



## MERIA Scenarij “Put kočenja”

### Kvadratna ovisnost

Ciljano znanje	Ovisnost puta kočenja o brzini neposredno prije kočenja je kvadratna
Širi ciljevi	Kvadratna funkcija i karakterizacija kvadratne funkcije konstantnom drugom derivacijom (konstantnom drugom razlikom za kvadratne nizove) ili konstantnim rastom ili padom prve derivacije (razlike za kvadratne nizove). Računanje s različitim mjernim jedinicama. Organiziranje podataka. Određivanje pravila pridruživanja u obliku formule. Crtanje grafova (kvadratnih) funkcija na papiru ili korištenjem ICT-a. Istraživačke vještine: analiziranje podataka i traženje uzoraka u tablicama s brojevima, obrazlaganje rezultata (argumentacija) tijekom prezentacija (proračuni dominiraju procesom i učenici moraju sažeti svoje rezultate i predstaviti svoj pristup drugima). Interdisciplinarnе vještine: učenici rade s varijablama iz fizike pa moraju razumjeti što računaju (povezivanje notacije i procedura iz područja matematike i fizike). U pisanju izvješća naglašene su profesionalne komunikacijske vještine. Učenici također raspravljaju o odgovornosti vozača i sigurnosti u prometu.
Potrebno matematičko predznanje	Temeljno znanje o funkcijama, veza stalne brzine i udaljenosti, prosječna brzina, pretvaranje km/h u m/s i obratno.
Razred	16 godina, 10 razred (kad se uvodi kvadratna funkcija)
Vrijeme	90 minuta, dva školska sata
Potrebni materijal	Tablice za popunjavanje, kalkulatori, računala, milimetarski papir

#### Primjedbe nakon provedbe

Kontekst promatranja: (razred, ustanova, zemlja, itd.):

**Problem:** U gradskom području s osnovnim školama roditelji se žale na postavljeno ograničenje brzine, jer smatraju da ono nije adekvatno za područje sa školskom djecom. Skupina bezobzirnih vozača kaže da se ne moraju brinuti jer vozila koče na vrijeme. Istražite kako put kočenja ovisi o brzini neposredno prije kočenja. Savjetujte gradonačelnika o posljedicama promjene ograničenja brzine. Potkrijepite svoj savjet prikazima poput grafova, tablica i formula.

Razmislite najprije o kočenju automobila kod kojeg se brzina smanjuje za 10 km/h svake 0.4 sekunde. Možete upotrijebiti tablice u nastavku za organiziranje izračuna i izradu opažanja, a zatim opravdajte svoj odgovor na najbolji mogući način.

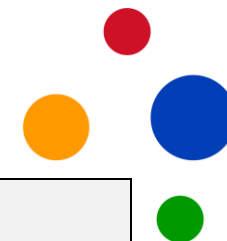




Faza	Postupci nastavnika, uključujući upute	Postupci i reakcije učenika	Primjedbe nakon provedbe
<p>Primopredaja (didaktički)</p> <p>10 minuta</p>	<p>Nastavnik dijeli učenike u tročlane ili četveročlane skupine.</p> <p>Nastavnik postavlja problem i provjerava razumiju li učenici pretpostavku o konstantnom smanjivanju brzine tijekom kočenja. Nastavnik i učenici raspravljaju o ideji malih vremenskih intervala na kojima se gibanje može aproksimirati jednolikim gibanjem sa stalnom (prosječnom) brzinom.</p> <p>Nastavnik provjerava razumiju li učenici pojmove u tablicama, osnovne veze između brzine, vremena i puta, kako pretvarati km/h u m/s i ideju da 40 km/h mogu zamijeniti nekom drugom početnom brzinom.</p> <p>Nastavnik naglašava da učenici mogu koristiti različite strategije. Mogu koristiti sve vrste tehnologije.</p> <p>Nastavnik dijeli učenicima tablice i osigurava džepna računala (ako učenici nemaju svoja), računala, milimetarski papir.</p> <p>Nastavnik zadaje učenicima zadatak da u 20 minuta istraže kako se mijenjaju početna brzina i put kočenja i da predstave neke zaključke o načinu na koji su povezani.</p>	<p>Učenici slušaju, iznose svoje ideje i odgovaraju na pitanja.</p>	



