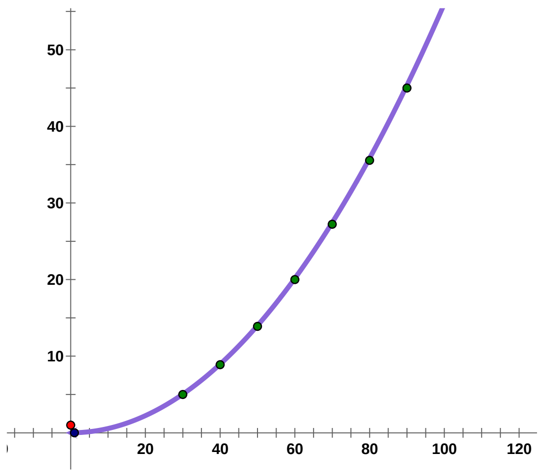
Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	40	50	60	70	80	90	100	110
Put kočenja (m)	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$

Ili s decimalnim brojevima, na primjer:

Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100
Put kočenja (m)	5	8.89	13.89	20	27.22	35.56	45	55.56

Promatrajući podatke u tablici mogu zaključiti:

- Put kočenja je duži kad je brzina veća.
- Odnos između brzine i puta kočenja nije linearan ($\frac{\Delta d}{\Delta v}$ nije konstantno).
- Ako se brzina udvostruči, udaljenost se povećava četiri puta. Ako se brzina poveća tri puta, udaljenost se povećava devet puta.
- Učenici mogu crtati točke (v, d) i zaključiti da veza može biti kvadratna. Mogu zapisati opću kvadratnu funkciju
$$d = av^2 + bv + c$$
i odrediti nepoznate koeficijente a, b, c koristeći podatke iz tablice i rješavajući sustav jednadžbi. Ako su vrijednosti zapisali pomoću decimalnih brojeva dobit će aproksimaciju. Učenici koji odaberu ovu strategiju neće dokazati da je ovisnost kvadratna.



- Nakon pretpostavke da je ovisnost kvadratna učenici mogu koristiti ICT i pronaći kvadratnu regresiju. Učenici koji odaberu ovu strategiju neće dokazati da je ovisnost kvadratna.

- Koristeći podatke iz tablice učenici mogu generalizirati:
  $$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$
  $$d_{40} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8.89$$
  $$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$
  $$d_{50} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13.89$$
  $$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$
  $$d_{60} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$$
  $$d_{v_0} = \frac{5}{9}\big(1 + 3 + \cdots + (2n - 1)\big) = \frac{5}{9} \cdot n^2$$
  Važan je zaključak: ako promatramo put kočenja, tražimo onaj trenutak kad je brzina jednaka 0; toliko ćemo puta oduzimati 10 od v_0 dok ne dobijemo 0:
  $$v_0 - 10n = 0 \Longrightarrow n = \frac{v_0}{10}$$
  $$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180} {v_0}^2 \approx 0.0056\, {v_0}^2$$
  U ovu formulu uvrštavamo v_0 u km/h i dobivamo udaljenost u metrima.

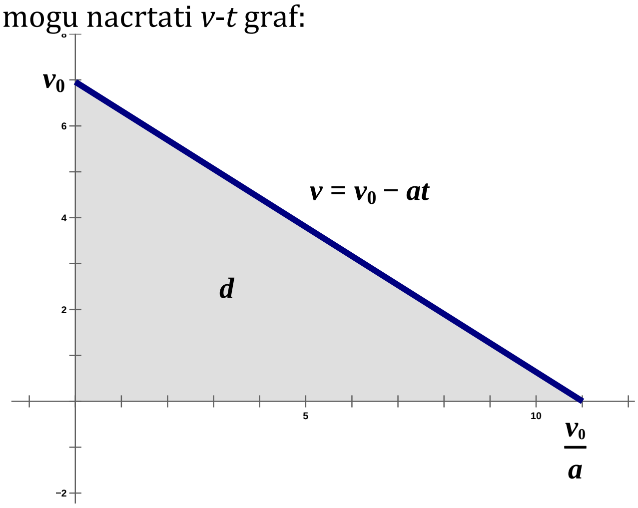
- Učenici mogu koristiti kalkulatore i upisivati podatke u tablice kao decimalne brojeve. Ovi rezultati neće biti egzaktni pa će uočavanje pravilnosti neće biti tako jednostavno.

- Učenici mogu koristiti podatak da se brzina smanjuje za 10 km/h svakih 0.4 sekundi. To znači da se brzina smanjuje za 25km/h svake sekunde ili za $6.9\dot{4}$ m/s svake sekunde, što znači da je akceleracija $a = \frac{125}{18} = 6.9\dot{4}$ m/s^2.
  Koristeći formule $d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2$ i računajući s brzinama u metrima u sekundi mogu dobiti tražene vrijednosti za put i popuniti tablice. U tom slučaju neće biti potrebne prosječne brzine. Učenici mogu pomoću formula iz fizike:
  $$v = v_0 - at, d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2$$
  doći do opće formule bez računanja udaljenosti za konkretne početne brzine. Pri tome koriste važan zaključak: ako promatramo put kočenja, tražimo onaj trenutak kad je brzina jednaka 0. Iz prve formule ($v = 0$) mogu izračunati vrijeme $t = \frac{v_0}{a}$ i uvrstiti u drugu te dobiti
  $$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.\dot{8}} = 0.072 v_0^2.$$

U ovoj formuli uvrštavamo v_0 u m/s i dobivamo udaljenost u metrima.

- Ako učenici računaju akceleraciju u km/h^2 dobit će:
  $a = 90000$ km/h^2, uvrstiti v_0 u km/h i dobiti udaljenost u kilometrima
  $$d = \frac{v_0^2}{180000}, \text{ ili u metrima } d = \frac{v_0^2}{180}.$$

- Učenici mogu nacrtati *v*-*t* graf:



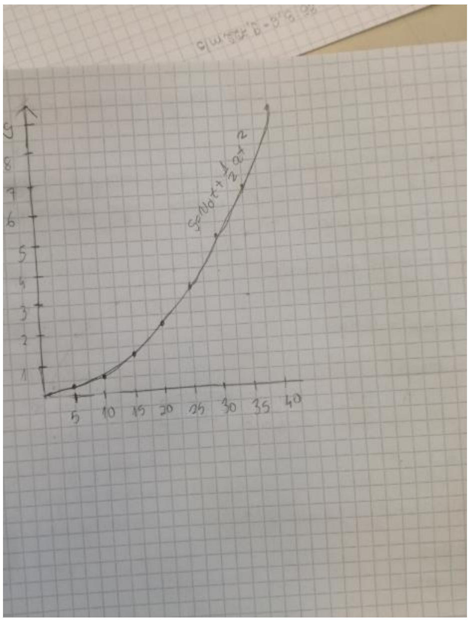
i računati udaljenost kao površinu ispod grafa:
$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0.072 v_0^2.$$
U ovoj formuli uvrštavamo v_0 u m/s.

	Vrijeme (sekunde)	**Promjena brzine za vrijeme kočenja (km/h)**	**Prosječna brzina (km/h)**	**Prosječna brzina (m/s)**	**Vremenski interval Δt (s)**	**Prijeđeni put Δd (m)**
	$t = 0$ do $t = 0.4$	$v = 40$ do $v = 30$	35			
Put kočenja (m)						

Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	40							
Put kočenja (m)								

Objašnjenje materijala

Na početku će učenici dobiti tablice koje ispunjavaju. Cilj je potaknuti učenike da promatraju vremenske intervale od 0.4 sekunde, prosječne brzine na tim intervalima (u km/h i m/s) kao i prijeđeni put u tom vremenskom intervalu. Učenici će sami zaključiti da računaju dijelove puta sve dok brzina ne postane 0. Broj redaka u tablici će se zato mijenjati i učenici će sami odrediti koliko im redaka tablice treba. U drugoj će tablici učenici osim predložene brzine od 40 km/h sami birati ostale brzine koje će promatrati. Tablice će učenici koristiti u fazi akcije. Ako popunjavanje tablica za različite početne brzine oduzima previše vremena može se organizirati razmjena podataka među grupama. Učenici bi trebali uočiti da mogu koristiti prethodne izračune kada pokušavaju izračunati put kočenja za druge početne brzine i pročitati iz tablice put kočenja za niže početne brzine. U slučaju da mnoge skupine započinju novu tablicu za svaku novu početnu brzinu negdje tijekom 20 minuta adidaktičke faze, nastavnik može zatražiti da grupe kratko predstave kako se bave ovim pitanjem. Vjerojatno je barem jedna grupa pronašla rješenje za to pa njihovi zaključci mogu koristiti kao povratna informacija za sve ostale grupe.



Za crtanje grafova učenici mogu koristiti milimetarski papir, papir s kvadratićima ili računalo. Učenicima koji dođu do sume $1 + 3 + \cdots + (2n - 1)$ mogu se kao vizualno pomagalo ponuditi kocke za dokaz bez riječi.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

U provedbi scenarija treba se držati predviđenih didaktičkih i adidaktičkih faza te fazu akcije provoditi adidaktički. Važno je provesti fazu potvrđivanja u kojoj će učenici vrednovati prezentirana rješenja. Neki se pak dijelovi scenarija mogu mijenjati. U ovom poglavlju navodimo didaktičke varijable odnosno dijelove scenarija koji se mogu mijenjati kao i intervencije nastavnika koje u nekim situacijama treba provesti.

Didaktičko okruženje: Problem se može predstaviti na različite načine. Nastavnik može ispričati sadržaj problema, može koristiti prezentacije ili video. Brzina od 40 km/h odabrana je proizvoljno te se može zamijeniti nekom drugom, ali zbog uočavanja pravilnosti savjetujemo da bude višekratnik broja 10. Podatak o smanjivanju brzine za 10 km/h svake 0.4 sekunde odabran je tako da bude realističan, a da istovremeno omogući uočavanje pravilnosti te ga stoga ne bi trebalo mijenjati. Predviđene su tablice kao pomoć za organiziranje podataka, ali ne treba zahtijevati da ih učenici koriste jer je moguće doći do općih zaključaka bez računanja puta kočenja za konkretne brzine. Tablice su samo djelomično zadane pa učenici koji ih koriste moraju sami odrediti koliko redaka treba računati u prvoj tablici te koje brzine uvrštavati u drugu.

Nastavnik treba izbjegavati preciznije zadane tablice kako bi učenici mogli razvijati istraživačke vještine. Učenike se može potaknuti da koriste ICT za crtanje, prikazivanje i računanje, ali scenarij se može provesti i bez upotrebe ICT-a. Nastavnik može izraditi svoje digitalne materijale. Ako nastavnik koristi svoje materijale treba paziti da ICT samo pomaže pri računanju i prikazivanju, a ne nudi zaključke.

Trajanje pojedinih faza može se prilagoditi učenicima, ali odstupanja ne bi trebala biti velika.

Ako za vrijeme *adidaktičke faze* grupe nisu pronašle opću formulu koja povezuje put kočenja i početnu brzinu, nastavnik može postaviti pitanja:

- Možete li uočiti neku pravilnost među dobivenim vrijednostima puta kočenja?
- Možete li dobivene vrijednosti grafički prikazati? Možete li povezati grafičke i algebarske prikaze?
- Kolika je brzina u trenutku kad se vozilo zaustavlja?
- Ako ste popunjavajući tablice odredili put kočenja za različite početne brzine, možete li napraviti isto, ali ne za neku specifičnu početnu brzinu, nego za opću *v*.
- Koje formule iz fizike mogu biti korisne?
- Kako vam tehnologija može pomoći u traženju veze ili formule?

Nastavnik ne treba pojedinačno poučavati svaku skupinu. Nadalje, nije potrebno ostati sa skupinom dok ne dođu do odgovora na postavljena pitanja. Smatrajte ova pitanja manjom *primopredajom* ograničenog problema i dopustite učenicima da adidaktički nastave *fazu djelovanja* i *formulacije*. Nastavnik ne treba podržavati raspravu daljnjim pitanjima i ne sugerira odgovore.
Za grupe koje imaju problem s dokazom formule: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ nastavnik može reći:

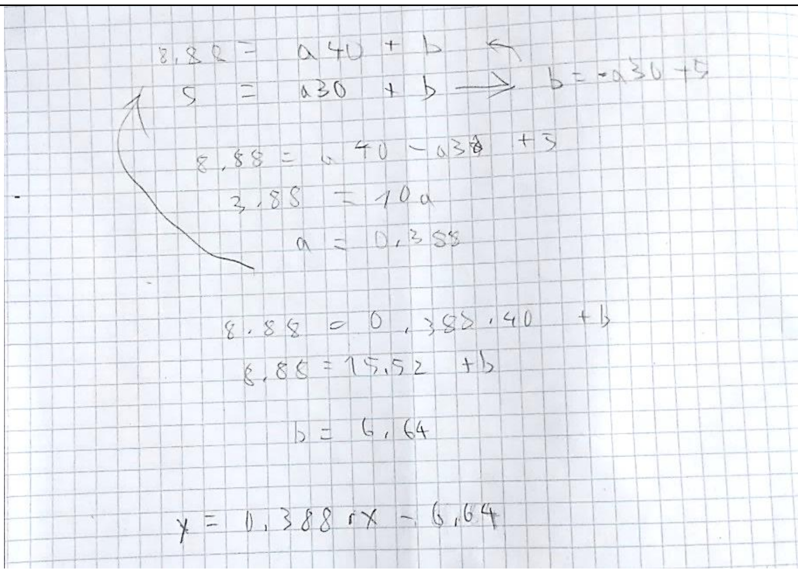
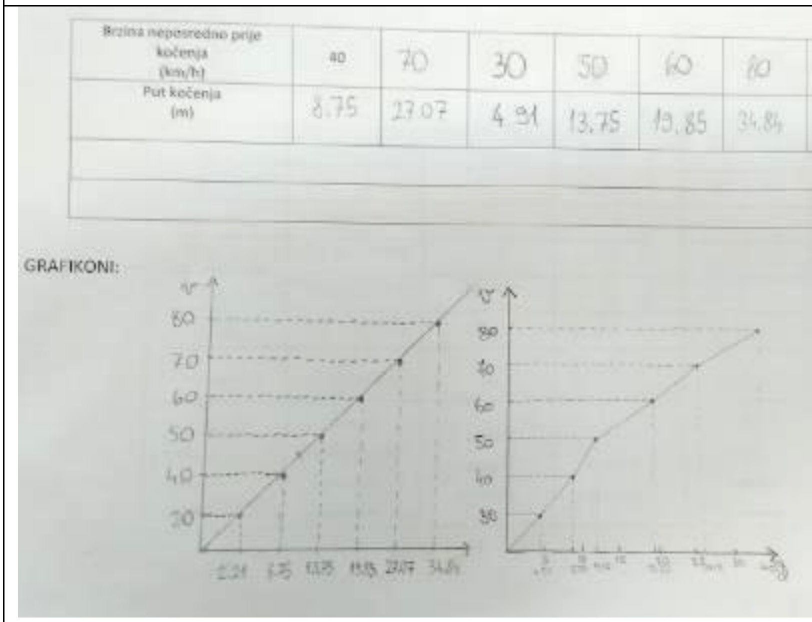
- nacrtajte točke za svaki pribrojnik u sumi i promotrite
- označite sumu sa S i zapišite ju dva puta, ali u drugačijem poretku: od prvog do zadnjeg i od zadnjeg do prvog.

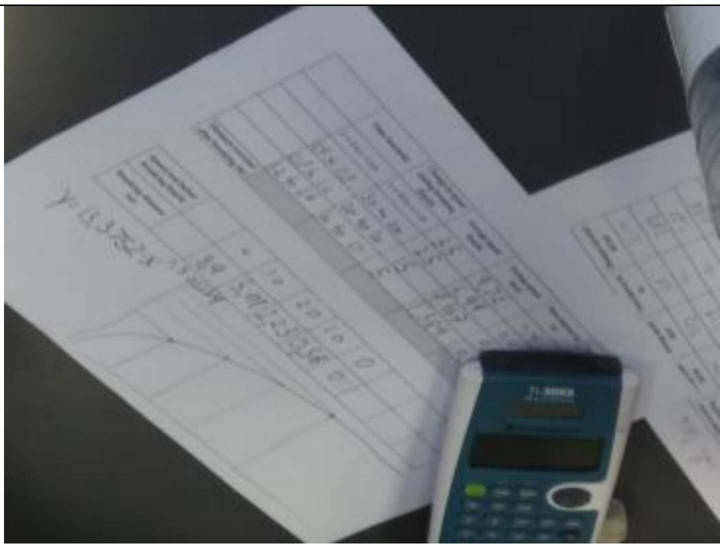
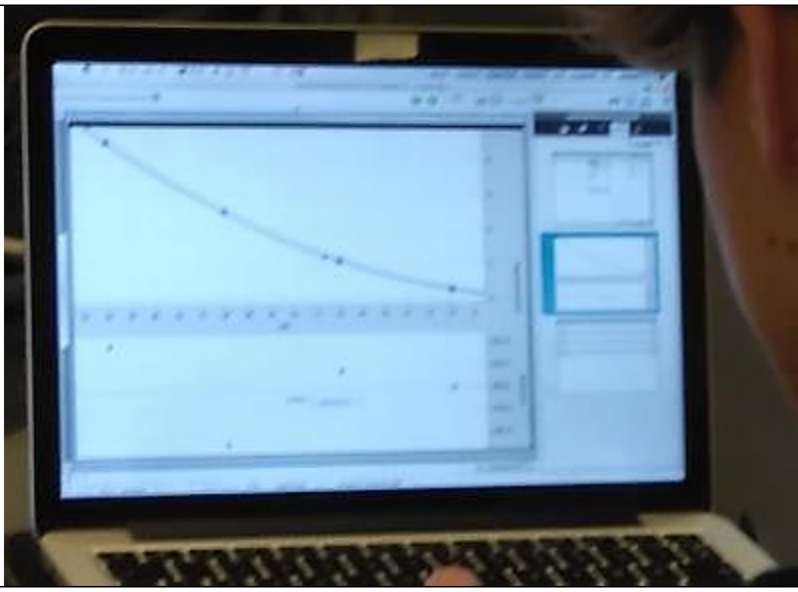
Nije nužno da učenici dokažu formulu u *adidaktičkoj fazi*. Vrijedno je i ako naslute da je promatrana suma jednaka n^2, a dokaz se može provesti didaktički u *fazi potvrđivanja*.
Učenici će sami birati početne brzine. Vjerojatno će birati brzine od 50, 60, 70, ... km/h. Ako izaberu brzine koje nisu višekratnici broja 10 imat će više problema u određivanju trenutka kad brzina postaje 0 jer to neće biti višekratnik broja 0.4 s. U ovom će slučaju teže odrediti pravilnost. Odabir brzina koje će se promatrati može se raspraviti u *fazi potvrđivanja*.
Učenici mogu put kočenja izraziti u decimalnom ili razlomačkom zapisu. Decimalni će zapisi biti približni pa se neke pravilnosti neće moći uočiti. I odabir zapisa može se raspraviti u *fazi potvrđivanja.*

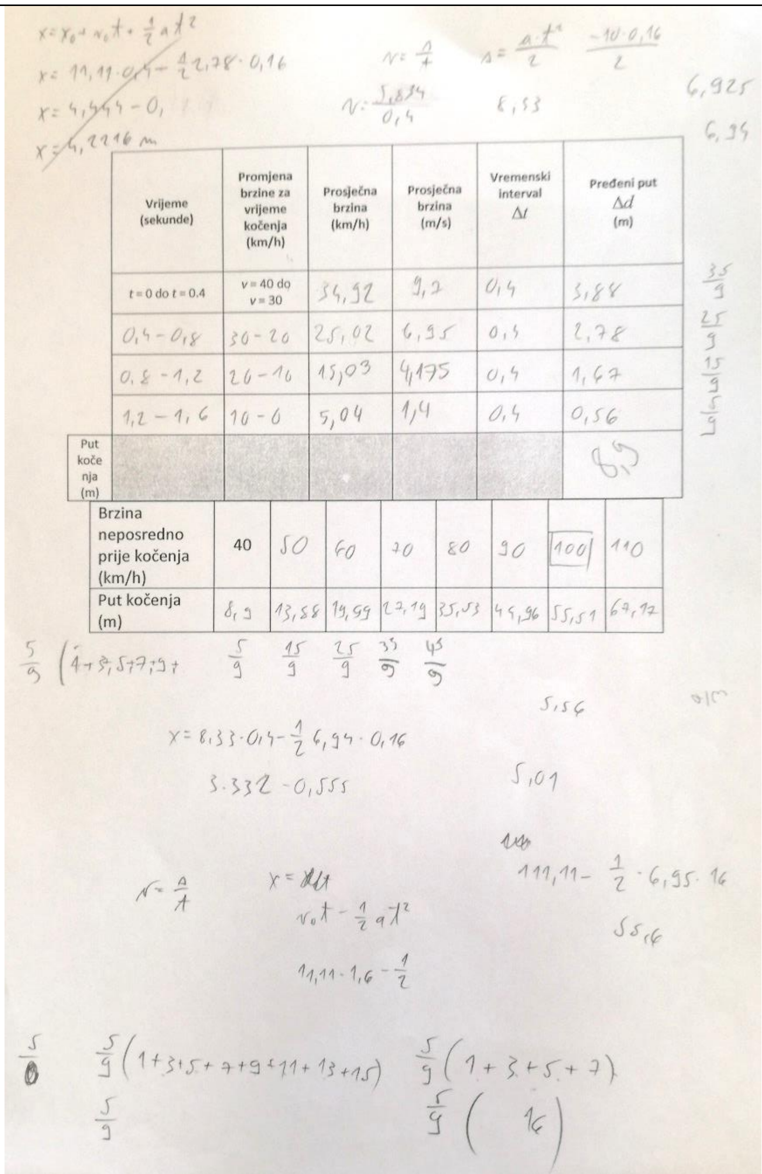
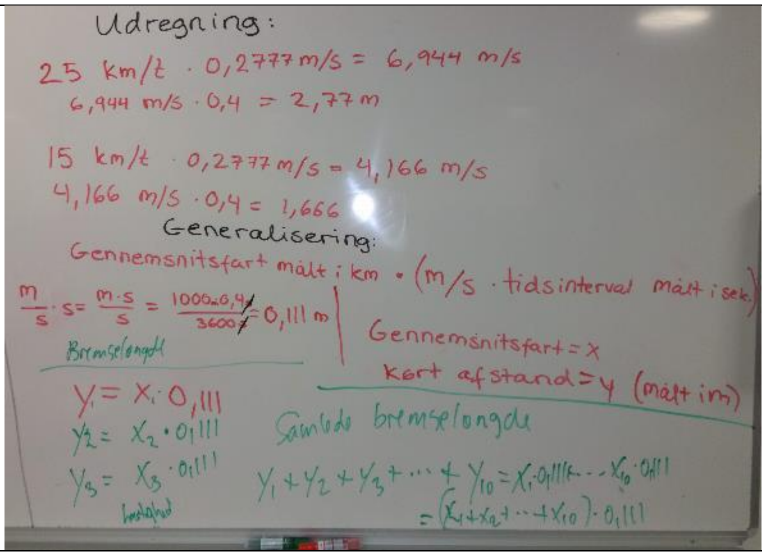
U *fazi institucionalizacije* važno je da se većina (ako ne i sve) strategije koje su se pojavile u razredu komentiraju i povežu jedna s drugom.

