MERIA Scenario “Glijbaan”

Introductie van de afgeleide

Leerdoel	Conceptueel begrip dat de helling van een kromme gelijk is aan de helling van de raaklijn.
Bredere leerdoelen	Het wiskundig modeleren van een glijbaan met grafieken en functies. De helling berekenen (afgeleide van de functie) met de hand of ICT. Een betekenisvolle introductie van calculus. Onderzoeksvaardigheden: experimenteren met verschillende grafieken of functies op papier en met ICT, een iteratief proces om de oplossing te verbeteren, verschillende strategieën vergelijken, de eigenschappen van de gevonden oplossing verantwoorden. Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen kunnen hun ervaring met gladheid van een object verbinden aan de wiskundige begrippen van de raaklijn aan een kromme en de afgeleide van een functie. De wiskundige modellen kunnen gebruikt worden om 3D objecten te printen met een 3D printer (ICT vaardigheden) of door het zelf te maken met ander materiaal (handvaardigheid).
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Grafieken, de vergelijkingen van een lijn en sommige niet-lineaire krommen (cirkel, parabool, of de grafiek van een exponentiële functie).
Leerjaar	Klas 4-6, van 16-18 jaar (wanneer de afgeleide wordt geïntroduceerd)
Tijd	60 - 90 minuten, twee lessen
Benodigd materiaal	Papier, pen, ICT-instrument voor het maken van grafieken zoals GeoGebra (het gebruik van ICT is technisch gezien niet nodig, maar het kan de ervaring van de leerlingen flink verbeteren).

Observaties bij implementaties
De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):

Probleem:
Kijk naar de foto’s van een skischans en de glijbaan. Beide hebben een gekromd deel aan de onder- en/of bovenkant, met een recht stuk in het midden. Maak gebruik van wiskunde om zo’n vorm te ontwerpen. Focus op slechts één van de gekromde delen en het rechte stuk in het midden. Denk eraan dat het niet fijn is om een hobbelige rit te hebben. Introduceer een coördinatensysteem en vindt de vergelijkingen voor één gekromd deel en de rechte lijn.
Opmerking: Laat voor een langere les, met meer modeleer activiteit, de laatste zin van de taakbeschrijving weg (zie de module voor extra les fases).

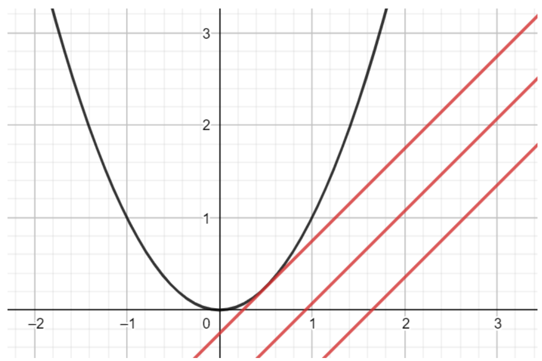
De Holmenkollen skischans in Oslo, Noorwegen. Foto genomen door Mathias Stang. Een kinder-glijbaan.

Fase	Actie van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties bij implementaties
Devolutie (didactisch) 5 min	De leerkracht legt het probleem voor. De leerkracht wijst erop dat de leerlingen een glijbaan moeten ontwerpen met een soepele rit. De leerkracht zorgt ervoor dat leerlingen zich richten op slechts een van de gekromde delen en het rechte (lineaire) stuk in het midden.	Leerlingen gaan zitten in groepen van twee of drie. Leerlingen raken enthousiast!	
Actie (a-didactisch) 20 min	De leerkracht registreert de ideeën, strategieën en bevindingen van de leerlingen. Als leerlingen niet goed doorhebben dat de twee delen vloeiend moeten aansluiten, moet de leerkracht dat duidelijk maken. Als er na tien minuten absoluut geen ideeën zijn voor de keuze van het gekromde stuk, herinnert de leerkracht de leerlingen eraan hoe de grafieken van $y = x^2$ en/of $y = \cos x$ eruitzien (niet de cirkel) tijdens een klassikale (didactische) onderbreking. Als studenten met de cirkel oplossing komen is een van de daaropvolgende problemen “wat als je de hoek verandert, of	Leerlingen maken een schets en introduceren een coördinatensysteem. De aanpak van leerlingen kan vaak beschreven worden met een van de volgende categorieën: 1. Grenslijn aanpak: ze kiezen een vrije lijn die ze vervolgens bewegen (transleren en roteren) tot dat er maar één snijpunt is in het gewenste gebied. 2. Snijlijnen aanpak: ze kiezen een punt op de kromme: het bestemde punt om te raken. Daarna kiezen ze een ander punt op de kromme om een lijn te maken. Dat punt dichterbij het	