<p>Djelovanje (adidaktički)</p> <p>20 minuta</p>	<p>Nastavnik obilazi, promatra učenike bez uplitanja.</p> <p>Ako primijeti da većina grupa započinje s novom tablicom za svaku početnu brzinu nastavnik može zatražiti kratko plenarno predstavljanje grupa o tome na koji način popunjavaju nove tablice. Vjerojatno će barem u jednoj grupi učenici uočiti da mogu koristiti prethodne račune pri određivanju puta kočenja za novu početnu brzinu i pročitati iz prethodne tablice put kočenja za manje početne brzine. Ovo može biti korisna povratna informacija za sve grupe.</p>	<p>Učenici raspravljaju u grupi o strategijama.</p> <p>Učenici popunjavaju tablice koristeći kalkulatora ili koriste ICT za crtanje točaka ili ...</p> <p>Učenici raspravljaju o preciznosti, biraju različite početne brzine.</p> <p>Članovi grupa mogu imati različite ideje i razvijati ih samostalno.</p> <p>Učenici mogu koristiti računanje, grafove ili činjenice iz fizike kako bi došli do zaključaka:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- put kočenja ne mijenja se konstantno</li> <li>- veza puta kočenja i početne brzine nije linearna</li> <li>- put kočenja se povećava kad se povećava početna brzina, ali ne proporcionalno</li> </ul> <p>Neki učenici možda će primijetiti da su druge razlike konstantne i koristiti rekurzivnu metodu za računanje.</p>	
<p>Formulacija (didaktički)</p> <p>10 minuta</p>	<p>Nastavnik obilazi grupe i sluša kratko predstavljanje zaključaka grupe. Nastavnik postavlja pitanja i komentira ideje osobito u grupama koje imaju poteškoća u zaključivanju.</p>	<p>Učenici kratko predstavljaju svoj rad i postavljaju pitanja.</p>	

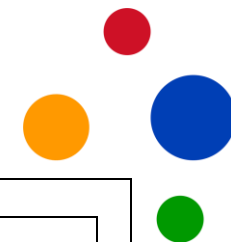


	<p>Nastavnik upućuje grupe koje imaju više različitih strategija da odaberu jednu od njih i koriste ju za generalizaciju i prezentiranje ideja.</p> <p>Nastavnik podsjeća učenike da je cilj aktivnosti otkriti kako je put kočenja ovisan o brzini neposredno prije kočenja kako bi mogli savjetovati gradonačelnika. Učenici trebaju izraditi preporuke, potkrijepljene tablicama i grafovima, za gradonačelnika o posljedicama promjene ograničenja brzine.</p>		
<p>Djelovanje i formulacija (adidaktički)</p> <p>20 minuta</p>	Nastavnik promatra.	<p>Učenici nastoje generalizirati svoje račune i razmatranja. Neki od njih će možda promijeniti strategiju za generalizaciju ili pristup problemu.</p> <p>Učenici pripremaju preporuku za gradonačelnika.</p>	
<p>Potvrđivanje (didaktički)</p> <p>25 minuta</p>	Nastavnik poziva učenike da predstave i usporede strategije i rješenja.	Učenici predstavljaju rješenja svojih grupa, slušaju, postavljaju pitanja i raspravljaju o strategijama i rješenjima.	
<p>Institucionalizacija (didaktički)</p> <p>5 minuta</p>	Nastavnik ističe sličnosti i razlike u matematičkom argumentiranju različitih strategija, objašnjava zašto neke od strategija nisu dovele do dokaza da je ovisnost kvadratna, ali promatrajući grafove i formule dobivene pomoću	Učenici slušaju i povezuju svoja rješenja s općom kvadratnom funkcijom.	



	tehnologije može se pretpostaviti da je ovisnost kvadratna. Nastavnik uvodi opći zapis kvadratne funkcije.	
--	---	--