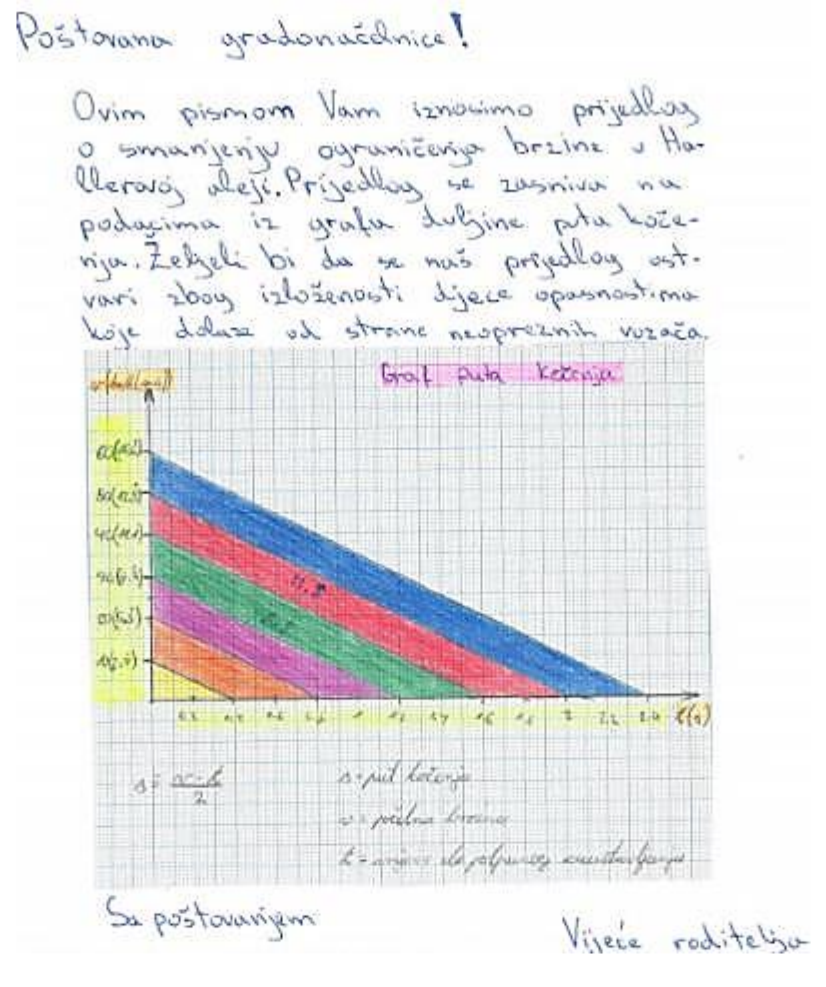
Zapažanja iz prakse

U nekim grupama učenici mogu napraviti pogreške u računu i dobiti pogrešan put kočenja za neke početne brzine. U fazi prve formulacije, nastavnik može od učenika iz različitih grupa zatražiti da usporede svoje rezultate i isprave pogreške.

	*Neki su učenici pretpostavili da je veza između brzine i puta kočenja linearna. Koristeći podatke iz tablica odredili su linearnu funkciju.*
	*U nekim su grupama učenici pokušali nacrtati točke tako da pripadaju pravcu ili grafu po dijelovima linearne funkcije. U tom slučaju nastavnik može tražiti da učenici objasne zašto misle da je ovisnost linearna, znaju li neka svojstva linearne funkcije i mogu li uočiti ta svojstva u podatcima. Učenici bi trebali zaključiti da ovisnost nije linearna jer kvocijent razlika nije konstantan.*

	*U nekim su grupama učenici na x osi prikazali udaljenost.*
	*Neki su učenici koristili ICT.*
	*Nakon što su zaključiti da je ovisnost kvadratna učenici su pronašli kvadratnu regresiju.*

	*U nekim su grupama učenici koristili razlomke i dobili sume neparnih brojeva.*
	*Učenici su došli i do suma nekih drugih nizova. U tom slučaju nastavnik bi trebao završiti njihov rad u fazi institucionalizacije.*



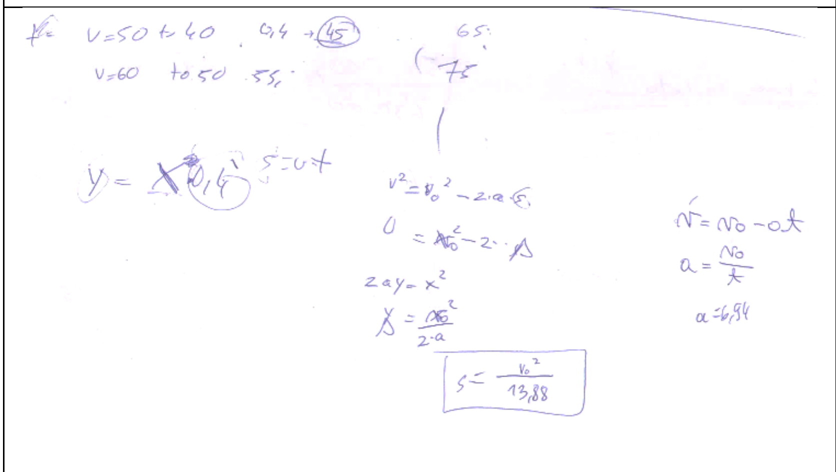
Poštovana gradonačelnice!

Ovim pismom Vam iznosimo prijedlog o smanjenju ograničenja brzine u Hallerovoj aleji. Prijedlog se zasniva na podacima iz grafa duljine puta kočenja. Željeli bi da se naš prijedlog ostvari zbog izloženosti djece opasnostima koje dolaze od strane neopreznih vozača.

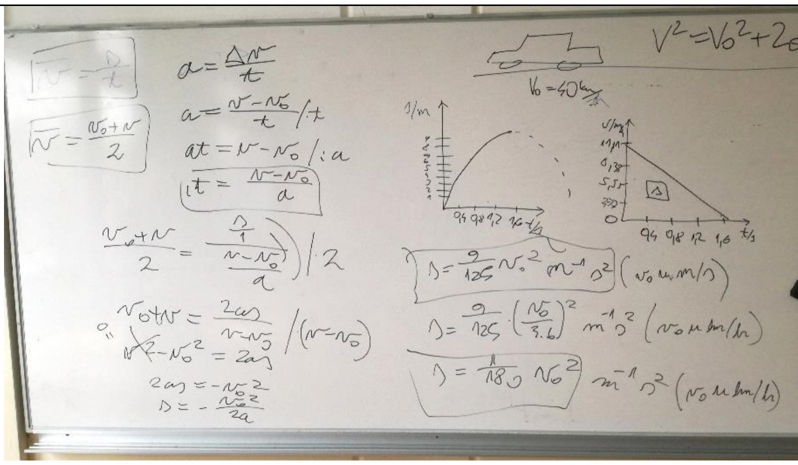
Sa poštovanjem

Vijeće roditelja

Neki su učenici crtali v-t grafove za različite početne brzine i računali put kočenja kao površinu ispod grafa. U tom slučaju nastavnik bi trebao nastaviti s tom idejom u fazi institucionalizacije i nacrtati v-t graf za opću brzinu v.



Neki su učenici koristili formule $a = \frac{\Delta v}{t}$, $\bar{v} = \frac{s}{t}$ *i* $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$, *i dobili formulu* $v^2 - v_0^2 = 2as$ *(1). Budući je brzina v za put kočenja jednaka 0 slijedi* $s = -\frac{v_0^2}{2a}$ *gdje se akceleracija a uzima s negativnim predznakom.*

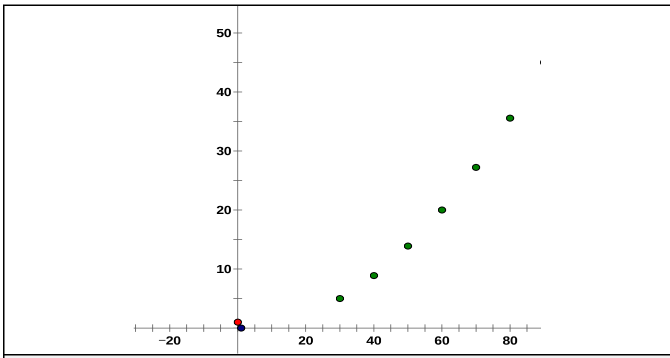
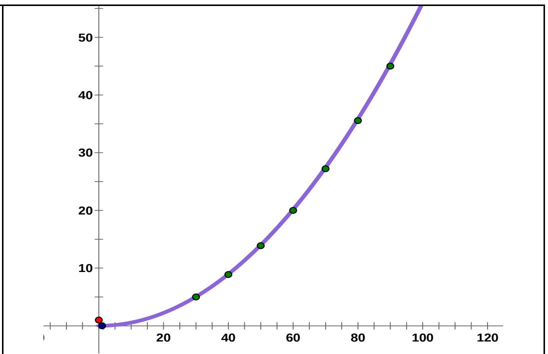


Formulu (1) učenici mogu dobiti i eliminacijom vremena t u formulama $v = v_0 + at$ *i* $s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ *ili im može biti poznata iz fizike.*

Pomoću formule (1) učenici će dobiti kvadratnu ovisnost puta kočenja o početnoj brzini bez računanja konkretnih vrijednosti. Grupe koje problem rješavaju na ovaj način bit će vjerojatno brže od ostalih grupa pa im se može se skrenuti pažnja i na podatke koji se traže u tablici (primjerice, zašto je prosječna brzina na pojedinom vremenskom intervalu relevantna informacija) i zadati zadatak da ovisnost puta kočenja o početnoj brzini prikažu grafički, pripreme obrazloženje o važnosti ograničenja brzine u blizini škole ili istraže ovisnost zaustavnog puta o početnoj brzini (Prijedlog za daljnje probleme 1.)

Zaključak:
Možemo uočiti da su neki učenici zaključke donosili samo promatrajući brojeve dok su neki nastojali opisati kako se odnose put kočenja i brzina neposredno prije kočenja. Promotrite tablicu:

<table>
<tr><th>Brojevi</th><th>Ovisnost</th></tr>
<tr><td>Učenici računaju put kočenja samo za nekoliko početnih brzina, na primjer 40 km/h i 70 km/h, i zaključuju da je put kočenja predug ako auto vozi brzinom od 70 km/h pa preporučaju ograničenje brzine od 40 km/h.</td><td>Učenici zaključuju gledajući u brojeve da ovisnost nije linearna (za veće brzine promjena u brzini dovodi do dramatične promjene u putu kočenja).</td></tr>
<tr><td>Učenici popunjavaju tablicu s više podataka, na primjer:
<table>
<tr><td>Brzina (km/h)</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td></tr>
<tr><td>Put kočenja (m)</td><td>5</td><td>8.89</td><td>13,89</td><td>20</td><td>27.22</td><td>35.56</td><td>45</td></tr>
</table>
i pišu preporuku promatrajući brojeve.</td><td>Učenici zaključuju promatrajući brojeve u tablici da ovisnost može biti kvadratna jer ako udvostručimo brzinu put kočenja će se povećati četiri puta (promatrajući 30 km/h i 60 km/h).</td></tr>
<tr><td>Učenici crtaju točke i pišu preporuku promatrajući točke.</td><td>Učenici crtaju točke, zaključuju da bi ovisnost mogla biti kvadratna i crtaju graf.</td></tr>
</table>

	
	Učenici zaključuju da je ovisnost kvadratna i koriste IST za određivanje kvadratne regresije.
	Učenici zaključuju da je ovisnost kvadratna i koriste podatke iz tablica za određivanje koeficijenata kvadratne funkcije.
	Učenici koriste argumente kako bi dokazali da je ovisnost kvadratna (vidi *Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje*).

Iako je računanje i prikupljanje podataka važno u ovom scenariju, učenici bi trebali osjećati potrebu da istražuju dalje i pokušaju odrediti ovisnost. Ako su svi učenici zadovoljni s odgovorima dobivenim samo promatranjem brojeva, nastavnik može u *fazi institucionalizacije* razgovarati s učenicima što to znači “odrediti ovisnost”.

Alati za procjenu

Na kraju sata ili na početku idućeg sata učenicima se može postaviti nekoliko zadataka:

1. Dva se automobila kreću ulicom. Brzina jednog je trostruko veća od brzine drugog. Hoće li put kočenja bržeg vozila biti tri puta veći? Obrazložite odgovor.
   Odgovor: Neće. Put kočenja kvadratno ovisi o brzini neposredno prije kočenja. Zato će put kočenja bržeg vozila biti devet puta veći.

2. Vozilo se kreće brzinom od 80 km/h. Na koju brzinu treba smanjiti brzinu kretanja ako želimo da put kočenja bude dvostruko manji?
   Odgovor: Brzinu treba smanjiti četiri puta, odnosno treba ju smanjiti na 20 km/h.

3. Na put kočenja osim brzine neposredno prije kočenja utječu i vremenski uvjeti na cesti. Jednog je dana izvršeno mjerenje i ustanovljeno je da se vozilo koje se kretalo brzinom od 40 km/h zaustavilo nakon 10 m. Nakon koliko metara će se pod istim uvjetima zaustaviti vozilo koje se kreće brzinom od 70 km/h?
   Odgovor: Put kočenja kvadratno ovisi o brzini neposredno prije kočenja pa ćemo pretpostaviti da tu ovisnost možemo zapisati kao $d(v_0) = kv_0^2$*. Po uvjetima zadatka je* $d(40) = 10$ pa je $k = \frac{d}{v_0^2} = \frac{1}{160}$*. Vozilo koje se kreće brzinom od 70 km/h zaustavit će se nakon* $d(70) = \frac{70^2}{160} = 30.625 \approx 30.6\ m$.

Preporuke za daljnje probleme vezane uz put kočenja i kvadratne ovisnosti

1. Zaustavni put vozila sastoji se od dva dijela: puta reakcije i puta kočenja.
   Put koji vozilo pređe od trenutka kad vozač uoči potrebu za kočenjem do trenutka kad počne kočiti je put reakcije. Vrijeme reakcije vozača je prosječno 1 s, a može se produžiti zbog umora vozača, bolesti, konzumacije droga i alkohola. Vrijeme reakcije vozača koji je pod utjecajem alkohola (0.5 g/l alkohola u krvi) je 1.5 s. Pretpostavljamo da u vremenu reakcije vozilo vozi stalnom brzinom.
   Put koje vozilo prijeđe od trenutka kad vozač počne kočiti dok se ne zaustavi zove se put kočenja. Put kočenja najviše ovisi o brzini neposredno prije kočenja i o uvjetima na cesti, a može ovisiti i o stanju vozila. Ako zanemarimo stanje vozila, računa se po formuli $s = \frac{v^2}{254\mu}$ gdje je v brzina vozila neposredno prije kočenja izražena u kilometrima na sat, a μ koeficijent trenja koji ovisi o uvjetima na cesti:

Koeficijent trenja μ	**suh kolnik**	**mokar kolnik**
asfalt nov	0.7 – 0.8	0.5 – 0.6
asfalt star, prljav	0.6 – 0.7	0.25 – 0.45
šljunak, sitni kamen	0.6 – 0.7	0.3 – 0.5
ugaženi snijeg	0.2 – 0.4	
led	0.05 – 0.1	

   a) Istražite kako put reakcije ovisi o brzini neposredno prije kočenja za vozača s vremenom reakcije 1 s i za vozača s vremenom reakcije 1.5 s.
   b) Istražite kako put kočenja ovisi o brzini neposredno prije kočenja za suh i za mokar asfaltni kolnik i za kolnik s ugaženim snijegom.
   c) Istražite kako zaustavni put ovisi o brzini neposredno prije kočenja za različita vremena reakcije i različite uvjete na kolniku.

2. Koliko dijagonala ima četverokut, peterokut, šesterokut, n-terokut?

3. Na koliko je najviše dijelova moguće izrezati pizzu ako se naprave dva, tri, četiri, n rezova?

4. Jednakostranični trokut stranice duljine n cm podijeljen je na jednakostranične trokute stranice duljine 1 cm. Koliko ih ima?

5. Opišite matematički putanju lopte pri slobodnom bacanju u košarci.

Načela i RME perspektiva u scenariju

Relevantnost i primjenjivost

Ovo se znanje odnosi na svakodnevna iskustva s kretanjem vozila i kočenjem. Učenici postaju svjesni kako brzina neposredno prije kočenja utječe na put kočenja. Znanja i vještine vezane uz temu kvadratnih ovisnosti pojavljuju se u mnogim područjima.

Istraživačke vještine

Istraživanje je uključeno u sve faze. Učenike treba navikavati na istraživanje i češće ih stavljati u situaciju u kojoj će raditi na ovaj način. Tako će uz matematičke kompetencije razvijati i istraživačke vještine. Tijekom provedbe scenarija učenici će generirati primjere, sustavno eksperimentirati, organizirati podatke, formulirati hipoteze, pronalaziti i opravdavati formule, surađivati i komunicirati. Istraživačke vještine treba uključiti u povratnu informaciju u *fazi potvrđivanja i institucionalizacije*.

Potencijal za slijed lekcija

Scenarij može biti dio većeg niza lekcija o kvadratnim ovisnostima i svojstvima kvadratnih nizova i funkcija.

- *Prethodno znanje*: Za poglavlje o kvadratnim ovisnostima očekujemo da učenici poznaju pojam funkcije, pojam i svojstva aritmetičkog niza i linearne funkcije.
- *Uvod*: kontekst kočenja automobile može se koristiti kao bogati otvoreni problem koji obuhvaća modul.

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija*: matematičke jezik se uvodi kako bi se raspravilo o situaciji. Učenici čine prvi neformalni model situacije – scenarij o putu kočenja, uvode se kvadratne ovisnosti.
- *Vertikalna matematizacija*: matematika uključena u problem dalje se razvija. Model postaje sažetiji, općenitiji.
  Učenici proučavaju kvadratne nizove i karakteriziraju ih: prve razlike su linearne, a druge konstantne. Nadalje, sume članova linearnih (aritmetičkih) nizova su kvadratni nizovi. Generalizacija – kvadratna funkcija: prva derivacija je linearna, a druga konstantna. Nadalje, integral linearne funkcije je kvadratna funkcija.