	het punt waar de lijn en cirkel in elkaar overgaan? Hoe veranderd dan de vergelijking van de lijn?". Daarna vraagt de leerkracht de groep om zich te richten op wat anders dan een cirkel.	eerste punt zetten geeft een betere aansluiting. 3. Lineaire benadering aanpak: Leerlingen kiezen een punt op de kromme, tekenen een lijn en proberende helling aan te passen zodat die zo goed mogelijk aansluit op de kromme. Sommige gebruiken mogelijk een cirkel als kromme en het feit dat de raaklijn altijd loodrecht op de straal staat. We noemen dit de *cirkel oplossing*. Zie hieronder voor details over deze aanpakken in de sectie *Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen*.	
Formulering (a-didactisch) 15 min	De leerkracht vraagt de leerlingen om hun resultaten te formuleren. Terwijl ze daaraan werken kiest de leerkracht groepen met verschillende aanpakken die hun bevindingen moeten presenteren.	Leerlingen formuleren hun resultaten binnen de groep. Sommige groepen presenteren hun bevindingen.	
Validatie (didactisch) 10 min	De leerkracht vraagt: "Wanneer weten we of de oplossing goed is?" en "Is er een beste oplossing?". Als leerlingen alleen visuele validatie hebben gebruikt, kan de leerkracht	Ze leggen uit waarom een oplossing goed is, en de een mogelijk beter is dan de ander. • Visuele validatie: Sommigen zullen uit gaan van hun visuele evaluatie van het ontwerp: als het er goed uit ziet,	

	algebraïsche of numerieke aanpakken voorstellen voor validatie.	dan is het goed. Mogelijk zoomen ze in op de kromme. • Algebraïsche validatie: De leerlingen rekenen snijpunten algebraïsch uit en zien mogelijk dat het lokaal uniek is. • Numerieke validatie: leerlingen kunnen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ uitrekenen voor een paar punten op de kromme om te zien of het ongeveer klopt met de helling van de lijn. Als de leerlingen gewerkt hebben aan een cirkel-oplossing en de raaklijn hebben uitgerekend, moeten ze er zeker van zijn dat ze een raaklijn hebben en uitleggen waarom (meetkundig en/of algebraïsch bewijs).	
Institutionalisering (didactisch) 10 min	De leerkracht bespreekt het idee van een raaklijn op een manier die strookt met de ideeën waar de leerlingen zelf op zijn gekomen. De leerkracht belicht een *of meer* van de volgende perspectieven op de helling van een kromme in een punt: a) Beste lokale benadering. Volgt visuele validatie.	Sommigen zullen iets zeggen over de helling. Sommigen zullen het woord “raaklijn” gebruiken of de knop in GeoGebra. Leerlingen luisteren en raken geïnteresseerd in het berekenen van de beste oplossing voor het probleem voor willekeurige vormen en krommen.	