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	Učenici će popunjavajući tablicu odrediti put kočenja za početnu brzinu od 40 km/h:								
	<b>Vrijeme (sekunde)</b>	<b>Promjena brzine za vrijeme kočenja (km/h)</b>	<b>Prosječna brzina (km/h)</b>	<b>Prosječna brzina (m/s)</b>	<b>Vremenski interval <math>\Delta t</math></b>	<b>Prijeđeni put <math>\Delta d</math> (m)</b>			
	$t = 0$ do $t = 0.4$	$v = 40$ do $v = 30$	35	$\frac{175}{18}$	0.4	$\frac{35}{9} \approx 3.89$			
	$t = 0.4$ do $t = 0.8$	$v = 30$ do $v = 20$	25	$\frac{125}{18}$	0.4	$\frac{25}{9} \approx 2.78$			
	$t = 0.8$ do $t = 1.2$	$v = 20$ do $v = 10$	15	$\frac{25}{6}$	0.4	$\frac{15}{9} \approx 1.67$			
	$t = 1.2$ do $t = 1.6$	$v = 10$ do $v = 0$	5	$\frac{25}{18}$	0.4	$\frac{5}{9} \approx 0.56$			
Put kočenja (m)					$\frac{80}{9} \approx 8.89$				
Zamijene li početnu brzinu nekim drugim brojem, analogno će dobiti put kočenja. Dobivenim će podacima popunjavati tablicu ( $v, d$ ).									
Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Put kočenja (m)	5	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$



Ili s decimalnim brojevima, na primjer:

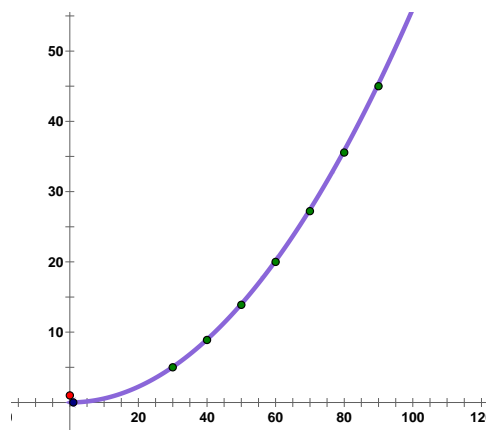
Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Put kočenja (m)	5	8.89	13.89	20	27.22	35.56	45	55.56	67.22

Promatrajući podatke u tablici učenici mogu zaključiti:

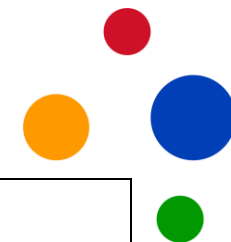
- Put kočenja je duži kad je brzina veća.
- Odnos između brzine i puta kočenja nije linearan ( $\frac{\Delta d}{\Delta v}$  nije konstantno).
- Ako se brzina udvostruči, udaljenost se povećava četiri puta. Ako se brzina poveća tri puta, udaljenost se povećava devet puta.
- Učenici mogu crtati točke  $(v, d)$  i zaključiti da veza može biti kvadratna. Mogu zapisati opću kvadratnu funkciju

$$d = av^2 + bv + c$$

i odrediti nepoznate koeficijente  $a$ ,  $b$ ,  $c$  koristeći podatke iz tablice i rješavajući sustav jednačbi. Ako su vrijednosti zapisali pomoću decimalnih brojeva dobit će aproksimaciju. Učenici koji odaberu ovu strategiju neće dokazati da je ovisnost kvadratna.



- Nakon pretpostavke da je ovisnost kvadratna učenici mogu koristiti ICT i pronaći kvadratnu regresiju. Učenici koji odaberu ovu strategiju neće dokazati da je ovisnost kvadratna.



- Koristeći podatke iz tablice učenici mogu generalizirati:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{40} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8.89$$

$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{50} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13.89$$

$$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{60} = \frac{5}{9} (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} (1 + 3 + \dots + (2n - 1)) = \frac{5}{9} \cdot n^2$$

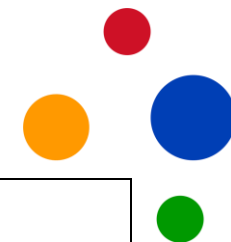
Važan je zaključak: ako promatramo put kočenja, tražimo onaj trenutak kad je brzina jednaka 0; toliko ćemo puta oduzimati 10 od  $v_0$  dok ne dobijemo 0:

$$v_0 - 10n = 0 \Rightarrow n = \frac{v_0}{10}$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180} v_0^2 \approx 0.0056 v_0^2$$

U ovu formulu uvrštavamo  $v_0$  u km/h i dobivamo udaljenost u metrima.