MERIA Modul “Linije sukoba – uvod”

Podjela ravnine simetralama dužina

Scenarij poučavanja

Ciljano znanje	Podjela ravnine simetralama dužina određenih parovima točaka u ravnini.
Širi ciljevi	Konstrukcija simetrale dužine. Svojstvo simetrale dužine: svaka točka na simetrali dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine. Svojstvo simetrala stranica i sjecišta simetrala stranica trokuta i četverokuta te svojstva točaka u područjima na koje je lik simetralama podijeljen. Korištenje oznake d(P,X) < d(P,Y). Istraživačke vještine: eksperimentiranje i sustavno crtanje prilikom određivanja područja i granica područja s traženim svojstvom. Donošenje odluka koje linije/simetrale koristiti te jasno predstavljanje dobivenih rezultata. Interdisciplinarne vještine: učenici mogu problem povezati s problemom utvrđivanja granica i razgraničenja teritorija (geografija) te geometrijskim rješenjem navedenih sporova. Mogu ga primijeniti i za rješavanje problema navigacije robota.
Potrebno matematičko predznanje	Pitagorin poučak i nejednakost trokuta (za dokaz).
Razred	15 – 16 godina, 1., 2. razred (kada se uvodi simetrala dužine)
Vrijeme	40 minuta, uz korištenje interakcije 70 minuta
Potrebni materijal	Nastavni listići, papir, računalo, MERIA interakcija u GeoGebri: https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html Dodatne web stranice: http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html, https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4

Problem:

Na mapi su prikazani izvori vode u pustinji. Zadatak je obojiti područja u pustinji tako da obojeno područje oko svakoga izvora sadrži točke koje su tome izvoru najbliže. [2]

[2] Problem i karta pustinje su preuzeti iz knjige Geometry with Applications and Proofs, Voronoi Diagrams by A. Goddijn, M. Kindt, W. Reuter

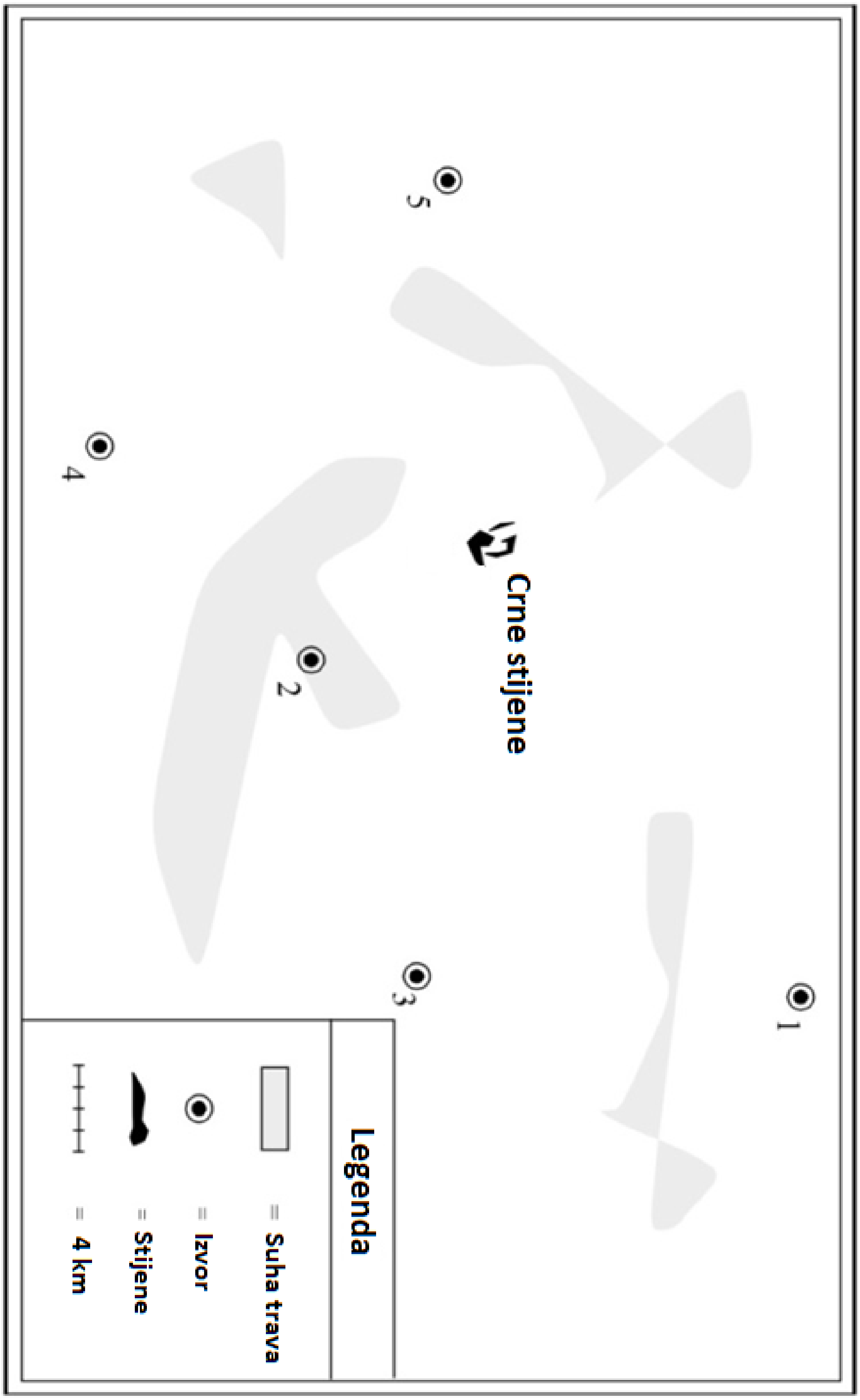
Faza	**Postupci nastavnika, uključujući i upute**	**Postupci i reakcije učenika**
Primopredaja 1 (didaktički) 5 minuta	Uvođenje pojma linije sukoba u učionici: Pretpostavimo da dva učenika (X i Y) imaju slatkiše i od vas se traži da odete po slatkiš kod učenika koji vam je bliži. Nastavnik odabire dva učenika i pita: tko je bliži učeniku X i tko je učenik Y, i na kraju pita ima li netko kome se teško odlučiti....	Učenici sudjeluju podizanjem ruku i kao da su točke u ravnini, sami odlučuju jesu li bliže ili ne jednoj od dvije dane točke. Promatraju i kako drugi učenici odlučuju.
Institucionalizacija (didaktički) 2 minute	Nastavnik sažima glavne zaključke: Problem je prepoznati točke s "istom udaljenosti", a izazov je otkriti siguran i precizan postupak za određivanje točaka s tim svojstvom. Utvrđuje se oznaka (npr. d (A, C) <d (B, C) za točku C koja je bliža točki A nego točki B). Ovu će oznaku učenici koristiti u sljedećem koraku	Učenici slušaju i povezuju institucionalizirano znanje i oznake sa svojom aktivnosti.
Primopredaja 2 (didaktički) 3 minute	Nastavnik postavlja novi problem: Zamislite da ste negdje u pustinji (učenici dobivaju nastavni listić). Pronađite izvor vode koji vam je najbliži. Odredite sve točke s kojih biste također išli do toga izvora. Zatim podijelite kartu na područja tako da su za svaki izvor sve točke u odgovarajućem području najbliže tome određenom izvoru. Nastavnik provjerava razumiju li učenici problem.	Učenici slušaju.
Djelovanje (adidaktički) 15 minuta	Nastavnik obilazi učenike i uočava ideje istraživanja pojedinih grupa.	Nakon ucrtavanja položaja i određivanja najbližega izvora, grupe počinju određivati područje sa svim točkama kojima je taj izvor najbliži, uparujući ga s ostalim izvorima, jedan po jedan. Za podjelu cijele mape na područja, učenici otkrivaju da im je potrebna neka vrsta strategije jer s više točaka, stvari postaju komplicirane.

Formulacija (adidaktički) 5 minuta	Nastavnik obilazi učenike i uočava različite ideje pojedinih grupa i najavljuje prezentacije.	Učenici raspravljaju u grupi što treba raditi, što je skup točaka s traženim svojstvom i kako to zapisati.
Potvrđivanje (didaktički i adidaktički) 5 minuta	Nastavnik traži od nekih grupa da prezentiraju što su do sada radili (ako je moguće, jedna grupa koja je crtala kružnice istih polumjera i jedna grupa koja je crtala simetrale dužina.	Učenici predstavljaju svoj rad.
Institucionalizacija (didaktički) 5 minuta	Nastavnik ističe temeljni poučak povezan s problemom: d (A, P) = d (B, P) ako i samo ako je P na simetrali dužine AB. Voronojev dijagram se konstruira pomoću simetrala dužina, pa je to osnova za podjelu. Također se može raspravljati o definicijama simetrale dužine: "skup točaka jednako udaljenih od točaka A i B", i "pravac okomit na dužinu AB koji prolazi polovištem dužine". Izborni dio scenarija: Možete li dokazati poučak? (svi učenici ne osjećaju potrebu za dokazima i smatraju ga izazovom)	Učenici povezuju zapis sa svojom aktivnosti, npr. d(A,P)=d(B,P) opisuje skup točaka P, odnosno pravac (tzv. linija sukoba za točke A i B). d(A,P)<d(B,P) opisuje područje (tzv. područje interesa) i razumiju matematički problem koji se pojavio u njihovoj aktivnosti.
Primopredaja 3 /izborno (didaktički) 5 minuta	IKT se može koristiti za crtanje Voronojevog dijagrama, npr.: https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html. Nastavnik pokazuje kako program radi (nakon ucrtavanja dviju točaka). Podsjetite se/otkrijte da postoji pravac s jednako udaljenim točkama, a ravnina je podijeljena na dva područja. Zatim nastavite s 3 točke i pronađite/otkrijte da postoji jedna točka jednako udaljena od tri dane točke. Vratite se na početni problem i istražite što se događa u posebnim slučajevima. Igrajte se i pronađite lijep neočekivani uzorak s nizom strukturiranih točaka ili, primjerice, istražite koje uzorke	Učenici slušaju i gledaju Voronojev dijagram koji je softver konstruirao. Oni postaju zainteresirani i potaknuti da ga sami koriste i istraže što će se dogoditi u različitim situacijama.

	možete dobiti s 4 točke u različitim položajima.	
Djelovanje (adidaktički) 10 minuta	Nastavnik obilazi učenike, potičući ih da sustavno eksperimentiraju, pomažući im samo ako imaju problema s radom softvera. Ako više učenika ima sličan problem, obratite se cijelom razredu (na primjer, zabilježite na vidljivom mjestu).	Učenici konstruiraju početni problem u softveru, nalaze rješenje i uspoređuju sa svojim crtežom. Također istražuju što se događa u drugim slučajevima s pravilno i/ili nepravilno raspoređenim točkama.
Formulacija (adidaktički) 5 minuta	Nastavnik traži od učenika da pripreme prezentaciju svojih (po mogućnosti najneočekivanijih) zaključaka i potiče ih da pronađu opravdanje za posebne situacije (npr., kada u Voronojevom dijagramu s 4 točke postoji jedna točka koja je od njih jednako udaljena?)	Učenici pripreme dva snimka zaslona, jedan rješenja početnog problema i jedan njihovih lijepih uzoraka (i kako su ga dobili). Oni pokušavaju formulirati opravdanje za njihovo otkriće crtajući kružnice i koristeći formalne oznake za udaljenosti i Talesov ili Pitagorin poučak.
Potvrđivanje (didaktički i adidaktički) 5 minuta	Prezentacije pomažu da učenici potvrde ono što se događa u dijagramima, da usvoje formalne oznake i koriste geometrijsko razmišljanje u različitim podjelama.	Učenici uočavaju vezu između formulacije i potvrđivanja njihovih otkrića.
Institucionalizacija (didaktički) 5 minuta	Opći zaključci o konceptu Voronojevih dijagrama, neki posebni slučajevi i uzorci u tim dijagramima.	Studenti shvaćaju kako su institucionalizirani ciljevi učenja povezani s početnim istraživanjima u kontekstu pustinje .

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	• Neki će učenici početi skicirati linije između navedenih točaka s više ili manje zakrivljenih dijelova i bez jasnih mjesta gdje se tri (ili četiri) linije sijeku. • Neki će učenici crtati kružnice ili odrediti područja crtajući zakrivljene linije. Ti učenici trebaju shvatiti da zakrivljene linije nemaju smisla i da crtanje kružnica služi za pronalaženje točaka s istom udaljenosti do izvora ili centra, ali ne i za pronalaženje granica (iako se mogu koristiti za to). • Neki bi učenici odmah mogli znati što trebaju učiniti i početi s radom. Za njih je ključno raspraviti o tome što se događa u područjima gdje se simetrale sijeku. Sijeku li se istoj točki?

Nastavni listić



Objašnjenje materijala

Priložena je karta pustinje s izvorima vode. Od nastavnika se očekuje da pripremi kartu pustinje za svaku skupinu. Neki od grafičkih elemenata na karti, poput crnih stijena, pokazuju da je učinjen dio matematizacije iz prave pustinje u kartu, ali ne u potpunosti. U slučaju da ne želite ometati učenike s tim elementima, možete ih izbrisati ili zanemariti. Na raspolaganju je interakcija za istraživanje raznih situacija. Unaprijed provjerite je li interakcija operativna, kako ga koristiti kao demonstracijski alat, te odlučite kako i kada ćete ga koristiti s kojim zadatkom/pitanjem za učenike.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

Na početku: Osmislite kako ćete organizirati uvodni problem. Kada ga izložite, stvorite kritične situacije u kojima će neki učenici oklijevati ... Nakon primopredaje 1, nastavnik može odlučiti hoće li ili neće uvesti formalni zapis za udaljenost, ovisno o predznanju učenika i razine koju želite postići.

Okruženje (milieu): Predstavljamo problem s pustinjom i izvorima vode. Možete koristiti drugi kontekst ili drugačiji broj i položaj točaka. Drugi načini formuliranja problema: opišite strategiju kojom se možete odlučiti za što je moguće više pozicija u pustinji do kojeg izvora vode ići. Lijep aspekt ovog problema je taj što milje pruža kriterije za vrednovanje rada studenata. Pobjednička strategija, kao i strategija odlučivanja za sve točke kamo ići, osim onih na linijama sukoba, u skladu je s ciljanim znanjem.

Podijelite kartu tako da je za svaku točku u Sloveniji moguće odrediti koji heliodrom joj je najbliži. (Nadja Marušić, Slovenia)

Trajanje faza se može prilagoditi učenicima.

Za vrijeme faze djelovanja 1:
U slučaju da gotovo svi učenici koriste simetrale dužina i kada je faza djelovanja brzo završena, stavite veći naglasak na elemente u dokazu ili istraživanje pomoću interakcije:

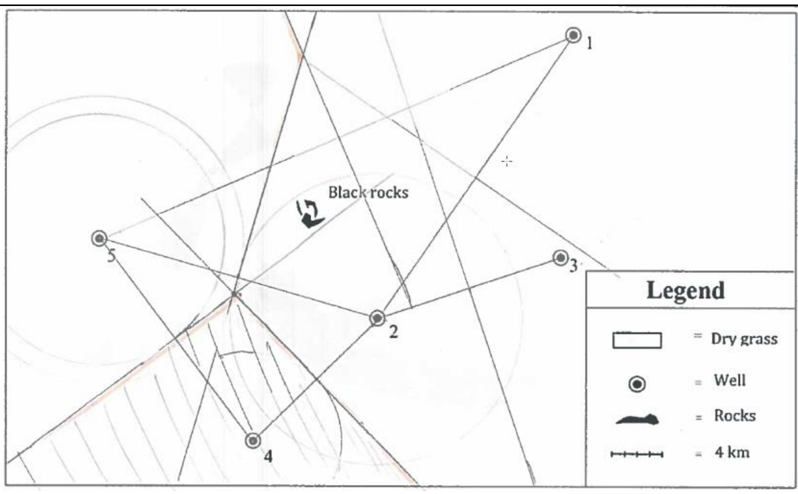
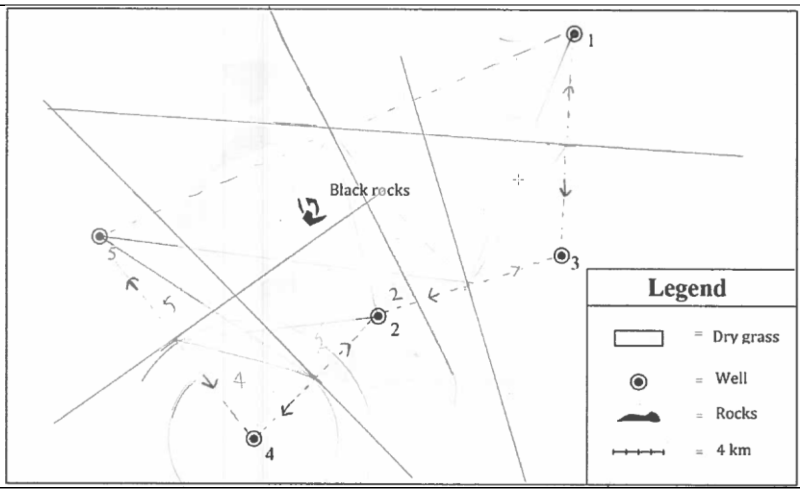
- Vezano za dokaz, možete tražiti da učenici dokažu poučak o simetrali dužine i/ili vezu između točke na Voronojevoj granici i točke na simetrali dužine.
- Možete tražiti da učenici pomoću interakcije nacrtaju različite (zanimljive uzorke), ali to ih može odvesti od cilja - potvrđivanja i institucionalizacije. U tome slučaju predlažemo da učenike vodite jasnim pitanjima kao što su: Istražite moguće situacije s 4 točke (koliko različitih uzoraka možete pronaći? Kada se sve simetrala sijeku u jednoj točki? ...). Izazovite ih da ponude kriterije i/ili dokaze.