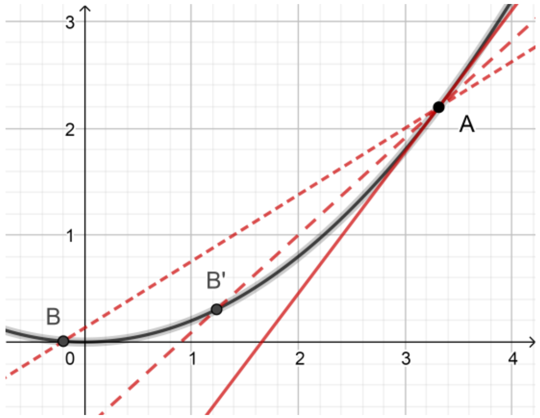
	b) Lokale unieke grenslijn – een snijpunt. Volgt algebraïsche validatie. c) Klassieke definitie met gebruik van een snijlijn en limieten van verschil quotiënten. Volgt numerieke validatie. Als een cirkel oplossing naar boven komt, bespreek dan een raaklijn aan de cirkel en een raaklijn aan andere krommes. De leerkracht brengt aan de aandacht dat de beste oplossing voor een cirkel de raaklijn is en dat de leerlingen eigenlijk de raaklijn voor andere krommen hebben benaderd.		

Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen	Er zijn verschillende opties voor wat de leerlingen kunnen doen, bijvoorbeeld: 1. Grenslijn aanpak: Leerlingen kiezen bijvoorbeeld voor $y = x^2$. Algebraïsche validatie: overweeg vanaf hier de familie aan lijnen $$\mathrm{y = x + b.}$$ De grenslijn wordt gevonden door y-eliminatie: $$\mathrm{x^2 = x + b.}$$ Deze vergelijking heeft een unieke oplossing als de determinant nul is: $$\mathrm{1 + 4b = 0.}$$ Dus $\mathrm{b} = -\frac{1}{4}$ geeft een gladde glijbaan. 

2. Snijlijn aanpak:

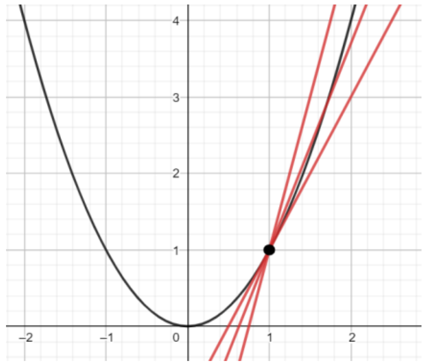
   Leerlingen kiezen een vast punt op de kromme, het punt waarop aangesloten moet worden. Daarna kiezen ze een ander punt op de kromme en trekken ze een lijn tussen de twee punten. Door het tweede punt richting het eerste punt te bewegen krijg je een steeds betere benadering van de helling in dat eerste punt.

   Deze aanpak werkt het beste met ICT.

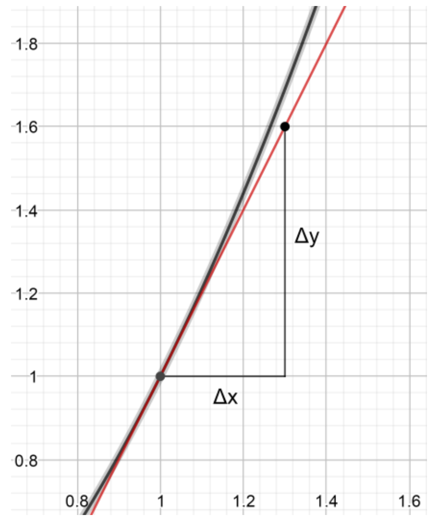


3. Lineaire benadering aanpak:

   Leerlingen werken bijvoorbeeld met $y = x^2$ en het punt (1,1) waar de kromming eindigt en de lijn $y = ax + b$ begint. Daarna gokken ze mogelijk dat $a > 1$ en proberen ze meerdere waardes (waarvan $a = 2$ juist is). Proberen betekent een grafiek maken.
   Door de lijn te beschrijven als $y = ax + b$, leiden ze af dat $a + b = 1$.
   Dus voor elke helling a, kunnen ze b uitrekenen.



Sommige zullen een benadering van a bepalen door twee punten op de getekende lijn te kiezen en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ toe te passen.



Numeriek voorbeeld: Leerlingen vinden mogelijk dat $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.6}{0.3} = 2$. Uit $a + b = 1$ volgt $b = -1$.

Validatie wordt waarschijnlijk visueel gedaan, maar kan ook numeriek worden gedaan, mogelijk voor te stellen door de leraar, omdat die methode vergelijkbaar is. Kies nu twee punten op de parabool en bereken $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; bijvoorbeeld (1,1) en (1.1 , 1.21). Daarna geeft

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1.$$

Best dichtbij!