- Učenici mogu koristiti kalkulator i upisivati podatke u tablice kao decimalne brojeve. Ovi rezultati neće biti egzaktni pa uočavanje pravilnosti neće biti tako jednostavno.
- Učenici mogu koristiti podatak da se brzina smanjuje za 10 km/h svakih 0.4 sekundi. To znači da se brzina smanjuje za 25 km/h svake sekunde ili za 6.94 m/s svake sekunde, što znači da je akceleracija  $a = \frac{125}{18} = 6.94$  m/s<sup>2</sup>.  
Koristeći formule  $d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2$  i računajući s brzinama u metrima u sekundi mogu dobiti tražene vrijednosti za put i popuniti tablice. U tom im slučaju neće biti potrebne prosječne brzine.



Učenici mogu pomoću formula iz fizike:

$$v = v_0 - at, d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2$$

doći do opće formule bez računanja udaljenosti za konkretne početne brzine. Pri tome koriste važan zaključak: ako promatramo put kočenja, tražimo onaj trenutak kad je brzina jednaka 0. Iz prve formule ( $v = 0$ ) mogu izračunati vrijeme  $t = \frac{v_0}{a}$  i uvrstiti u drugu te dobiti

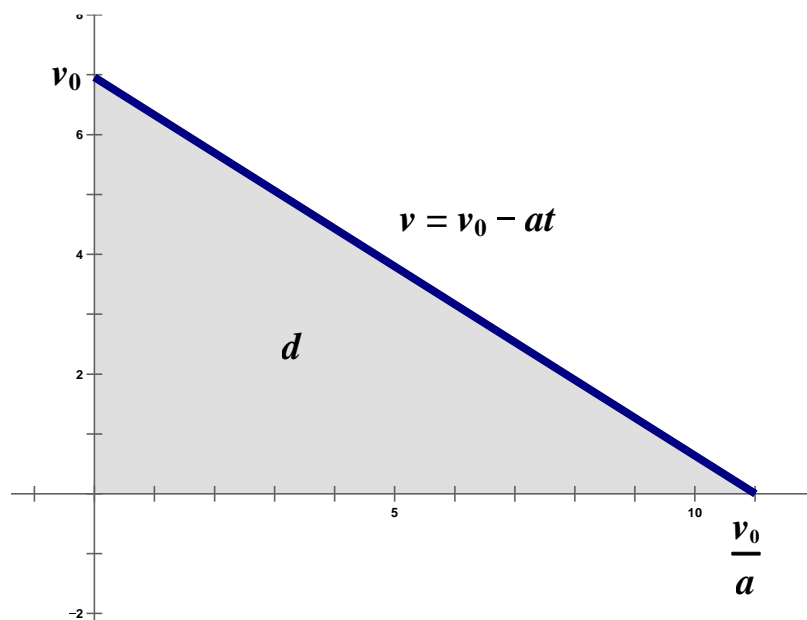
$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.8} = 0.072v_0^2.$$

U ovoj formuli uvrštavamo  $v_0$  u m/s i dobivamo udaljenost u metrima.

- Ako učenici računaju akceleraciju u km/h<sup>2</sup> dobit će  $a = 90000$  km/h<sup>2</sup>, uvrstiti  $v_0$  u km/h i dobiti udaljenost u kilometrima

$$d = \frac{v_0^2}{180000}, \text{ ili u metrima } d = \frac{v_0^2}{180}.$$

- Učenici mogu nacrtati  $v$ - $t$  graf i računati udaljenost kao površinu ispod grafa:  $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0.072v_0^2$ . U ovoj formuli uvrštavamo  $v_0$  u m/s.







	<b>Vrijeme (sekunde)</b>	<b>Promjena brzine za vrijeme kočenja (km/h)</b>	<b>Prosječna brzina (km/h)</b>	<b>Prosječna brzina (m/s)</b>	<b>Vremenski interval <math>\Delta t</math> (s)</b>	<b>Prijeđeni put <math>\Delta d</math> (m)</b>
	$t = 0$ do $t = 0,4$	$v = 40$ do $v = 30$	35			
<b>Put kočenja (m)</b>						

Brzina neposredno prije kočenja (km/h)	40							
Put kočenja (m)								