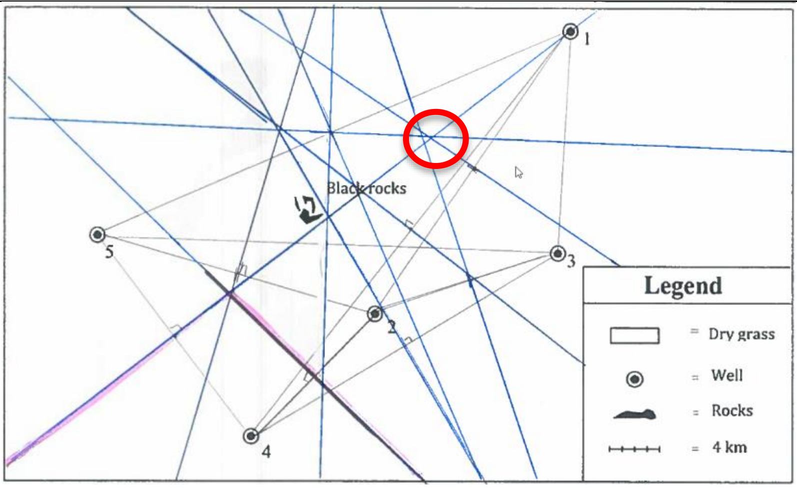
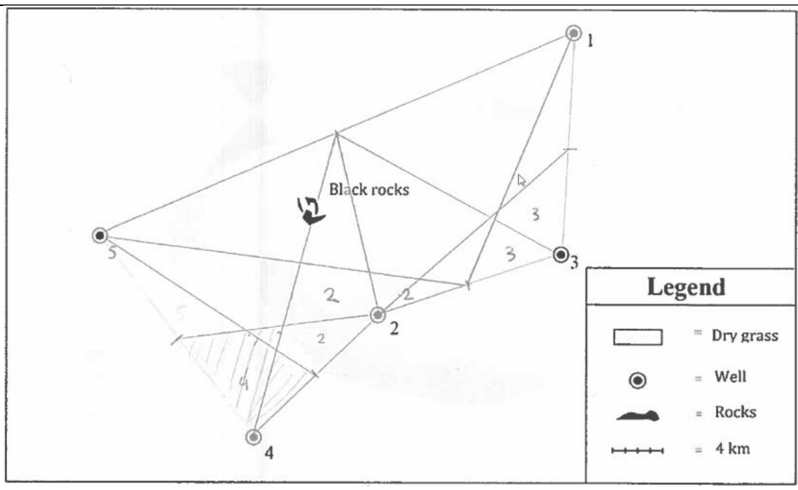
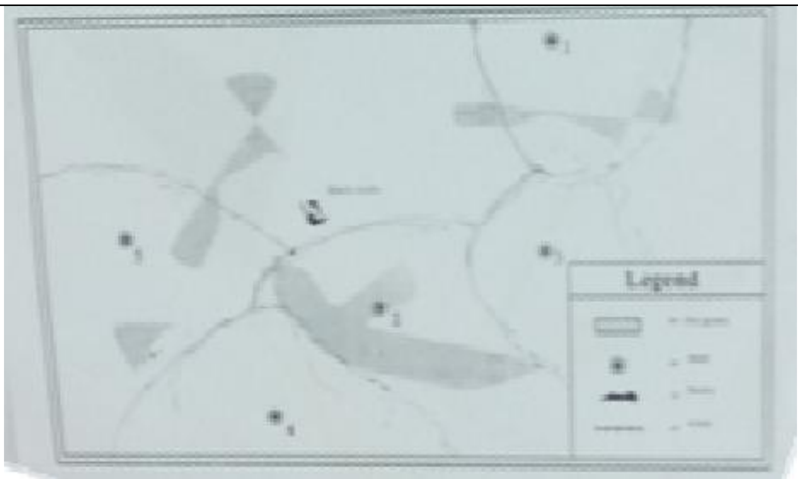
Ukoliko neki učenici nemaju potrebno predznanje ili ne znaju kako početi, nastavnik bi trebao postavljati pitanja kao što su: U kakvoj je vezi ovaj problem s uvodnim problemom (primopredaja 1)? Kako se problem podjele područja između dva izvora može povezati s uvodom? Kako ćete se odlučiti između dvije zadane točke? Zašto? Predložena pitanja treba postaviti samo grupama ili pojedincima ako se čini da većina studenata ima potrebno predznanje. Nastavnik ne bi trebao držati predavanja za svaku grupu odvojeno. Nadalje, nije potrebno nadzirati grupu sve dok ne odgovore na takvo pitanje. Smatrajte to malom devolucijom pojednostavljenog problema i dopustite učenicima da djeluju, formuliraju i potvrde. Ne pomažite im s daljnjim pitanjima i ne sugerirajte odgovor. Ako većina učenika treba razmišljati o tim pitanjima, faza se treba skratiti i razredu se obratiti se plenarno; to znači da je početni problem bio pretežak ili nije bio jasno postavljen, što treba nastojati izbjeći.

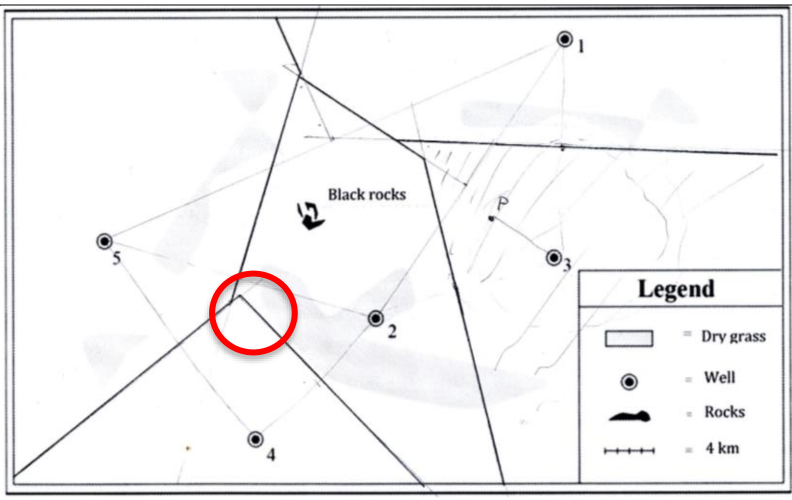
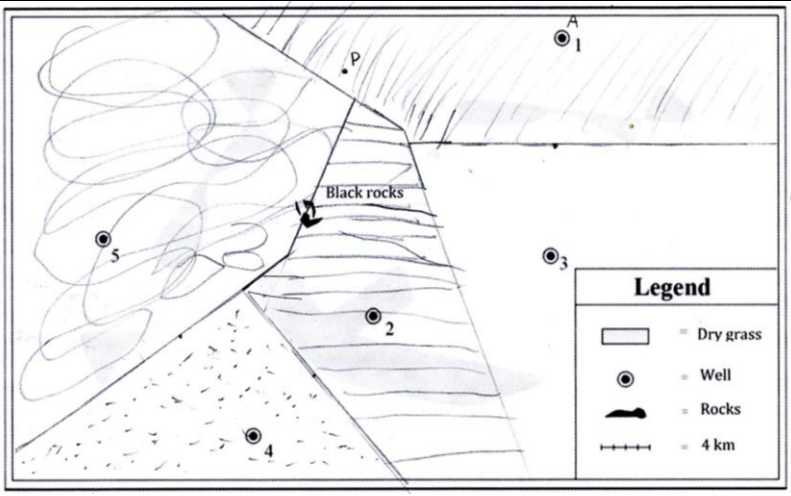
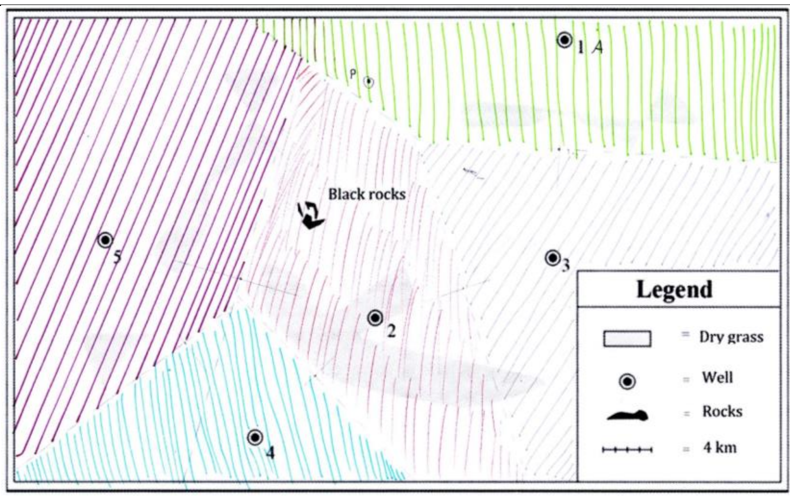
U slučaju da gotovo nijedna od skupina ne koristi simetrale dužina, raspravljajte o predloženim pitanjima plenarno, umjesto da idete od jedne do druge grupe.

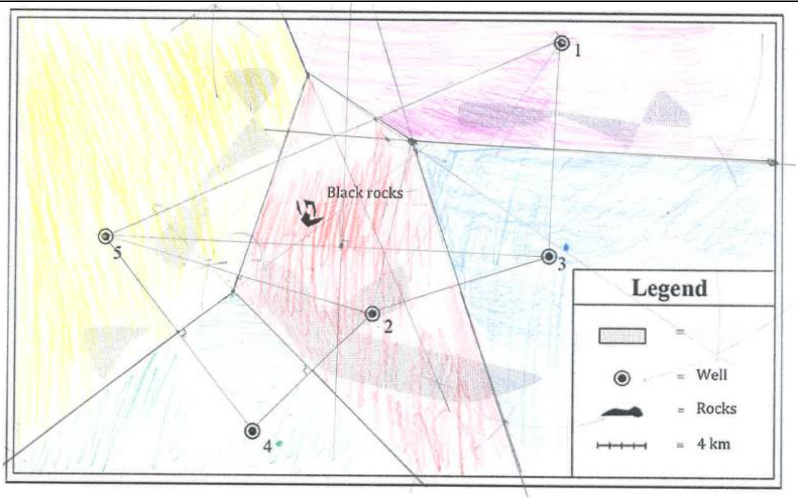
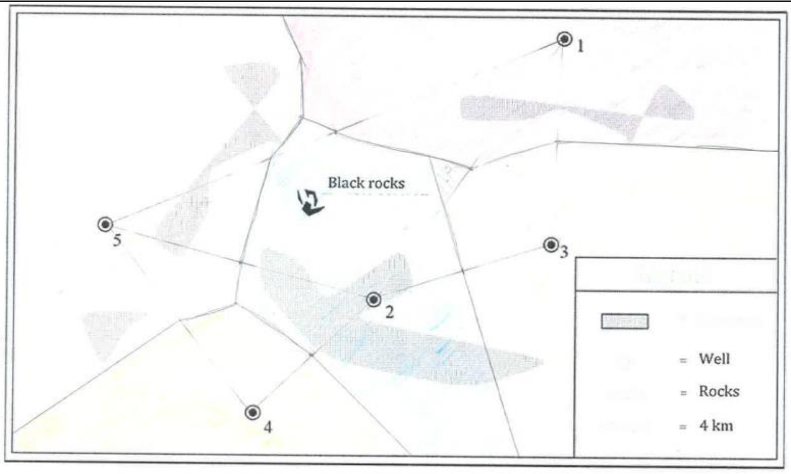
Zapažanja iz prakse

U fazi djelovanja učenici su koristili sljedeće pristupe:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Učenici počinju crtanjem kružnica oko izvora vode. Zatim povezuju točke i nastavljaju sa simetralama dužina. Teško je vidjeti koja područja pripadaju kojemu izvoru i nije sasvim jasno što se događa kada se simetrale (čini se) sastaju.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ovi su učenici također počeli crtanjem kružnica, povezivali su izvore isprekidanim linijama i označavali polovišta. Čini se da nastavljaju s kružnicama koje dodiruju polovišta i crtaju (neke) simetrale dužina.</td>
</tr>
</table>

	*Učenici linijama povezuju izvore vode i crtaju simetrale svih dužina. Teško je razabrati područja koja pripadaju izvorima, a nije jasno ni što se događa na mjestima gdje se simetrale sijeku (npr. što se događa u crvenom krugu).*
	*Učenici povezuju točke i crtaju polovišta. Zatim povezuju polovišta i označavaju područja. Označena područja su gotovo sva točna, ali još uvijek ima nejasnoća. Nema simetrala dužina!*
	*Učenici crtaju područja pomoću zakrivljenih linija bez ikakve matematičke strategije.*

	*Učenici ponovno započinju povezivanjem točaka i crtaju simetrale dužina kako bi označili područja. Zbog vrlo nepreciznog crtanja, trojke simetrala koje bi se trebale sastati u jednoj točki, ne sastaju se. Postavlja se pitanje što se događa u crvenom krugu.*
	*Čini se da su učenici nacrtali nekakve simetrale dužina, ali ih nisu konstruirali precizno (npr. simetrala između 2 i 5 je preblizu točki 2).*
	*Čini se da je ovo savršeno rješenje. Strategija nije vidljiva.*

	*Jasno rješenje s vidljivim tragovima strategije koje su učenici koristili.*
	*Učenici su skicirali dužine "od oka" Priznaju da se ne mogu odlučiti o nekim područjima (vidi upitnik).*

Iz opažanja prepoznajemo četiri razine postignuća:

1. Crtanje zakrivljenih linija "od oka".
2. Korištenje nekog matematičkog argumenta (kružnice ili polovišta) koji ne dovodi do strategije za cijelo područje.
3. Korištenje simetrala dužina bez preciznih konstrukcija ili ne svih simetrala, neprecizno.
4. Konstruiranje područja sa svim relevantnim simetralama dužina i ispravno određivanje svih područja koja pripadaju izvorima vode.

Na temelju predstavljenih strategija u učionici, nastavnik mora odlučiti što se može potvrditi i institucionalizirati za sve učenike. Važno je da se institucionalizacija temelji na učeničkom radu i znanju većine učenika. U svakom slučaju, nastavnik mora izazvati učenike da pronađu načine na koje mogu poboljšati manje učinkovite strategije. Nastavnik izabire učenika koji su koristili različite strategije i dobili različite rezultate da prezentiraju svoj rad i postavlja pitanje cijelom razredu: koje su sličnosti i koje su razlike? Kako poboljšati i biti siguran? Možemo li opisati opću strategiju s kojom se svi slažu?

Matematičke ideje koje je moguće institucionalizirati:

- Linija sukoba između dvije točke jest simetrala dužine koja povezuje te dviju točke.
- Simetrale dužina određenih s tri nekolinearne točke sijeku se u jednoj točki.

Alati za procjenu

Na kraju lekcije ili ubrzo nakon toga, sljedeći se zadaci mogu koristiti za kratku provjeru znanja usvojenog tijekom provođenja scenarija:

1. Zadajte situaciju s tri točke i linijama sukoba te novu četvrtu točku i tražite od učenika da rekonstruiraju podjelu ravnine.

2. Zadajte situaciju s tri točke i linijama sukoba i tražite ih da stvore situaciju s četvrtom točkom tako da rezultat nema jedno ili dva izolirana područja. Ako jedna od traženih situacije nije moguća, učenici trebaju argumentirati zašto.

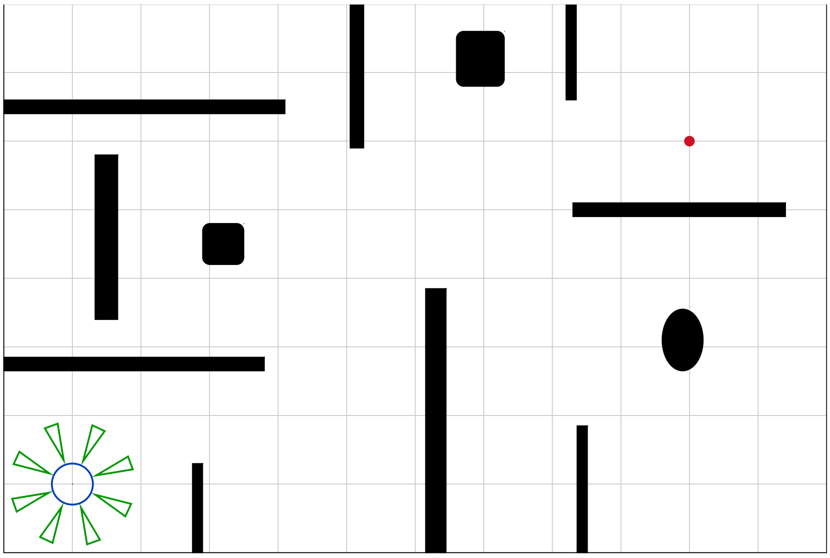
3. Zatražite da učenici opisuju i ilustriraju kako konstruirati podjelu ravnine s danim točkama.

4. Učenici trebaju u interakciji istražiti Voronojeve dijagrame s tri točke i objasniti zašto (gotovo) uvijek vide podjelu na tri područja.

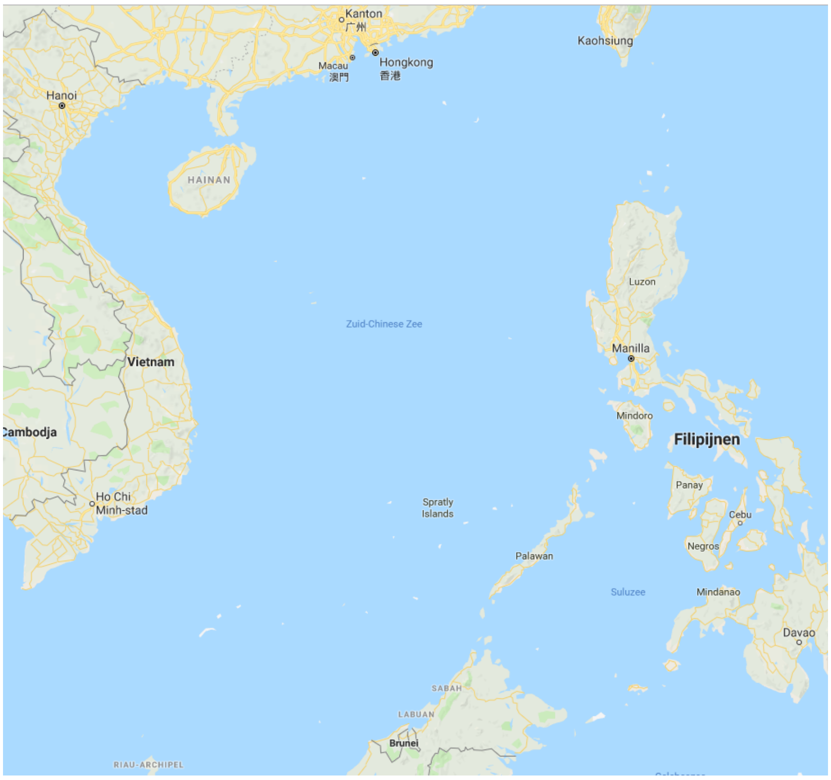
Preporuke za daljnje probleme vezane za linije sukoba

Nekoliko situacija iz stvarnoga života u kojima (jednake) udaljenosti do objekata igraju ulogu su teritorijalna podjela na moru i navigacija robota, npr. pronalaženje optimalne putanje za sigurno kretanje ili navigacija morem uz izbjegavanje radara ili neprijateljske paljbe.

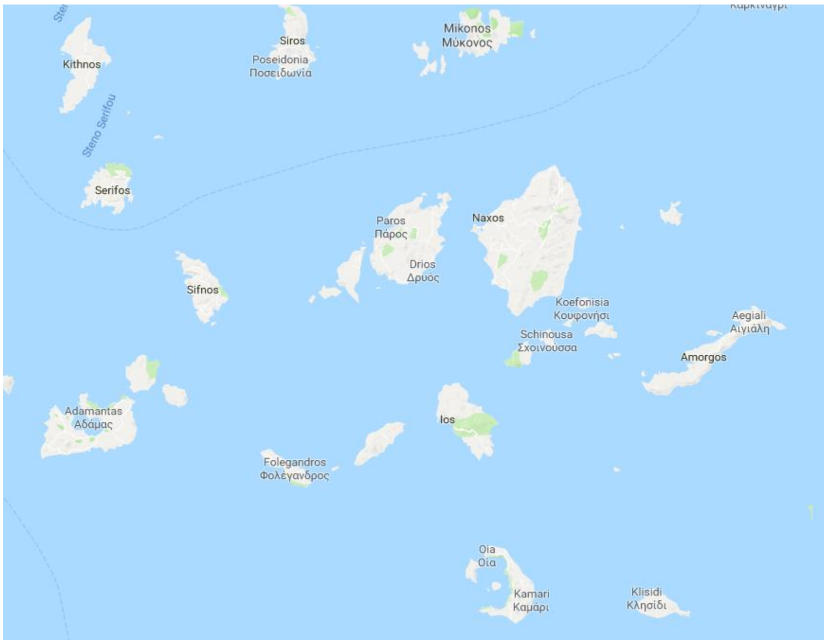
1. Robot se treba kretati po stanu. Koja je optimalna putanja? Kako robot može odrediti optimalnu putanju za kretanje po stanu?



2. U Kineskom moru postoji nekoliko otoka. Ti su otoci predmet teritorijalnih sukoba: kako povući granice na moru kako bismo odredili koji dio mora pripada kojoj državi? (relevantno i zbog resursa koji se mogu iskorištavati)



3. Ciklade su skupina otoka u Egejskom moru. Morski je teritorij podijeljen na devet regionalnih jedinica južnoegejskog područja najvećim otocima Andros, Kea-Kythnos, Miloš, Mikonos, Naxos, Paros, Thira, Syros i Tinos. Kako biste podijelili more s otocima na donjoj slici?



4. Na sljedećoj slici je prikazana teritorijalna podjela Sjevernog mora. Opišite kako biste poduprli moguću podjelu mora između okolnih država.

Načela i RME perspektiva u scenariju

Relevantnost I primjenjivost

Razmatramo sljedeće tri perspektive:

- *Stvarni život*: ovaj kontekst povezuje učenička iskustva s granicama koje dijele neko područje i pojam najbližeg. Koncept Voronojevih dijagrama koristi se u mnogim različitim kontekstima bliskim interesima učenika, primjerice nogometu:

- *Svijet rada*: Voronojevi dijagrami bitan su koncept u mnogim disciplinama, na primjer u biologiji (modeliranje staničnih struktura), u hidrologiji (izračunavanje količine oborina u područjima), u ekologiji (obrasci rasta šuma), u kemiji (položaji jezgara u molekulama) i u računalnoj znanosti (prostorno planiranje i upravljanje robotima).
- *Daljnja istraživanja*: Prirodni nastavak scenarija je dokaz poučka o simetrali dužine: točka leži na simetrali dužine AB ako i samo ako je ta točka jednako udaljena od A i B (i stoga leži na Voronojevoj granici). Učenici također mogu istražiti različite probleme podjele geografske karte ili pronalaženja optimalnog puta za navigaciju robota. Drugi smjer je proučavanje tetivnih četverokuta i drugih poučaka i svojstava koja se temelje na simetrali dužine (primjerice, možete li rekonstruirati trokut kojemu su zadane simetrale stranica?). Mogući nastavak je provedba scenarija Linije sukoba - parabola.