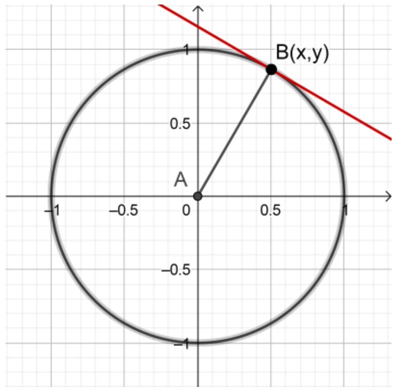
Leerlingen kunnen ook valideren door snijpunten van de lijn en parabool te berekenen (algebraïsche validatie). Als leerlingen bekend zijn met kwadratische vergelijkingen en de discriminant kunnen ze verder gaan en het systeem aan vergelijkingen oplossen:

$$y = x^2, y = ax + 1 - a,$$

En $x^2 - ax + a - 1 = 0$ krijgen.
De vergelijking zal exact één oplossing hebben als de discriminant gelijk is aan nul:

$$a^2 - 4(a-1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2.$$

4. Cirkel oplossing: leerlingen kiezen een cirkel.
   Als de leerlingen een cirkel hebben gekozen, kan dat bijvoorbeeld



$$x^2 + y^2 = 1$$

zijn met het punt $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ als aansluiting, wat overeenkomt met de hoek $\frac{\pi}{4}$. Als ze weten dat de raaklijn van een cirkel loodrecht op de straal staat, kunnen ze bepalen dat $a = -1$. Daarna kunnen ze de vergelijking van de raaklijn opstellen.
Als de leerkracht ze vraagt om een ander punt (x, y) te kiezen, kunnen ze de helling a van de raaklijn door (x, y) bepalen uit de helling van de radiale lijn door (x, y), welke $\frac{y}{x}$ is. Dus $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (in het algemeen), maar waarschijnlijk doen leerlingen dit voor een concreet punt.
Deze overweging kan wat simpeler worden als leerlingen bekend zijn met en gebruik kunnen maken van vectoren.

5. Met ICT (GeoGebra of soortgelijk)
   Als leerlingen GeoGebgra (of andere ICT) gebruiken, volgen ze waarschijnlijk dezelfde stappen en redenaties als zonder. Het verschil is dat de ICT de vergelijking van de lijn sneller berekent en een nauwkeurigere representatie van de kromme(n) weergeeft. Met ICT kunnen de leerlingen meer opties proberen in minder tijd en daardoor meer ontdekken dan wanneer ze met pen en papier werken. Bijvoorbeeld:
   - Sommigen vinden en gebruiken de knop voor de raaklijn.
   - Ze tekenen mogelijk een kromme en een arbitraire “goede” lijn door een punt op die kromme en een ander punt. Dan zoomen ze in en controleren ze of het er goed genoeg uitziet. Ze kunnen het tweede punt verplaatsen om een betere overgang te krijgen. Als ze hun beste lijn hebben gevonden kunnen ze met een meetinstrument de vergelijking van de lijn aflezen.
   - Sommige leerlingen beginnen met het inzoomen op een punt totdat de grafiek recht lijkt te zijn. Dan kunnen ze twee punten op de kromme kiezen en de vergelijking van de lijn daardoor berekenen (of tenminste een soort raaklijn tekenen).

- Mogelijk proberen ze te kijken of hun lijn snijpunten heeft met de kromme (in dit geval maakt het uit of ze een lijnstuk of lijn hebben getekend). Sommige zullen zelfs GeoGebra de snijpunten van de lijn en kromme laten zien, waardoor het ze kan opvallen dat bij het aanpassen van de helling van de lijn waar één snijpunt van vaststaat, de locatie van het andere snijpunt verandert (zoals uitgelicht in de institutionalisering stap). Omdat ze dan meteen het resultaat zien, kunnen ze de hypothese vormen dat de beste oplossing is wanneer punten A en D samenkomen (zie het plaatje).