MERIA Scenario “ab-ba”

De distributieve wet

Leerdoel	Gebruik van de distributieve wet $n(a+b) = n\,a + n\,b$.
Bredere leerdoelen	Onderzoekend leren en probleem oplossen.
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Elementair rekenen.
Leerjaar	Brugklas, leerlingen van ca 13 jaar.
Tijd	20-25 minuten
Benodigd materiaal	Pen en papier, eventueel ook een rekenmachine.
Observaties bij implementaties De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):	
Probleem: Neem een getal van twee cijfers, bijvoorbeeld 83. Bereken vervolgens het verschil tussen dat getal en het omgekeerde (voor 83 is dat 38). Wat krijg je als je het kleinere getal van het grotere aftrekt (83-38)? Onderzoek wat er gebeurt als je dit met verschillende getallen doet. Zie je een patroon? Kun je dat verklaren?	

Fase	**Actie van de leerkracht incl. uitleg**	**Acties en reacties van de leerlingen**	**Observaties bij implementaties**
Devolutie (didactisch) 3 minuten	De docent presenteert bovenstaand probleem met het voorbeeld van 83 om zeker te zijn dat de leerlingen begrijpen wat met ‘omgekeerde’ bedoeld wordt en welke berekening van hen verwacht wordt.	Leerlingen luisteren, berekenen 83-38=... Vervolgens proberen ze enkele andere getallen en proberen het probleem te begrijpen.	
Actie (a-didactisch) 10 – 15 minuten	De docent loopt rond in de klas en bekijkt welke strategieën leerlingen hanteren.	Leerlingen proberen patronen te vinden en die te verklaren.	

Formulering (a-didactisch of didactische als de docent denkt dat extra ondersteuning nodig is) 3 minuten	De docent laat voor elke geobserveerde strategie een groepje hun oplossing op het bord formuleren. Als leerlingen een oplossing snel vinden, dan kan de docent hen ook uitdagen om voor getallen met meer cijfers te onderzoeken wat er gebeurd.	De geselecteerde groepjes presenteren hun oplossing. Andere leerlingen luisteren, vergelijken hun oplossing met die van het bord en stellen vragen. Hier zijn twee opties: (1) De groepen hebben gevonden dat het verschil deelbaar is door 9. (2) De leerlingen hebben een verklaring gevonden zoals (A), (B), (C), (D) of (E) hieronder.	
Validering (didactisch) 7 minuten	Bij optie (1) kan de docent een klassengesprek starten met de vraag hoe we zeker kunnen zijn dat die deelbaarheid waar is voor alle getallen van 2 cijfers. Het resultaat kan aanpak (A), (B), (C), (D) of (E) hieronder zijn. Die wordt dan besproken en gezien als validering voor de bevindingen van de leerlingen.		
Institutionalisering (didactisch of a-didactisch) 5 minuten (of meer)	De docent verklaart hoe de stap $9a - 9b = 9(a - b)$ of $9 \cdot 8 - 9 \cdot 3 = 9(8 - 3)$ een voorbeeld is van een meer abstracte wiskundige wet $n(a + b) = n\,a + n\,b$. De docent kan meer varianten van deze wet tonen.		

Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen	• Manier (A): algebraïsche aanpak Elk getal kun je schrijven als $10a + b$ met $a = 1,2, \ldots ,9$ en $b = 0,1,2, \ldots ,9$. Dan is het omgekeerde gelijk aan $10b + a$. Het verschil tussen deze twee getallen is plus of min $10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. • Manier (B): impliciet algebraïsche aanpak (met een numeriek voorbeeld) Stel het getal is 83, dan geldt $83 = 10 \cdot 8 + 3$. Het omgekeerde is dan $38 = 10 \cdot 3 + 8$. Het verschil tussen deze twee getallen is plus of min $$83 - 38 = 10 \cdot 8 + 3 - (10 \cdot 3 + 8) = 9 \cdot 8 - 9 \cdot 3 = 9(8 - 3) = 9 \cdot 5.$$ • Manier (C): Merk op dat de bewering waar is voor alle getallen in de tafel van 9, omdat ook het omgekeerde in de tafel van 9 valt (en het verschil dus ook in de tafel van 9 zit): 09 en 90, 18 en 81, 27 en 72 etc. Dan betekent dat 1 optellen bij zo'n getal betekent dat je 10 optelt bij het omgekeerde, en 2 optellen betekent 20 optellen bij het omgekeerde, etc. Voor het verschil betekent dit het optellen van plus of min 10-1 of 20-2 of 30-3 etc. wat ook telkens in de tafel van 9 zit. Bijvoorbeeld, neem 39. Dit is 36 + 3, waarbij 36 in de tafel van 9 zit. Dus, 36+3-(63+30) is deelbaar door 9 omdat 36, 63 en 3-30 dat ook zijn. • Manier (D): Deze aanpak gebruikt het kenmerk dat een getal deelbaar is door 9 dan en slechts dan als de som van de cijfers deelbaar is door 9. We schrijven een getal 35 als [3.5] om de afzonderlijke cijfers te kunnen volgen. Veronderstel je koos het getal $[a.b]$ met als omgekeerde $[b.a]$. En neem aan dat $a > b$, dan is het verschil $[a.b] - [b.a] = [(a - 1) - b.(10 + b) - a]$. De som van de cijfers is dan $a - 1 - b + (10 + b - a) = 9$. Wat te bewijzen was. Voorbeeld: $[5.3] - [3.5] = [4 - 3.13 - 5]$ en $4 - 3 + 13 - 5 = 9$. • Manier (E): De veronderstelling is waar voor 1, omdat 1-10=-9. Vervolgens geven we een inductief bewijs voor alle volgende getallen. Veronderstel het is waar voor de getallen tot n. Voor n+1 geldt dan $n + 1 - (n + 1)_{omgekeerd} = n + 1 - (n_{omgekeerd} + 10)$ of $n + 1 - (n + 1)_{omgekeerd} = n + 1 - (n_{omgekeerd} - 89)$. Zowel -9 als +90 zijn veelvouden van 9 en dus is het resultaat ook een veelvoud van 9.