Istraživačke vještine

Učenici istražuju situaciju iz stvarnog života i uspoređuju različite strategije. Rješenje se oslanja na vizualizaciju i ponovno otkrivanje koncepta simetrale dužine. Kako bi razvili pobjedničku strategiju, učenici moraju smisliti kontekst i koristiti geometrijski jezik i notaciju.

Pred učenike je postavljen izazov da kritički promišljaju o stavovima i brane svoje razmišljanje u slučajevima kada se čini da se susreću/sijeku tri ili više simetrala. Na kraju, učenici moraju na jasan način predstaviti svoje rezultate i komunicirati o svojim strategijama.

Potencijal za slijed lekcija

Ovaj je scenarij prirodan uvod u proučavanje linija sukoba u različitim situacijama u geometriji ili u proučavanje tradicionalnijih tema u geometriji vezanih uz simetrale dužina, trokute, tetivne četverokute itd.

- *Predznanje*: Za početak istraživanja učenici bi trebali znati provesti geometrijske konstrukcije pomoću trokuta i šestara pri istraživanju problemske situacije i podjele ravnine. Za dokaz bi učenici trebali znati nejednakost trokuta. Dokazi i uspoređivanje različitih strategija zahtijevaju od učenika da apstraktno razmišljanje.

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija*: U scenariju se od učenika očekuje da matematički modeliraju kontekstualni problem. Pri rješavanju problema učenici moraju uočiti koji su podaci relevantni u situaciji (primjerice primijetiti da su crne stijene, suha trava i stvarne udaljenosti nevažne), a zatim modelirati problem koristeći geometrijske pojmove: točke, linije, udaljenosti, bliže i dalje, simetrala dužine i podjela ravnine. Ova aktivnost modeliranja dovodi učenike u svijet matematike gdje se mogu pojaviti nova pitanja i novi problemi.
- *Vertikalna matematizacija*: Provedba scenarija polazište je za daljnja matematička istraživanja i generalizaciju. Ovisno o razini i interesu učenika, jedno od novih pitanja koje zahtijevaju dokaz jest da točke jednako udaljene od dvije fiksne točke leže na simetrali dužine određene tim dvjema točkama te da razmišljaju o konstrukciji simetrale dužine. Nadalje, stvara se potreba za istraživanjem uzoraka koji se pojavljuju s tri točke. Njihove simetrale dužina sijeku se u jednom trenutku. S četiri se točke pojavljuju drugi obrasci. Iz tih pitanja nastavnik može nastaviti s

temama iz udžbenika koje koriste poučak o simetrali dužine za trokute kao i daljnja istraživanja u geometriji povezana s tetivnim poligonima. Drugi smjer za nastavne lekcije može biti upotreba koncepta linije sukoba za istraživanje definicije i karakteristika parabola (vidi MERIA scenarij Linije sukoba - parabola).

Zaključak

Ovaj scenarij ilustrira kako problem u kontekstu pustinje, koji je bogat i dostupan učenicima potiče osmišljavanje strategija rješavanja i prikazivanja kao što su koncentrične kružnice, polovišta i linije razdvajanja uz korištenje jezika poput "biti najbliži". Ovi elementi mogu se koristiti za nadogradnju matematike simetrala dužina i podjelu ravnine kroz procese horizontalne i vertikalne matematizacije. Učeći ove pojmove kroz primjenu, učenici lako mogu uvidjeti potencijal njihove primjene i u drugim situacijama.

MERIA Modul “Oglas za posao”

Statistika: Mjere srednje vrijednosti

Scenarij poučavanja

Ciljano znanje	Odrediti, razlikovati, odabrati mjeru srednje vrijednosti (aritmetička sredina, mod, medijan) i odlučivati na temelju mjera srednje vrijednosti.
Širi ciljevi	Analiza podataka. Prikaz podataka pomoću histograma i drugih grafičkih prikaza. Računanje statističkih mjera sa ili bez tehnologije. Razumijevanje problema i pogrešnih predodžbi koje se pojavljuju u statistici. Istraživačke vještine: izrada i vrednovanje odluka utemeljenih na argumentima, uspoređivanje različitih načina razmišljanja, tumačenje podataka i formuliranje zaključaka. Interdisciplinarne vještine: studenti mogu povezati statističke probleme sa svakodnevnim situacijama i situacijama u gospodarstvu. Uče cijeniti korištenje matematičkog rasuđivanja pri odlučivanju.
Potrebno matematičko predznanje	Izračunavanje aritmetičke sredine. Osnovne vještine u korištenju računala: manipuliranje proračunskim tablicama programa Excel ili slično (npr. Google tablice ili OpenOffice); korištenje osnovnih naredbi za izračunavanje zbroja i prosjeka; grafički prikaz podataka (histogrami, točkasti dijagram ...)
Razred	Dob 15-18 g, 1.- 4. razred srednje škole (nakon uvođenja aritmetičke sredine)
Vrijeme	45 minuta. (može se produljiti na 90 minuta)
Potreban materijal	Računalo, odgovarajući računalni program (Excel, Google tablice, OpenOffice, GeoGebra ...). Skup podataka, koji se u nastavku spominje kao "platna lista". Skup podataka je dodan scenariju kao xlsx datoteka.

Problem:

Tvrtke traže nove zaposlenike. Oglasom žele privući buduće zaposlenike pa su u oglas stavili podatak o prosječnoj mjesečnoj plaći zaposlenika tvrtke. U materijalu (datoteka Job_advertisement_data.xlsx) imate platne liste triju tvrtki i za svaku od njih izračunatu prosječnu mjesečnu plaću.

U kojoj tvrtki biste tražili zaposlenje? Obrazložite svoju odluku matematički.
Pri tome razmotrite: Koja plaća dijeli zaposlenike u dvije skupine iste veličine? Koja plaća najbolje reprezentira platnu listu i na koji način može utjecati na donošenje odluke?

Faza	**Postupci nastavnika, uključujući upute**	**Postupci i reakcije učenika**
Primopredaja (didaktički) 5 minuta	Nastavnik/ca predstavlja problem učenicima i daje im link na *Excel listu* s podacima (3 platne liste). Upućuje ih da koriste tehnologiju (alate za grafički prikaz i za analizu podataka) pri analizi, uspoređivanju podataka i donošenju svoje odluke. Nastavnik/ca organizira učenike u skupine od 2-3 učenika.	Učenici slušaju i postavljaju pitanja.
Akcija (adidaktički) 20 minuta	Nastavnik/ca obilazi učionicu i promatra, pomažući samo u slučaju nekih tehničkih poteškoća (ali ne s načinom korištenja programa). Bilježi različite strategije koje učenici koriste.	Učenici unutar svojih grupa diskutiraju koju tehnologiju i koju "matematiku" će koristiti te kako će organizirati svoj rad.
Formulacija (adidaktička) 5 minuta	Nastavnik/ca traži učenike da organiziraju svoj rad i formuliraju odluke.	Učenici organiziraju i sažimaju svoj rad.
Potvrđivanje (didaktički / adidaktički) 10 minuta	Nastavnik/ca odabire nekoliko učenika da ukratko prezentiraju svoja rješenja – odluke.	Učenici ukratko obrazlažu svoj rad. Ostali učenici slušaju i diskutiraju.
Institucionalizacija (didactical) 5 minuta	Sažima rad učenika i generalizira: Kako odabrati broj koji najbolje reprezentira skup podataka, odnosno navodi mjere srednje vrijednosti - aritmetičku sredinu, medijan i mod te kako se određuju. Naglašava da ne postoji jedinstveni odgovor na dani problem, ali se u rješenju treba navesti koje nam različite informacije daje svaka od mjera srednje vrijednosti. Utvrđuje njihove prednosti i nedostatke, utjecaj podataka na aritmetičku sredinu, medijan i mod.	Učenici slušaju i postavljaju pitanja.

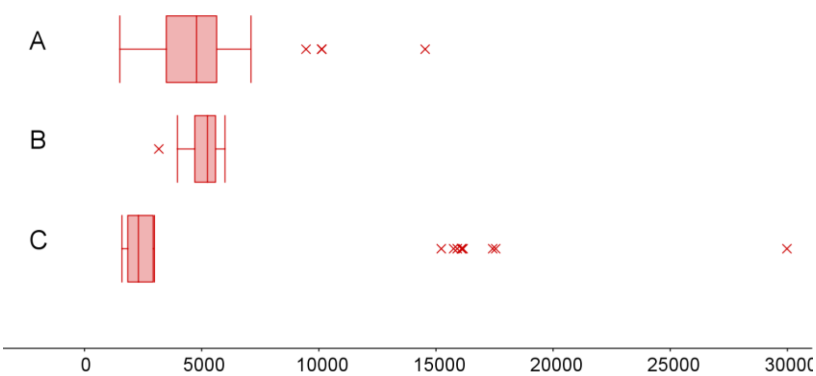
Mogući načini da učenici realiziraju ciljano znanje

- Aritmetička sredina i medijan:
  - Možda će neki učenici odmah znati što treba raditi (ako su negdje već čuli za pojam medijana i moda) i započeti s analizom i grafičkim prikazom podataka uz korištenje tehnologije te pomoću poznatih alata za analizu podataka izračunati aritmetičku sredinu (zapravo provjeriti, jer informacija o aritmetičkim sredinama postoji u tablici, ali ne i formula za izračun) i medijan za svaku platnu listu. Oni će usporediti sve tri liste i uočiti utjecaj velikih, udaljenih podataka na aritmetičku sredinu i medijan, te donijeti odluku koju tvrtku izabrati.

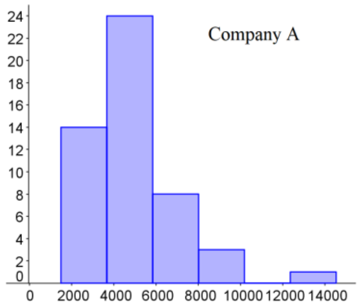
	Tvrtka A	*Tvrtka B*	*Tvrtka C*
Arit. sredina	4939,98	5138,04	4992,6
Medijan	4774,5	5241	2293,5
Raspon	13038	2826	28394
Minimum	1500	3165	1593
Maksimum	14538	5991	29987

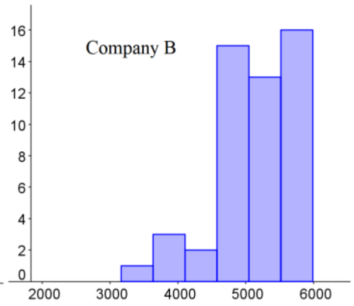
  - Neki će učenici promatrati tablice, sortirati podatke i tako sami otkriti kako pronaći traženi podatak u sredini (medijan). Ovi će učenici uočiti da među sortiranim podacima u tablicama, osobito u platnoj listi C, postoje neki veliki podaci (u odnosu na ostatak skupa podataka) i istražiti što se događa s aritmetičkom sredinom i medijanom sa i bez njih. Kao posljedicu toga, oni će naučiti prednosti i nedostatke svake od mjera srednje vrijednosti

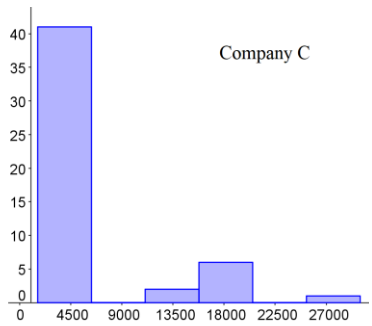
  - Neki će učenici samo grafički prikazati podatke s platnih lista i na osnovu prikaza donijeti zaključke. Ti će učenici možda koristiti brkate kutije (dijagram pravokutnika, box and whisker plot) iz kojih se može očitati medijan, kao i ostali potrebni podaci te donijeti svoju odluku. Također, veliki ili udaljeni podaci se lako uoče u brkatoj kutiji pa mogu odrediti njihov utjecaj na aritmetičku sredinu i medijan.



  - Neki će učenici nacrtati histograme podataka i uočiti udaljene podatke. Promatrajući histograme, možda će dobiti ideju što se dešava s prosjekom ako se veliki podaci zanemare.







- Kako bi učenici mogli otkriti mod, nastavnik može potaknuti zaokruživanje podataka ili grafički prikaz podataka u obliku koji uključuje raspodjelu podataka po razredima (npr. histogram). Nakon toga, oni će izračunati mod za svaku platnu listu (ili pročitati vrijednost iz npr. histograma) i popraviti svoju prijašnju odluku o tome koju tvrtku odabrati, bez obzira na koji su način određivali aritmetičku sredinu i medijan.

Objašnjenje materijala

Učenici će dobiti platne liste za 50 zaposlenika triju tvrtki i za svaku od njih izračunatu prosječnu mjesečnu plaću. Podaci nisu sortirani. Od učenika se očekuje da dođu na ideju sortiranja dobivenih podataka i prikažu ih na neki način grafički.

Kako bi učenicima zadatak bio zanimljiviji, tvrtke se mogu nazvati atraktivnim imenima ili se zadatak može predstaviti u obliku oglasa koji su tri tvrtke objavile u novinama.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

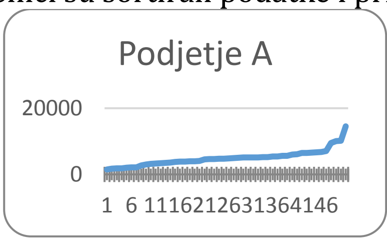
Skup podataka o plaćama učenici mogu dobiti u digitalnom obliku ili i u digitalnom i papirnatom obliku. Učenike možemo uvesti u problem s podacima u papirnatom obliku, ali samo kao temelj za početno razmišljanje o problemu i u kojem smjeru treba krenuti, jer su u ovom scenariju učenici obavezni koristiti tehnologiju.
Varijacije su moguće u *organizaciji rada u razredu:* rad u paru ili točlanim skupinama. Veće se skupine ne preporučuju zbog korištenja tehnologije.
Moguća je i mala varijacija u *vremenu* i to u fazi djelovanja i formulacije.
Kako bi se držali ciljanog znanja, ne preporučuje se mijenjati zadani skup podataka.
U slučaju da učenici imaju poteškoća u korištenju programa Excel ili druge tehnologije za sortiranje i rad s podacima, skupovi podataka se mogu unaprijed sortirati. Druga je mogućnost da se na jednom od sati koji prethode ovoj aktivnosti napravi kratki uvod u proračunske tablice (Excel).

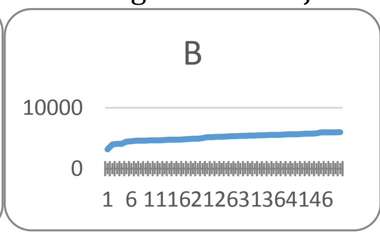
Ako su učenici već upoznati s mjerama srednje vrijednosti, moguće je proširiti ciljano znanje na:

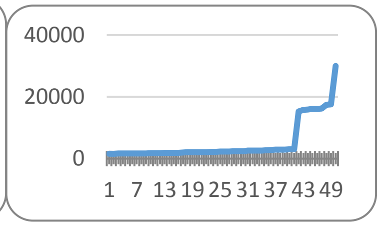
- Uvođenje mjera raspršenja (varijance)
- Kvartile kao dio mjera raspršenja
- Grafički prikaz (brkata kutija)

Zapažanja iz prakse

Učenici su sortirali podatke i prikazali ih grafički na sljedeći način:

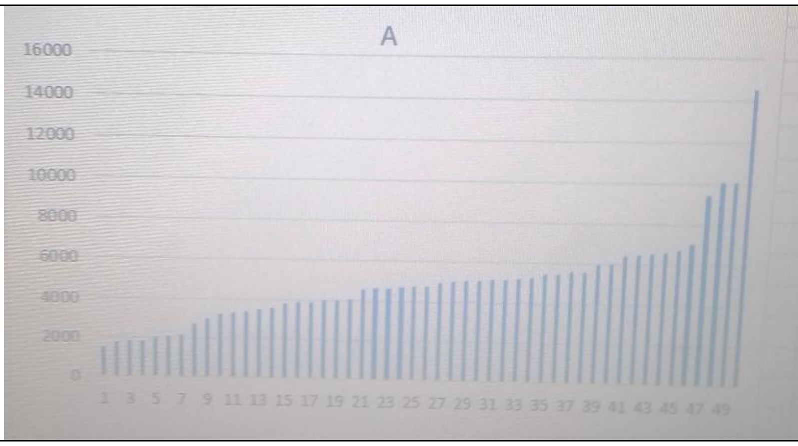




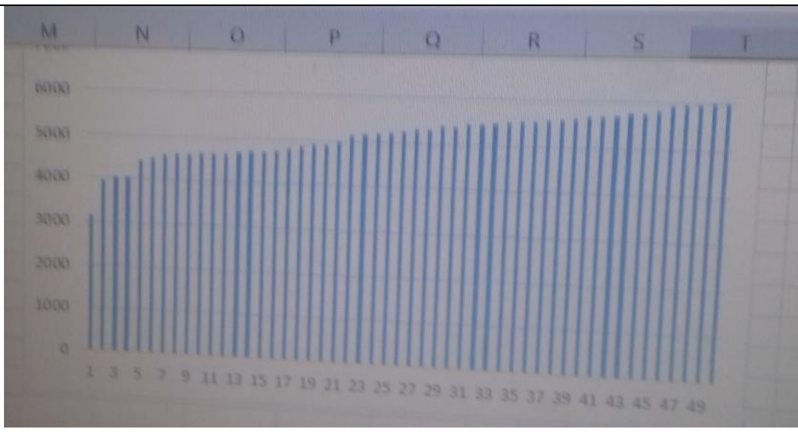
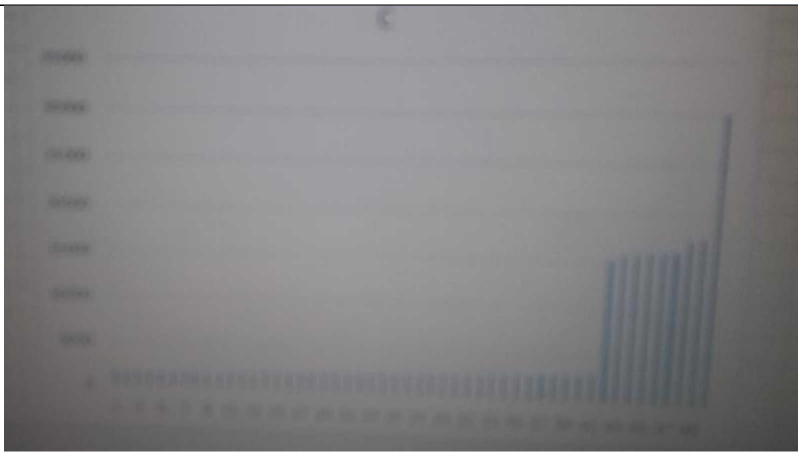
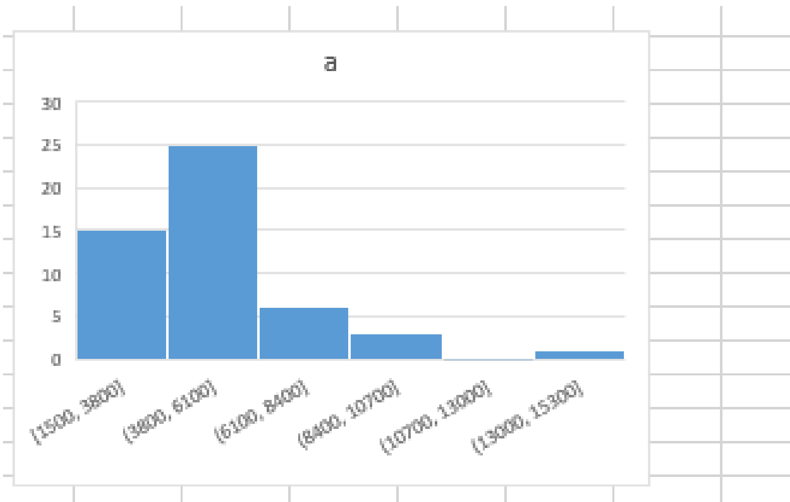


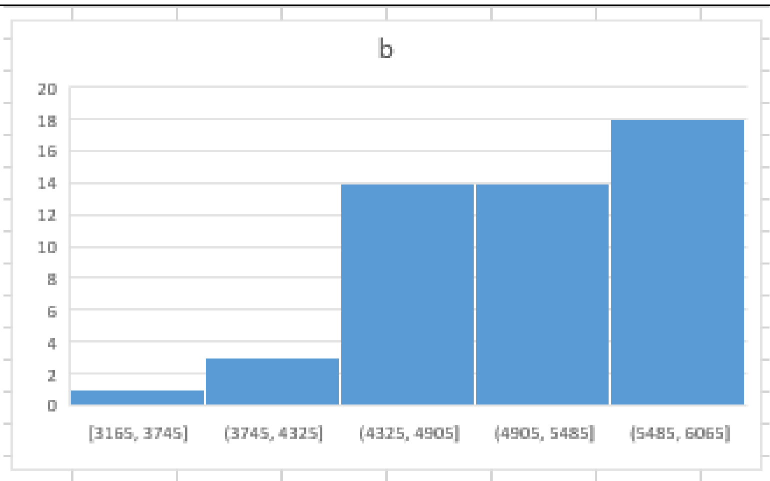
Na *x* osi su prikazani zaposlenici od 1. do 50., a na *y* osi plaće zaposlenika.

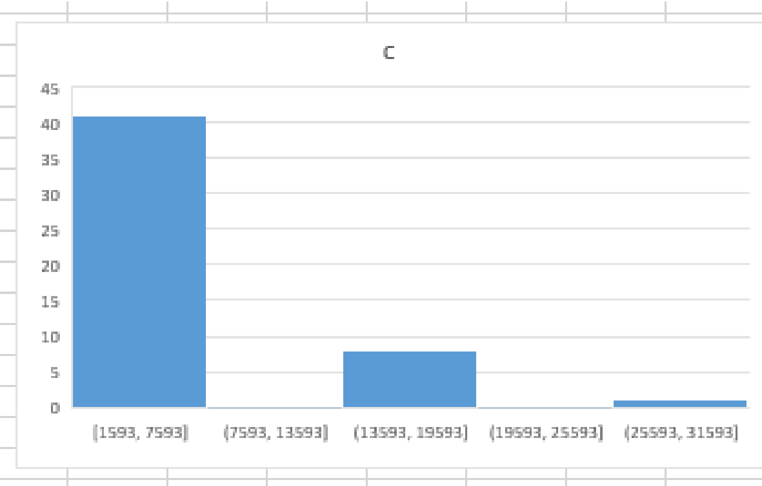
I na ostalim grafičkim prikazima su zaposlenici na horizontalnoj osi, a plaće na vertikalnoj osi, a razlog je tome vjerojatno taj što sam program Excel nudi takav prikaz. Također su dane i informacije o razlikama između tri tvrtke.



Grafički prikaz plaća u tvrtki A koji jasno pokazuje jednu ekstremnu vrijednost.

	*Sličan je grafički prikaz za tvrtku B koji pokazuje konstantnije raspršenje s nekoliko niskih plaća. Jedan je učenik dao prednost ovoj tvrtki za prvi posao jer se odmah na početku dobro zarađuje.*
	*Graf za tvrtku C pokazuje veliki broj niskih plaća, nekoliko viših i jednu ekstremnu vrijednost. Jedan se ambiciozni učenik opredijelio za tvrtku C.*
	*Učenica ima neko predznanje u analizi podataka. Grupirala je podatke za svaku tvrtku i prikazala ih koristeći histogram. Za prikaz podataka i donošenje odluke dodatno je koristila i "brkatu kutiju".*


b
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
[3165, 3745]
(3745, 4325]
(4325, 4905]
(4905, 5485]
(5485, 6065]


c
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
[1593, 7593]
(7593, 13593]
(13593, 19593]
(19593, 25593]
(25593, 31593]

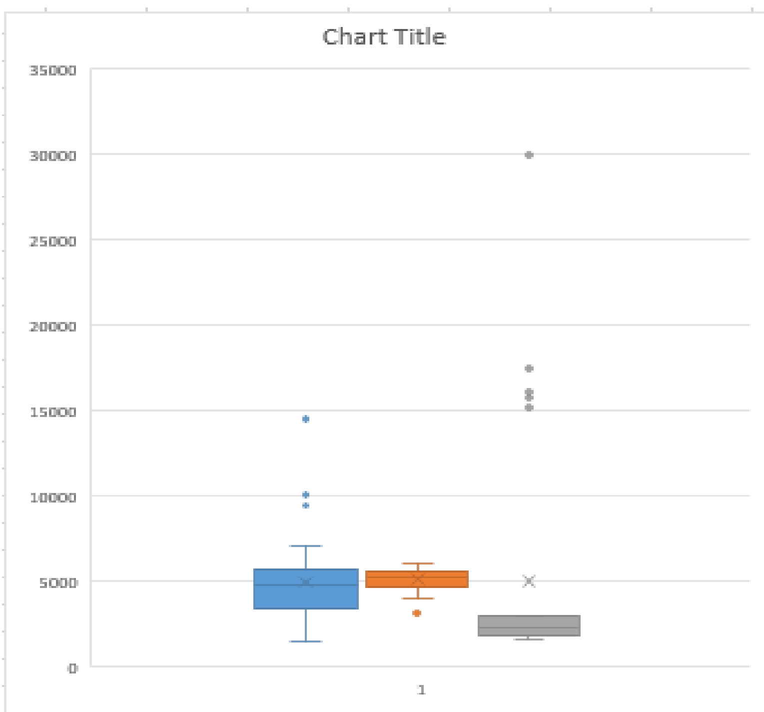


Chart Title
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
1

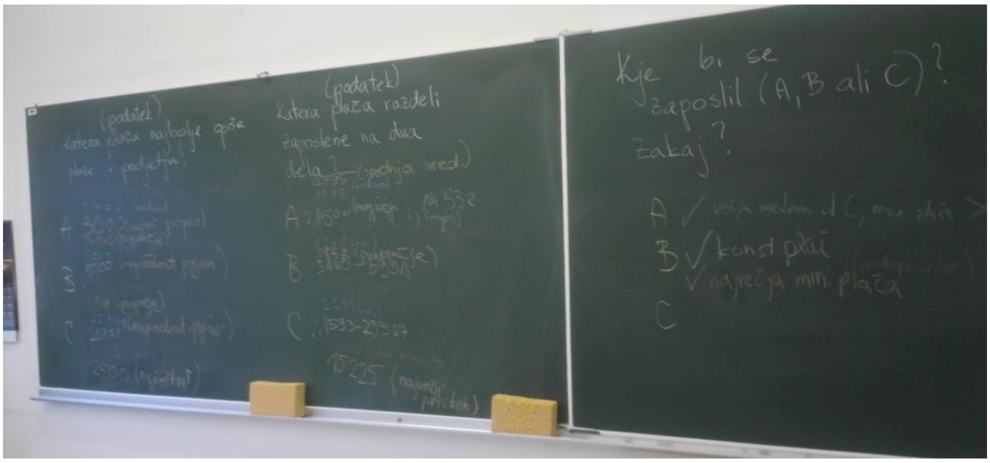
Kada su učenici trebali formulirati rezultate svog računanja mjera srednje vrijednosti, dobili su različite brojeve, primjerice:

odločili smo se za B, ker je najmanjša plača 3165. Najbližja povprečni plači: – A: 5064 → A: najbolj opredeli – B: 5160 B: – C: 2979 C:	*Učenici su gledali plaću koja je u danom skupu plaća najbliža izračunatoj srednjoj vrijednosti. Za njih je to broj koji najbolje reprezentira taj skup podataka. Njihov je odabir tvrtka B jer je najmanja plaća u toj tvrtki najveća u odnosu na najmanje plaće u ostalim tvrtkama..*
Povprečna plača: PODJETJE A: 4940 € PODJETJE B: 5138 € PODJETJE C: 4992 € Kje bi se zaposlili? V podjetju B Zakaj? Ker je manj odstopanja od povprečne plače.	*Učenici ponovo gledaju dane prosječne vrijednosti i njihov je izbor tvrtka B jer se plaće u toj tvrtki najmanje razlikuju od srednje vrijednosti.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	31	4563			13	4998			3	2115
26	18	4632			6	5160			9	2115
27	11	4635			29	5172			12	2205
28	21	4698			38	5208			38	2238
29	15	4755			39	5223			24	2271
30	4	4794			14	5259			23	2316
31	44	4953			17	5310			14	2343
32	34	5064			19	5331			36	2349
33	28	5094			23	5406			17	2355
34	36	5118			24	5406			37	2367
35	24	5133			43	5445			7	2595
36	8	5166			44	5451			15	2631
37	1	5211			31	5487			1	2646
38	13	5265			22	5511			29	2646
39	35	5454			33	5538			46	2757
40	39	5457			27	5550			27	2799
41	37	5580			16	5568			34	2871
42	9	5634			9	5586			31	2925
43	41	5991			20	5637			6	2940
44	17	6063			28	5670			21	2973
45	12	6459			30	5673			30	2979
46	49	6531			47	5700			39	15225
47	25	6585			18	5766			16	15753
48	22	6660			3	5778			22	15909
49	47	6759			32	5826			48	16086
50	45	7101			41	5943			8	16104
51	42	9450			11	5967			47	16158
52	43	10113			36	5976			25	17421
53	14	10131			4	5979			13	17550
54	19	14538			15	5991			33	29987
55	median	4775			median	5241			median	2294

Učenici su naglasili plaće koje dijele platnu listu na dva jednaka dijela i odredili medijan koristeći Excel. Oni biraju tvrtku B jer ima najveći medijan i najveću prosječnu plaću.

Nastavnik koristi ove različite izračune za uspoređivanje i diskusiju, pred pločom:



Alati za procjenu

1. Odredite aritmetičku sredinu, medijan i mod za sljedeće skupove podataka:
   a) 4, 4, 4, 5, 6, 6, 20 b) 4, 4, 4, 5, 6, 19
   Odgovor:
   a) A. sredina = 7, Medijan = 5, Mod = 4
   b) A. sredina = 7, Medijan = 4.5, Mod = 4

2. U jednoj tvrtki gotovo svi radnici imaju istu plaću osim rukovoditelja koji zarađuje 10 puta više. Koja je najbolja mjera srednje vrijednosti? Obrazložite.
   Odgovor: Medijan zbog ekstremne vrijednosti (velike plaće) .

3. Sljedeći brojevi su rezultati testa (od 100 mogućih bodova) za 45 učenika.

59	32	81	70	71	72	83	92	95
61	69	59	91	84	73	74	66	77
70	67	65	58	59	78	93	95	50
62	67	92	65	54	90	92	79	62
75	83	98	71	83	67	59	46	64

a) Odredite aritmetičku sredinu, medijan i mod skupa podataka.
b) Što mislite, je li medijan dobro reprezentira dobivene rezultate? Obrazložite!
c) Vaš je rezultat 58. Koju ćete mjeru srednje vrijednosti odabrati za usporedbu prilikom prezentiranja svog rezultata vašim roditeljima?

Odgovor:
a) Mod: 59, Medijan: 71, A. sredina: 72.3
b) Dobra je mjera medijan, ako se uzme da su 32 boda ekstremni, udaljeni podatak.
c) Ako učenik hoće prikazati roditeljima da njegov rezultat nije daleko od srednje vrijednosti, najbolja je mjera mod.

4. Želite odabrati mjesto za ljetni odmor, a jedine podatke koje imate su mjere srednjih vrijednosti dnevnih temperatura u C°, mjerenih 90 ljetnih dana u podne:

	A	B	C
Arit. sredina	32.5	32	33
Medijan	26	32	26
Mod	20	31	26

Što nam ove vrijednosti govore o klimi na svakoj od lokacija?

Preporuke za daljnje probleme vezane uz mjere srednje vrijednosti

Sljedeći bi problem mogao biti sličan početnom: Dane su liste s ocjenama nekoliko učenika. Koja mjera srednje vrijednosti najbolje opisuje njihove ocjene?
Ova bi aktivnost mogla voditi više prema korištenju grafičkih prikaza kao što su brkata kutija, histogram i sl. uključujući i mjere raspršenja.
Isto tako, učenici mogu dobiti, umjesto tablica, grafičke prikaze plaća sa sličnim zadatkom kao u ovom scenariju. Također, od učenika se može tražiti da sami pokušaju pronaći situacije u kojima neka od mjera - aritmetička sredina, medijan ili mod najbolje reprezentira tu situaciju.

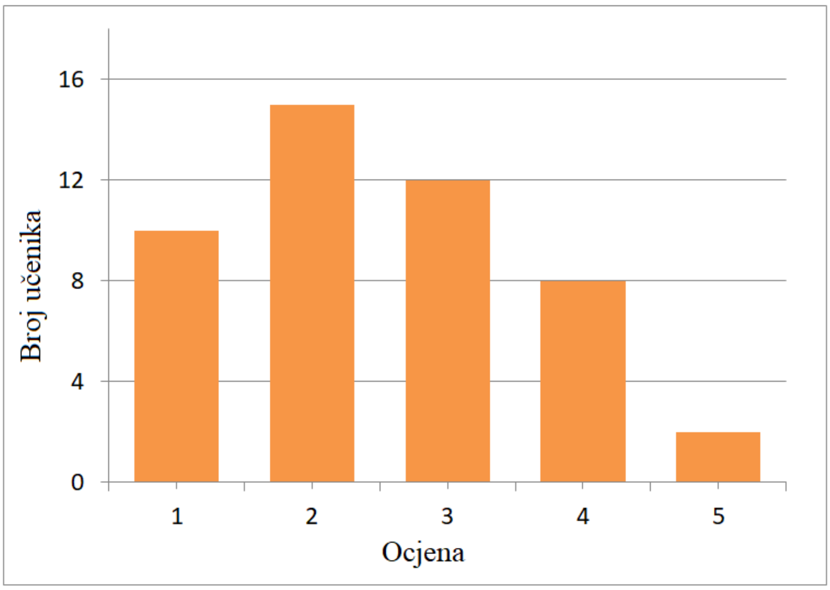
Primjeri:

1. Morate donijeti odluku kako ići u školu: autobusom, vlakom ili biciklom.
Pronašli ste neke podatke o gradskom prijevozniku. Neki su od podataka o potrebnom vremenu u minutama(zaokruženo na cijeli broj) od škole do kuće dobiveni na osnovu iskustva. Na sreću, niti škola niti kuća nisu daleko od autobusne i željezničke stanice. Podaci o potrebnom vremenu su prikupljani 12 mjeseci. Pored ovih podataka možete koristiti i neke druge varijable (kao cijena i sl.). Donesite odluku o načinu prijevoza do škole i obrazložite.

		Autobusom	Vlakom	Biciklom
Ponedjeljak	a. sredina	20	12	19
	medijan	14	13	19
	mod	15	12	19
Utorak	a. sredina	19	18	19
	medijan	13	12	18
	mod	14	13	18
Srijeda	a. sredina	18	12	18
	medijan	12	13	17
	mod	14	12	18
Četvrtak	a. sredina	19	14	18
	medijan	12	12	18
	mod	15	13	18
Petak	a. sredina	24	19	20
	medijan	20	14	19
	mod	19	15	20

Učenici bi trebali diskutirati o ovoj situaciji s vlastitog stanovišta. Mogu primjerice reći da će sve dane osim petka ići autobusom ili da odluka ovisi o godišnjem dobu. Mogu pretpostaviti da autobusi voze češće nego vlakovi ili da kod bicikla nema čekanja. Također mogu uzeti u obzir i cijene.

2. Sljedeći graf prikazuje broj učenika koji su postigli određenu ocjenu.



a) Koja se jedina mjera srednje vrijednosti može lako očitati s grafa?
b) Odredite sve mjere srednje vrijednosti i obrazložite postupak.
c) Opišite i komentirajte rezultate testa koristeći mjere srednje vrijednosti.

Načela i RME perspektiva u scenariju

U ovom scenariju mjere središnje tendencije proizlaze iz analiziranja i organiziranja eksperimentalnih podataka o plaćama.
Učenje kroz primjenu omogućuje učenicima bolji uvid o mogućnostima primjene svojih statističkih znanja i vještina. Ovaj scenarij razvija sposobnosti argumentiranja statističkih rezultata i njihovu kritičku interpretaciju.
Na nastavnim satima koji slijede moglo bi se dodatno razraditi mjere središnje tendencije u drugim kontekstima i uključiti mjere raspršenja te grafičke prikaze poput brkate kutije i histograma.

Relevantnost I primjenjivost

Učenje kako i kada nešto primijeniti posebno je važno za statistiku, jer se ona koristi u raznim disciplinama (npr. eksperimentalnoj fizici, društvenim znanostima, kemiji, psihologiji, medicini ...). Osim toga, u svakodnevnom životu učenici se često suočavaju s rezultatima statističkih istraživanja (npr. u novinama, ocjenama u školi).

Istraživačke vještine

Istraživanje je uključeno u sve faze. Učenici bi trebali steći istraživačke navike i češće se stavljati u situacije u kojima će raditi na ovaj način. Stoga, razvijajući matematičke kompetencije, razvijaju i istraživačke vještine. Tijekom provedbe scenarija studenti će sustavno eksperimentirati, organizirati podatke, donositi odluke, surađivati i komunicirati. Istraživačke vještine treba uključiti i u institucionalizaciju, posebno vještine organiziranja, strukturiranja i sažimanja podataka.

Potencijal za slijed lekcija

Scenarij može biti dio većeg skupa nastavnih sati o statistici i prikazivanju podataka.

- *Prethodna znanja*: Od učenika se očekuje da znaju koristiti Excel za neke elementarne manipulacije podacima poput sortiranja, prikazivanja i računanja. Nadalje, polazimo od aritmetičke sredine kao preliminarnog znanja učenika.
- *Uvod*: Problem se može uvesti predstavljanjem osobe, koja je tek završila studij i traži posao. U novinama je pronašla tri oglasa za posao, za tri različite tvrtke, koji joj zvuče zanimljivo. Istražuje informacije o plaćama u tim tvrtkama i uspoređuje mogućnosti zarađivanja u svakoj tvrtki. Kako donijeti odluku?

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija*: Kontekst omogućava studentima korištenje njihovog osnovnog jezika za opisivanje karakteristike podataka prilikom matematizacije problema. Riječi koje se koriste su: ekstremi, poredak, raspon, mnogi, gotovo isti, razlike. Također osjećaju potrebu za grafičkim prikazom ili organiziranjem podataka u intervale, budući da je veliki skup podataka teško pregledati ili analizirati. Ovaj jezik i prikazivanje podataka pomažu im da uđu u svijet statistike i povežu je s realnom situacijom.

- *Vertikalna matematizacija*: Očekivana raznolikost učeničkih obrazloženja može se koristiti u fazama vrednovanja i institucionalizacije kako bi se formalno uvele statističke mjere srednje vrijednosti, njihovo računanje i korištenje. Daljnja istraživanja mogla bi se usmjeriti na odnose između grafičkog prikaza podataka i mjera raspršenja, vezanih uz te mjere srednje vrijednosti, te na način kako učinkovito koristiti tehnologiju u statistici. Na meta razini, također je važno uključiti učenike u način na koji se statistika koristi za sažimanje podataka te donošenje odluka i predviđanja o svijetu oko njih.

MERIA Modul “Tobogan”

Uvod u derivacije

Scenarij poučavanja

Ciljano znanje	Konceptualno razumijevanje nagiba krivulje kao nagiba tangente.
Širi ciljevi	Matematičko modeliranje tobogana pomoću grafova funkcija. Izračunavanje nagiba (derivacija funkcije) ručno ili pomoću ICT-a. Smisleni uvod u diferencijalni račun. Istraživačke vještine: eksperimentiranje s različitim grafovima funkcija na papiru i korištenjem ICT-a, ponavljanje procesa za poboljšanje rješenja, uspoređivanje različitih strategija, obrazlaganje karakteristika dobivenog rješenja. Interdisciplinarne vještine: učenici mogu povezati svoje iskustvo glatkoće fizičkih objekata s matematičkim pojmovima tangente na krivulju i derivacijom funkcije. Matematički modeli mogu se koristiti za izradu 3D objekata ispisivanjem na 3D pisaču (ICT vještine) ili proizvodnjom s drugim materijalima (zanati).
Potrebno matematičko predznanje	Grafovi i jednadžbe pravca i nekih nelinearnih krivulja (kružnica, parabola ili graf eksponencijalne funkcije)
Razred	Dob 16-18, razred 10 -12 (kad se uvode derivacije)
Vrijeme	60 - 90 minuta, dva školska sata
Potrebni materijal	Papir, olovka, ICT - program dinamične geometrije kao što je GeoGebra (Upotreba ICT-a nije neophodna, ali uvelike povećava iskustvo učenika)

Problem:

Promotrite slike skijaške skakaonice i dječjeg tobogana. Oboje se sastoji od zakrivljenog dijela na gornjem ili donjem dijelu i jednog ravnog dijela u sredini. Primijenite matematiku i dizajnirajte takav oblik. Rješenje neka se sastoji od jednog ravnog i samo jednog zakrivljenog dijela. Pazite da spuštanje ne bude neugodno.
Uvedite koordinatni sustav i pronađite jednadžbe za *jedan* zakrivljeni dio i pravac.

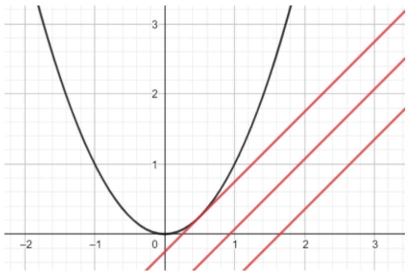
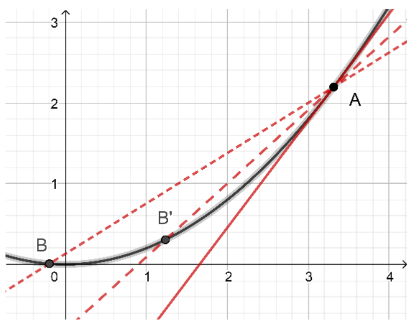
Skijaška skakaonica Holmenkollen u Oslu, Norveška, fotograf Mathias Stang, i dječji tobogan.

Napomena: Za dužu lekciju, sa više aktivnosti modeliranja, izostavite posljednju rečenicu iz opisa zadatka (vidite modul za dodatnu fazu).

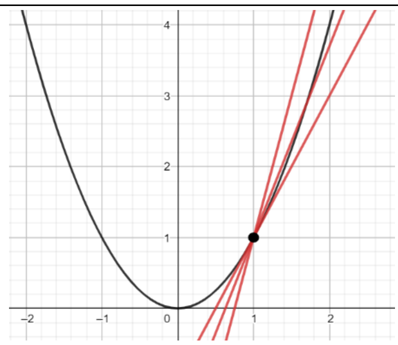
Faze	**Postupci nastavnika, uključujući i upute**	**Postupci i reakcije učenika**
Primopredaja (didaktički) 5 min	Nastavnik predstavlja problem. Nastavnik ističe da učenici trebaju dizajnirati glatki spust tobogana. Nastavnik osigurava da se učenici koncentriraju na samo jedan zakrivljeni dio i ravni (linearni) dio u sredini.	Učenici se dijele u parove ili tročlane grupe. Učenici se zainteresiraju za problem.
Djelovanje (adidaktički) 20 min	Nastavnik uočava učeničke ideje, strategije i zaključke. Ako učenici ne shvate da se dva dijela trebaju spojiti glatko, nastavnik treba raspraviti to pitanje. Ako nakon 10 minuta nema nikakve ideje za odabir modela zakrivljenog dijela nastavnik podsjeća učenike na oblik grafa funkcije $y = x^2$ i/ili $y = \cos x$ (ne podsjeća na kružnicu) i situacija postaje didaktička. Ako su učenici došli do rješenja s kružnicom, problem s kojim mogu nastaviti je: „Što ako promijenite kut ili što ako promijenite točku u kojoj se pravac i kružnica sastaju? Kako će se promijeniti jednadžba pravca? Nakon toga, nastavnik će od grupe učenika tražiti da pronađu rješenje u kojemu krivulja nije kružnica.	Učenici skiciraju spust i uvode koordinatni sustav. Pristupi učenika najčešće se mogu opisati u jednoj od slijedećih kategorija: 1. Pristup pomoću granične linije: učenici odabiru slobodni pravac i pomiču ga (translatiraju i rotiraju) dok ne izgleda kao da postoji samo jedno sjecište u području koje promatraju. 2. Pristup pomoću sekante: učenici odabiru jednu točku na krivulji – točku u kojoj žele odrediti tangentu; zatim odabiru još jednu točku na krivulji i pomiču drugu točku bliže prvoj kako bi dobili glatki prijelaz. 3. Pristup pomoću linearne aproksimacije: Učenici odabiru jednu točku na krivulji, crtaju pravac i zatim pokušavaju prilagoditi nagib tako da pravac najbolje odgovara krivulji. Neki učenici mogu koristiti kružnicu kao krivulju i činjenicu da je tangenta okomita na radijus. Ovo rješenje ćemo zvati *rješenje s kružnicom.*

		U nastavku pogledajte pojedinosti o ovim (kategorijama) pristupa u odjeljku *Mogući načini da učenici ostvare ciljno znanje*.
Formulacija (adidaktički) 15 min	Učitelj traži od učenika da formuliraju svoje rezultate. Dok učenici rade na tome, nastavnik bira grupe s različitim pristupima koji će predstaviti svoja rješenja.	Učenici formuliraju rezultate unutar svoje skupine. Neke skupine predstavljaju svoja rješenja.
Potvrđivanje (didaktički) 10 min	Nastavnik pita: „Kako znamo da je rješenje dobro? Postoji li najbolje rješenje?“ Ako su učenici samo vizualno potvrđivali svoje rješenje, nastavnik može predložiti numeričke pristupe za potvrđivanje.	Učenici objašnjavaju zašto je neko rješenje dobro i može li jedno biti bolje od drugog. • Vizualno potvrđivanje: Neki će se učenici osloniti na vizualnu procjenu dizajna; ako izgleda dobro, onda je dobro. Također učenici mogu zumirati krivulju. • Algebarsko potvrđivanje: Učenici mogu izračunati točku(e) presjeka algebarski i možda vidjeti da je ona lokalno jedinstvena. • Numeričko potvrđivanje: Učenici mogu izračunati $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za dvije točke na krivulji i vidjeti je li to približno nagib njihovog pravca. Ako su učenici radili na rješenju s kružnicom i odredili tangentu, trebali bi biti sigurni da imaju najbolje rješenje i objasniti zašto (geometrijski dokaz i/ili algebarski ili oboje).
Institucionalizacija (didaktički) 10 min	Nastavnik diskutira zapis tangente na način koji odgovara rješenjima do kojih su došli učenici. Nastavnik ističe jedno ili više od sljedećih stajališta o nagibu krivulje u točki: a) najbolja lokalna aproksimacija slijedi vizualno potvrđivanje	Neki će učenici spominjati nagib. Neki mogu koristiti riječ „tangenta“ ili tipku za tangentu u GeoGebri. Učenici slušaju i zainteresirani su za računanje najboljeg rješenja za proizvoljne oblike i krivulje.

	b) lokalno jedinstvena granična linija – jedna točka presjeka slijedi algebarsko potvrđivanje c) klasična definicija koja koristi sekantu i limes kvocijenta diferencija slijedi numeričko potvrđivanje Ako su neki učenici došli do rješenja s kružnicom raspravlja se o ideji tangente na ostale krivulje. Nastavnik ističe da je najbolje rješenje za kružnicu tangenta i da su učenici zapravo aproksimirali tangentu za ostale krivulje.	

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	Više je mogućnosti što učenici mogu činiti, na primjer: 1. Pristup pomoću granične linije Učenici odabiru na primjer $y = x^2$ Algebarsko potvrđivanje: promatrajući familiju pravaca $y = x + b$ Granična linija dobiva se eliminacijom varijable y: $x^2 = x + b.$ Jednadžba ima jedinstveno rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli: $1 + 4b = 0.$ Dakle $b = -\frac{1}{4}$ daje glatki tobogan.  2. Pristup pomoću sekante: Učenici fiksiraju jednu točku na krivulji, točku u kojoj će položiti tangentu. Zatim odabiru još jednu točku na krivulji, crtaju pravac kroz te dvije točke i pomiču drugu točku bliže prvoj kako bi dobili glatko spajanje. Što bliže odaberemo točku to je aproksimacija bolja. Ovaj pristup najbolje funkcionira s ICT-om.  3. Pristup pomoću linearne aproksimacije:

Na primjer, učenici odabiru $y = x^2$ i točku (1, 1) kao točku u kojoj krivulja prestaje i počinje pravac $y = a\,x + b$. Mogu pogoditi da je $a > 1$ i pokušavati s različitim vrijednostima (od kojih je $a = 2$ točna). Pokušavanje znači skiciranje ili crtanje grafova.

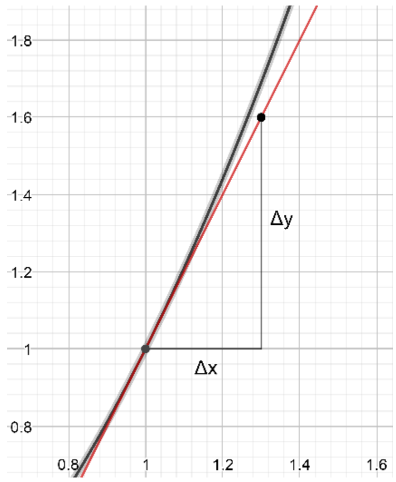


Učenici zapisuju jednadžbu pravca $y = a\,x + b$, a iz poznate točke pravca zaključuju $a + b = 1$ pa za svaki odabrani nagib pravca mogu izračunati b.

Neki učenici mogu odrediti aproksimaciju koeficijenta a koristeći dvije točke na nacrtanom pravcu i računajući $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Numerički primjer: učenici mogu odrediti $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.6}{0.3} = 2$.

Zatim iz $a + b = 1$ slijedi $b = -1$. Potvrđivanje je vjerojatno vizualno, ali može biti napravljeno i numerički, moguće uz sugestiju nastavnika, budući da je metoda slična. Učenici mogu odabrati dvije



točke na paraboli i izračunati $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; na primjer (1,1) i (1.1 , 1.21). Tada je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$ što je blizu prethodnom rezultatu.

Učenici mogu potvrditi rješenje računajući sjecište pravca i parabole (algebarsko potvrđivanje). Ako su učenici upoznati s kvadratnim jednadžbama i diskriminantom mogu nastaviti rješavajući sustav jednadžbi:

$$y = x^2, y = ax + 1 - a,$$

i dobiti $x^2 - ax + a - 1 = 0$.

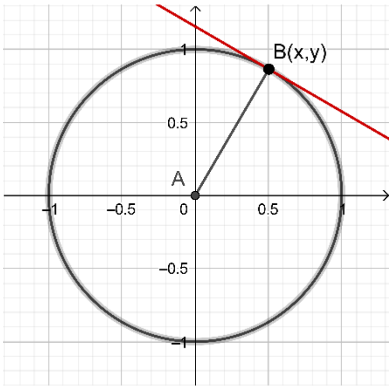
Jednadžba ima jedno rješenje ako je diskriminanta jednaka 0:

$$a^2 - 4(a - 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

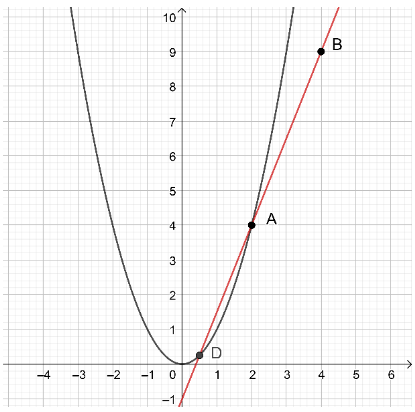
4. Rješenje s kružnicom

Učenici odabiru kružnicu. Učenici koji biraju kružnicu mogu odabrati na primjer kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ i točku $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, koja odgovara kutu od $\frac{\pi}{4}$. Ako znaju da je polumjer kružnice okomit na tangentu, mogu odrediti koeficijent smjera pravca $a = -1$. Nakon toga mogu odrediti jednadžbu tangente.

Kada nastavnik traži da odaberu drugu točku, učenici mogu odrediti kvocijent diferencija a tangente pomoću kvocijenta diferencija pravca na kojem leži radijus, a koji je $\frac{y}{x}$. Dakle $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (općenito), ali učenici će vjerojatno ovo napraviti za neku konkretnu točku. Ovo razmatranje može postati jednostavnije ako učenici znaju i koriste vektore.



5. Uz primjenu ICT (GeoGebra ili neki slični program)
   Ako učenici koriste neki program dinamične geometrije ili neki drugi program vjerojatno će slijediti iste korake u zaključivanju kao i bez primjene ICT-a. Razlika je u tome što ICT računa jednadžbu pravca brže i crta točan graf odabrane krivulje. Učenici će moći proučiti više primjera u kraćem vremenu i uočiti stvari koje ne mogu s olovkom i papirom. Na primjer:
   - Neki učenici u GeoGebri mogu pronaći tipku za tangentu i krenuti od toga.
   - Učenici mogu nacrtati krivulju i proizvoljni „dobar“ pravac točkom krivulje i nekom drugom točkom. Mogu zumirati i provjeriti izgleda li nacrtani pravac dobro. Mogu pomicati drugu točku da dobiju bolje rješenje. Mogu odabrati rješenje koje im najbolje izgleda i pročitati jednadžbu pravca koristeći „alat za mjerenje“.
   - Neki učenici mogu započeti zumiranjem u točki krivulje sve dok krivulja ne počne izgledati ravno. Tada mogu odabrati dvije točke na krivulji i odrediti jednadžbu pravca koji ih sadrži (ili barem nacrtati pravac koji je približno tangenta).
   - Učenici mogu pokušati provjeriti ima li nacrtani pravac sjecišta s krivuljom (u ovom slučaju će različito zaključivati ako su nacrtali pravac ili polupravac). Neki učenici će možda koristiti program i tako odrediti sjecišta krivulje i pravca. Moći će uočiti da će uz jednu čvrstu točku na krivulji promjena nagiba pravca utjecati na promjenu položaja drugog sjecišta (kao što je navedeno u fazi *Institucionalizacije*). Budući da će odmah vidjeti rezultate, moći će zaključiti da je najbolje rješenje u slučaju kad se točke A i D podudaraju.



Objašnjenje materijala

Ideja osmišljavanja poznatog oblika trebala bi oduševiti učenike u fazi primopredaje i uvesti kontekst stvarnog života gdje je glatkoća u intuitivnom smislu važna. Ako se nekim učenicima ne sviđaju skijaški skokovi ili dječji tobogani, nastavnik im može reći da se isti principi primjenjuju i kod izrade željezničkih tračnica, vlaka smrti u zabavnim parkovima itd. (Fokus na povezivanje jednog zakrivljenog dijela s linearnim dijelom). To također upućuje učenike da je problem realan.

Osim moguće upotrebe ICT-a, ne postoje posebni materijali potrebni za ovaj scenarij.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

Neke promjene koje se mogu napraviti u scenariju (bez promjene ciljeva) su:

Didaktičko okruženje: slike se mogu izabrati drugačije, ali trebaju sadržavati zakrivljeni i ravni dio. Poželjno je da se objekt za projektiranje sastoji od jednog zakrivljenog i jednog ravnog dijela. Učenicima trebaju biti koliko je god moguće bliski.

U nekim slučajevima, u prvoj fazi djelovanja može se dogoditi da učenici ne znaju što da rade ili se na neki drugi način ne uključuju u produktivni matematički rad. Nastavnik tada može prekinuti rad na sljedeći način: Nastavnik može dodati kratku fazu primopredaje kako bi razgovarao o prvim spoznajama i izazovima učenika, fokusirajući se na to što bi to moglo značiti glatko uklapanje, a zatim nastaviti s predviđenom fazom djelovanja.

Ako je nastavnik odlučio izostaviti rečenicu "Uvesti koordinatni sustav i pronaći jednadžbe za jedan zakrivljeni dio i pravac" iz primopredaje (opis zadatka), onda bi mogao prekinuti fazu djelovanja kraćom primopredajom kako bi raspravio o nužnosti toga za matematizaciju problema. Na kraju ove primopredaje učenici bi trebali razumjeti da trebaju raditi s koordinatnim sustavima i konkretnim funkcijama/jednadžbama za zakrivljeni i ravni dio. Prije nastavka nastavnik provjerava imaju li učenici ideju o tome što bi dobro, a što loše spajanje ravnog i zakrivljenog dijela značilo geometrijski (rješenje zahtijeva ne samo kontinuiranu, već i glatku krivulju). Nakon ove primopredaje, učenici nastavljaju s fazom djelovanja kao što je opisano u scenariju.

Učenici mogu koristiti geometrijski softver: npr. GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Desmos, Wolfram Alpha (ili Mathematica), Maple, MATLAB, Octave, itd. Alternativno, mogu koristiti grafički kalkulator ili mobilni telefon s geometrijskim softverom. Preporučujemo da učenicima imaju mogućnost korištenja ICT-a, ali izbor treba prepustiti njima.

Duljina faza može se prilagoditi učenicima, ali se ne treba previše mijenjati.

U *fazi djelovanja* treba prepustiti učenicima da sami odaberu jednadžbu za zakrivljeni dio. Samo ako neke grupe (ili cijeli razred) nakon 10 minuta nemaju ideja kako postupiti, nastavnik može podsjetiti te skupine (ili cijeli razred) na neke mogućnosti kao što su $\cos x$, $\frac{1}{x}$ ili x^2 (ali ne i na kružnicu). Nakon što učenici odaberu funkciju za zakrivljeni dio, faza djelovanja se nastavlja.

Ako samo nekoliko učenika ima rješenje s kružnicom, nastavnik može postavljati pitanja kao što je objašnjeno u scenariju u toj grupi, kako bi se izbjeglo ometanje razmišljanja drugih učenika. Ako nije bilo učenika koji su došli do rješenja s kružnicom, nastavnik bi to mogao spomenuti u fazi potvrđivanja ili institucionalizacije, ali ne ranije.

Zapažanja iz prakse

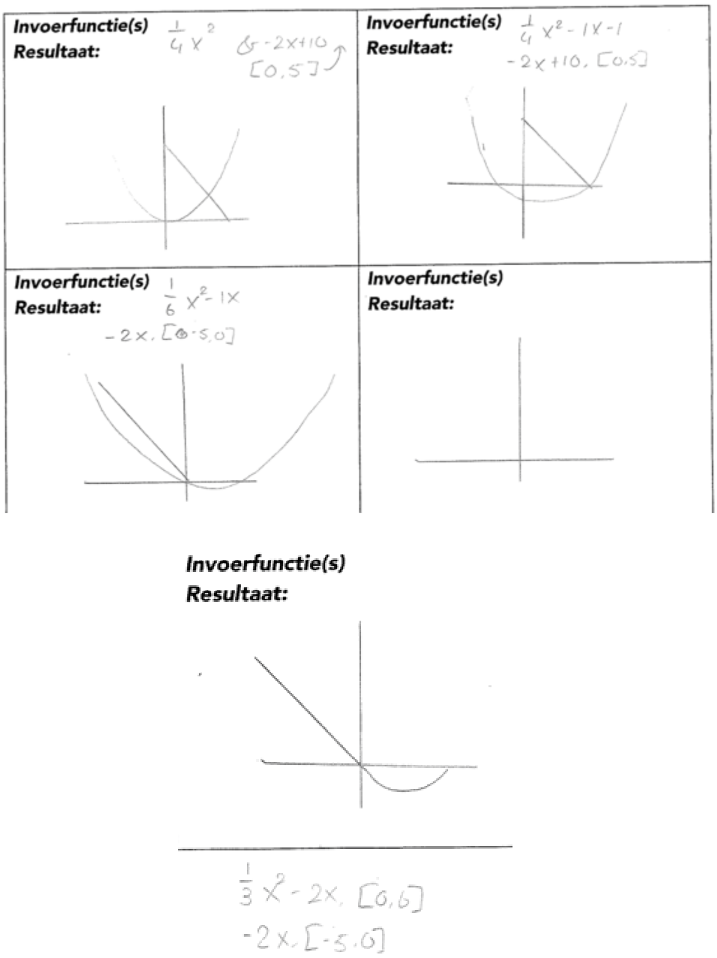
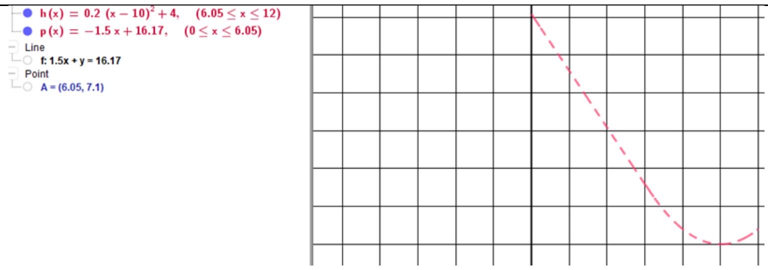
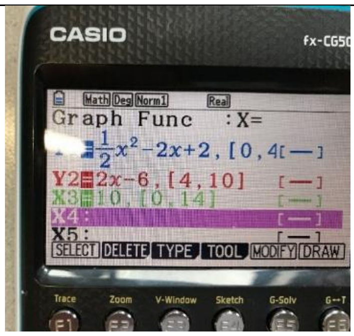
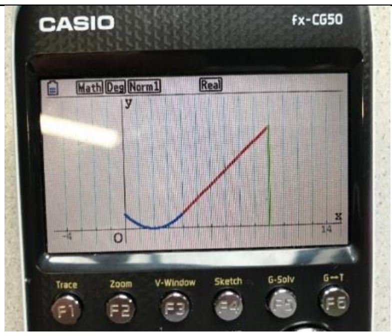
Neka opća zapažanja:

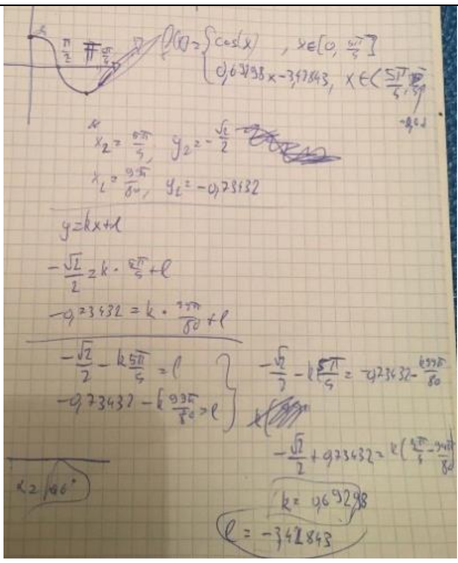
- Općenito, nastavnicima i učenicima se svidjela ova lekcija.
- Ponekad su se učenici previše usredotočili na oblik zakrivljenih dijelova, pa ih je nastavnik morao podsjetiti da dizajn mora uključivati i ravni dio, te spoj ravnog i zakrivljenog dijela.
- Neki su se učenici brinuli o praktičnosti tobogana, a ne o glatkoći pa bi nastavnik trebao stvarno provjeriti imaju li učenici predodžbu o tome što bi dobar, a što loš spoj značio geometrijski.
- Neki nastavnici i učenici su koristili ICT, npr. GeoGebra, Geometer's Sketchpad, Desmos, grafičke mobilne aplikacije, Grafički kalkulator. Skupine koje koriste ICT istraživale su više ideja. Neki učenici započinju na papiru i provjeravaju s ICT-om. Neki rade obrnuto.
- U testiranju su neke skupine učenika već naučile derivacije i većina ih je shvatila da moraju koristiti tangente za rješenje.
- Neki su učenici raspravljali o tome što treba mijenjati: parabolu, nagib pravca ili odsječak na osi y.
  Neki nisu shvatili da mogu negdje uvesti parametar: a ili b u $y = ax + b$ ili a, b ili c u $y = ax^2 + bx + c$, ili čak Δx kao parametar.

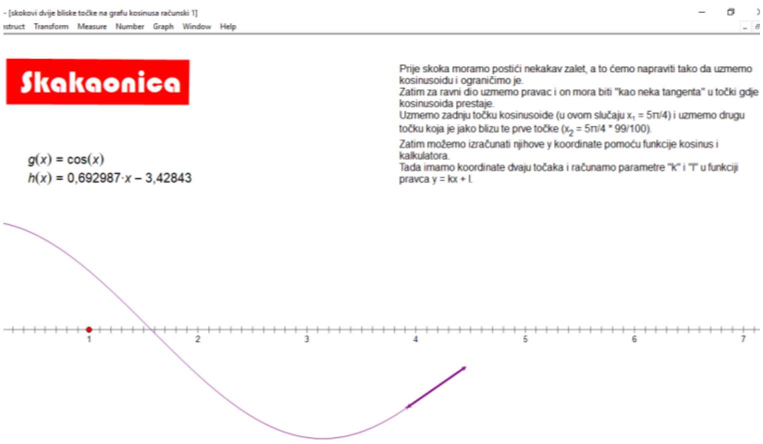
Pristupi učenika pri dizajniranju tobogana povezani su s različitim aspektima onoga što misle da je tangenta.

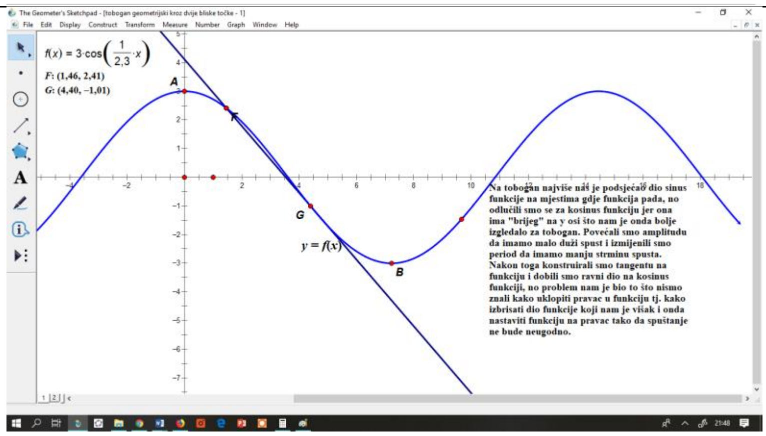
1. Pristup pomoću granične linije: učenici biraju slobodnu liniju, a zatim je premještaju (translatiraju i rotiraju) sve dok se ne pojavi samo jedno sjecište u području fokusiranja.
2. Pristup pomoću sekante: učenici biraju jednu točku na krivulji, željenu točku dodira; zatim drugu točku na krivulji, povlače pravac između dviju točaka i pomiču drugu točku bliže prvoj da bi dobili glatko pristajanje.
3. Pristup pomoću linearne aproksimacije: učenici biraju jednu točku na krivulji, povlače pravac i zatim pokušavaju namjestiti nagib tako da vizualno izgleda kako se "uklopio" u krivulju.

Neki su koristili kružnicu kao krivulju i činjenicu da je tangenta okomita na radijus. To nazivamo *rješenjem s kružnicom*.

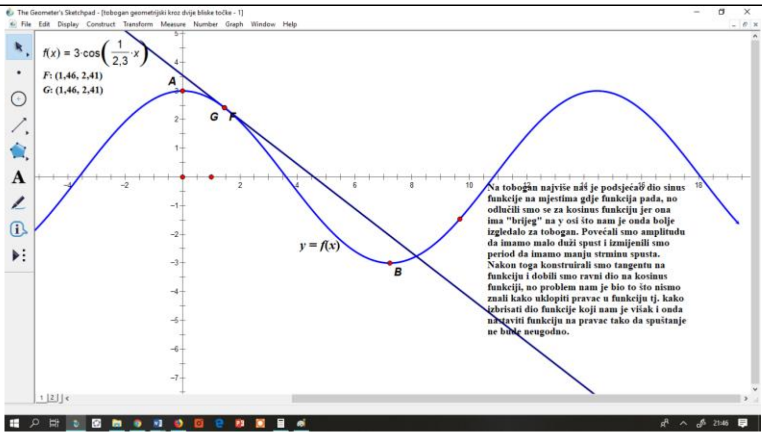
 	*Učenici mijenjaju parametre parabole i pravca. Na kraju, pronalaze dobro rješenje. Čini se da se usredotočuju na točke presjeka i potvrđuju vizualno.*
 	*Ova grupa samo mijenja b u $y = ax + b$ i pronalazi približno rješenje.*
  	*Rješenje je prikazano na grafičkom kalkulatoru.*

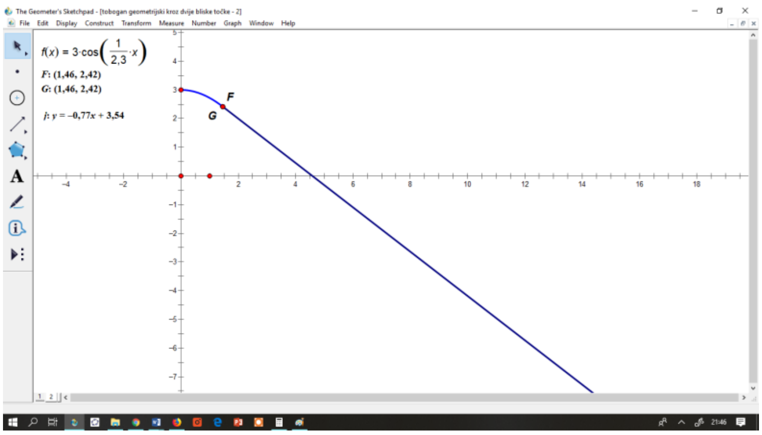
<table>
<tr>
<td>


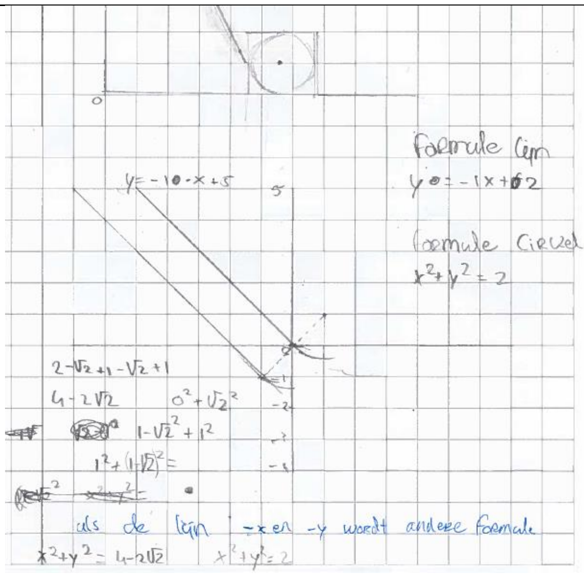


</td>
<td>Ova grupa je koristila pristup pomoću sekante (2): odredili su pravac kroz dvije blizu točke na zakrivljenom dijelu za aproksimaciju linearnog dijela. Koristili su numeričke metode kako bi pronašli pravca: pišu da biraju točku gdje se kosinus završava ($x = 5\pi/4$), a zatim jednu točku malo prije toga ($x = \frac{99}{100} \cdot 5\pi/4$).</td>
</tr>
<tr>
<td>


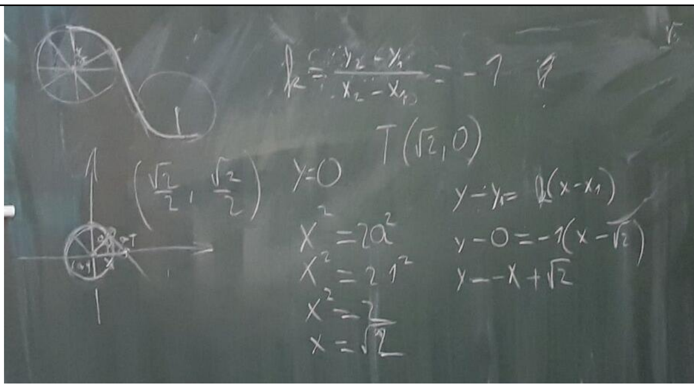
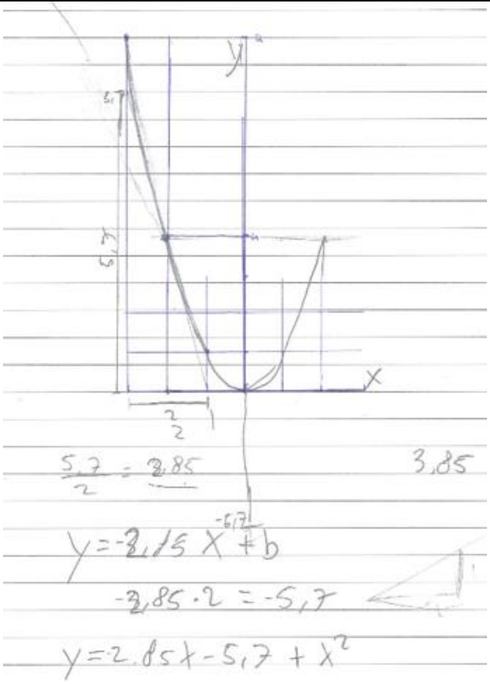
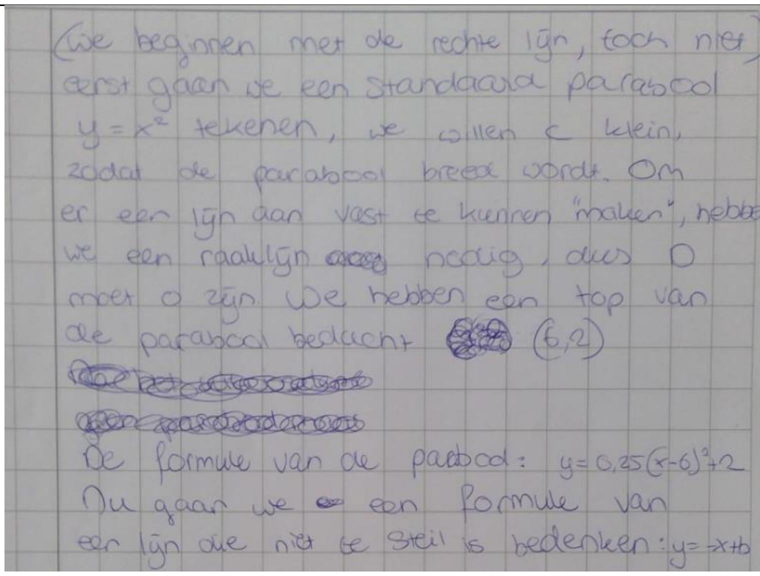
</td>
<td>Ova skupina također je koristila pristup pomoću sekanti (2). Čitaju jednadžbu pravca sa zaslona.</td>
</tr>
</table>







Ova je skupina pokušala rješenje s kružnicom. Znali su da je tangenta okomita na radijus (tako je potvrđivanje geometrijsko: koriste teorem iz euklidske geometrije). Međutim, imali su poteškoća u spajanju kruga i pravca pri vertikalnoj translaciji.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ova skupina također ima rješenje s kružnicom. Oni su uzeli točku $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ na jediničnoj kružnici i konstruirali pravac s nagibom – 1 kroz tu točku.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Ova skupina crta graf parabole $y = x^2$. Zatim pokušavaju uklopiti tangentu u jednoj točki na način koji se čini da se odnosi na pristup pomoću linearne aproksimacije (3). Oni određuju nagib pravca mjerenjem Δx i Δy i uzimajući kvocijent. potvrđivanje je vizualno.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Jedna skupina učenika koristila je diskriminantu da bi odlučila postoji li jedna točka presijecanja između njihove tangente i parabole. Oni su fiksirali parabolu: $y = 0{,}25\,(x-6)^2 + 2$ s tjemenom (6,2) i pokušali pronaći vrijednost parametra b u jednadžbi pravca $y = -x + b$ pomoću diskriminante.</td>
</tr>
</table>

Alati za procjenu

Za brzu provjeru stečenog znanja nastavnik može postaviti pitanja:

1. Nastavnik crta proizvoljnu krivulju i pravac koja očito nije tangenta. Nastavnik pita učenike misle li da je ovaj oblik prikladan za tobogan. Učenici objašnjavaju zašto ne.

2. Odredite jednadžbu tangente na jediničnu kružnicu u točki $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Odredite približnu vrijednost nagiba parabole $y = x^2$ u točki (2,4).

Preporuke za vezane probleme

1. Pojam granične linije i razlika između granične linije i tangente.

2. Euklidov pojam tangente - pravac takav da između njega i krivulje ne može pasti niti jedan drugi pravac.

3. Nakon što se uvede derivacija kao limes kvocijenta diferencija, učenici mogu odrediti derivaciju za jednostavnu funkciju, npr. $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$. Učenici mogu raspraviti što to znači za tangente na graf ove funkcije.

Načela i RME perspektiva u scenariju

Relevantnost I primjenjivost

- Stvarni život: problem je vezan uz svakodnevno iskustvo učenika. Predmeti koje treba dizajnirati su im poznati i oni znaju kakve razlike u oblicima mogu nastati. Zadatak koristi njihovo predznanje o tome što znači da nešto bude glatko: naime, njihovo tjelesno iskustvo klizanja niz glatki tobogan.
- Svijet rada: Učenici uče dizajnirati i matematizirati oblike koje vide u stvarnom životu. Uče povezati objekt s matematičkim prikazom. Oni pojednostavljuju oblik objekta iz 3D-prostora u krivulju. Te su vještine važne u dizajniranju (primjerice arhitekturi) i modeliranju u profesionalnom kontekstu.
- Daljnje istraživanje: Scenarij je uvod u derivacije i diferencijalni račun.

Istraživačke vještine

Učenici uče kako pojednostaviti probleme i primijeniti matematiku kako bi opisali dio koji razmatraju. Postavljaju hipoteze i testiraju ih. Stvaraju primjere i uspoređuju različita rješenja. Donose odluke o tome koje je rješenje bolje. Mogu se zalagati za bolje rješenje i prenijeti svoje argumente drugima. Oni mogu ekstrapolirati i generalizirati svoje rezultate.

Potencijal za slijed lekcija

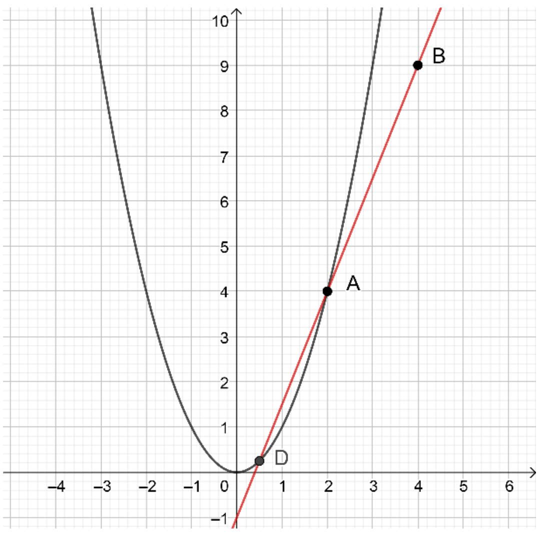
Ovaj scenarij može biti dio niza predavanja o derivacijama. Predznanja koja se traže od učenika odnose se na: grafove funkcija, linearnu funkciju i pravce, primjere nelinearnih funkcija.

Nadalje, u nizu lekcija, problem tobogana može se riješiti formalnim metodama, kao što su limesi i derivacije. Ako se uvede derivacija implicitno zadane funkcije, može se uspostaviti veza s rješenjem s kružnicom. Učenici mogu primijeniti derivaciju implicitno zadane funkcije na rješenje s kružnicom i usporediti ga s intuitivnim geometrijskim rješenjem trenutnog scenarija i rezultat dobiven eksplicitnom derivacijom. Na taj način se znanje potvrđuje usporedbom različitih rezultata koje su proizveli učenici.

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija:* Problem je postavljen u bogatom kontekstu koji je stvaran za učenika: svi znaju prepoznati je li tobogan gladak ili nije. Učenici su pozvani da koriste matematički jezik za modeliranje situacije: koordinatni sustav, interpretiranje trodimenzionalnog oblika tobogana kao 2-dimenzionalne krivulje; predstavljanje krivulje jednadžbama.
- *Vertikalna matematizacija:* U nekim slučajevima učenici razvijaju ideje uvođenjem parametara; raspravljaju o tome što će parametrizirati. Neki primjenjuju druge matematičke metode: poput algebre (diskriminante) ili razlike diferencija (nagib pravca). Odavde postoji mnogo potencijala za daljnju matematizaciju. Ako su učenici koristili metode sekante, tada postoji prirodni prijelaz na uvođenje nagiba krivulje uz korištenje limesa kvocijenta diferencija. Ako koriste algebarske metode i fokusiraju se na računanje točaka presijecanja, postoji mogućnost da se raspravi zašto bi trebala postojati jedna točka presjeka (lokalno) i možda pogledati multiplicitet točaka presijecanja kao prvi korak za izračun nagiba krivulje. Ako su učenici koristili "zumiranje" kao metodu potvrđivanja, tada postoji prirodna povezanost s nagibom krivulje pomoću lokalne aproksimacije.

  Neformalni modeli/rješenja do kojih će učenici doći mogu biti vrlo različiti. Nastavnik mora pronaći mostove od jednog pristupa (djelovanje/potvrđivanje) do drugog kao sredstva za prelazak na zajedničku institucionalizaciju. Institucionalizacija bi trebala biti izgrađena na idejama koje su učenici osmislili. Na primjer, učenici su možda eksperimentirali s situacijom u GeoGebri:



  Učenici su pomicali točku B. Nastavnik ističe da to odgovara pomicanju točke sjecišta (D). To može biti put prema raspravljanju kvocijenta diferencija i limesa (na neformalan način) i možda dovesti do definicije derivacija na temelju toga.