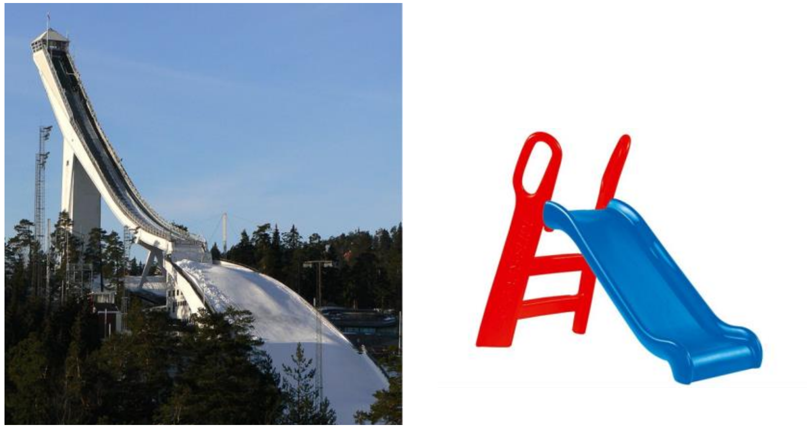
MERIA scenarij “Tobogan”

Uvod u derivacije

Ciljano znanje	Konceptualno razumijevanje nagiba krivulje kao nagiba tangente.
Širi ciljevi	Matematičko modeliranje tobogana pomoću grafova funkcija. Izračunavanje nagiba (derivacija funkcije) ručno ili pomoću ICT-a. Smisleni uvod u derivacije. Istraživačke vještine: eksperimentiranje s različitim grafovima funkcija na papiru i korištenjem ICT-a, ponavljanje procesa za poboljšanje rješenja, uspoređivanje različitih strategija, obrazlaganje karakteristika dobivenog rješenja. Interdisciplinarne vještine: učenici mogu povezati svoje iskustvo glatkoće fizičkih objekata s matematičkim pojmovima tangente na krivulju i derivacijom funkcije. Matematički modeli mogu se koristiti za izradu 3D objekata ispisivanjem na 3D pisaču (ICT vještine) ili proizvodnjom s drugim materijalima (zanati).
Potrebno matematičko predznanje	Grafovi i jednadžbe pravca i nekih nelinearnih krivulja (kružnica, parabola ili graf eksponencijalne funkcije)
Razred	Dob 16-18, razred 10 -12 (kad se uvode derivacije)
Vrijeme	60 - 90 minuta, dva školska sata
Potrebni materijal	Papir, olovka, ICT - program dinamične geometrije kao što je GeoGebra (Upotreba ICT-a nije neophodna, ali uvelike povećava iskustvo učenika)
Primjedbe nakon provedbe. Kontekst promatranja: razred, ustanova, zemlja, itd.	

Problem:

Promotrite slike skijaške skakaonice i dječjeg tobogana. Oboje se sastoji od zakrivljenog dijela na gornjem ili donjem dijelu i jednog ravnog dijela u sredini. Primijenite matematiku i dizajnirajte takav oblik. Rješenje neka se sastoji od jednog ravnog i samo jednog zakrivljenog dijela. Pazite da spuštanje ne bude neugodno.
Uvedite koordinatni sustav i pronađite jednadžbe za *jedan* zakrivljeni dio i pravac.
Napomena: Za dužu lekciju, sa više aktivnosti modeliranja, izostavite posljednju rečenicu iz opisa zadatka (vidite modul za dodatnu fazu).



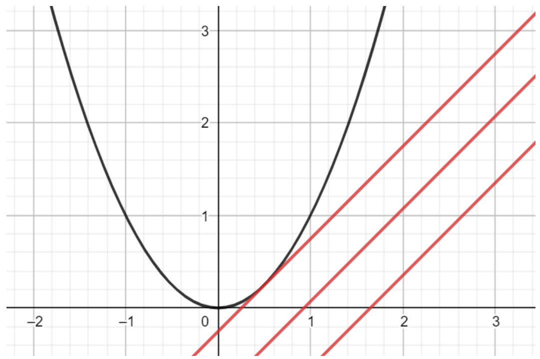
Slika 1: Skakonica Holmenkollen u Oslu, Norveška. Autor slike Mathias Stang. 1 veljača 2007. GFDL, CC Attribution 2.5 i dječji tobogan.

Faze	**Postupci nastavnika, uključujući i upute**	**Postupci i reakcije učenika**	**Primjedbe nakon provedbe**
Primopredaja (didaktički) 5 min	Nastavnik predstavlja problem. Nastavnik ističe da učenici trebaju dizajnirati glatki spust tobogana. Nastavnik osigurava da se učenici koncentriraju na samo jedan zakrivljeni dio i ravni (linearni) dio u sredini.	Učenici se dijele u parove ili tročlane grupe. Učenici se zainteresiraju za problem.	
Djelovanje (adidaktički) 20 min	Nastavnik uočava učeničke ideje, strategije i zaključke. Ako učenici ne shvate da se dva dijela trebaju spojiti glatko, nastavnik treba raspraviti to pitanje.	Učenici skiciraju spust i uvode koordinatni sustav. Pristupi učenika najčešće se mogu opisati u jednoj od slijedećih kategorija:	

	Ako nakon 10 minuta nema nikakve ideje za odabir modela zakrivljenog dijela nastavnik podsjeća učenike na oblik grafa funkcije $y = x^2$ i/ili $y = \cos x$ (ne podsjeća na kružnicu) i situacija postaje didaktička. Ako su učenici došli do rješenja s kružnicom, problem s kojim mogu nastaviti je: „Što ako promijenite kut ili što ako promijenite točku u kojoj se pravac i kružnica sastaju? Kako će se promijeniti jednadžba pravca? Nakon toga, nastavnik će od grupe učenika tražiti da pronađu rješenje u kojemu krivulja nije kružnica.	1. Pristup pomoću granične linije: učenici odabiru slobodni pravac i pomiču ga (translatiraju i rotiraju) dok ne izgleda kao da postoji samo jedno sjecište u području koje promatraju. 2. Pristup pomoću sekante: učenici odabiru jednu točku na krivulji – točku u kojoj žele odrediti tangentu; zatim odabiru još jednu točku na krivulji i pomiču drugu točku bliže prvoj kako bi dobili glatki prijelaz. 3. Pristup pomoću linearne aproksimacije: Učenici odabiru jednu točku na krivulji, crtaju pravac i zatim pokušavaju prilagoditi nagib tako da pravac najbolje odgovara krivulji. Neki učenici mogu koristiti kružnicu kao krivulju i činjenicu da je tangenta okomita na radijus. Ovo rješenje ćemo zvati *rješenje s kružnicom.* U nastavku pogledajte pojedinosti o ovim (kategorijama) pristupa u odjeljku *Mogući načini da učenici ostvare ciljno znanje*.	
Formulacija (adidaktički)	Učitelj traži od učenika da formuliraju svoje rezultate. Dok učenici rade na tome, nastavnik bira grupe s različitim	Učenici formuliraju rezultate unutar svoje skupine. Neke skupine predstavljaju svoja rješenja.	

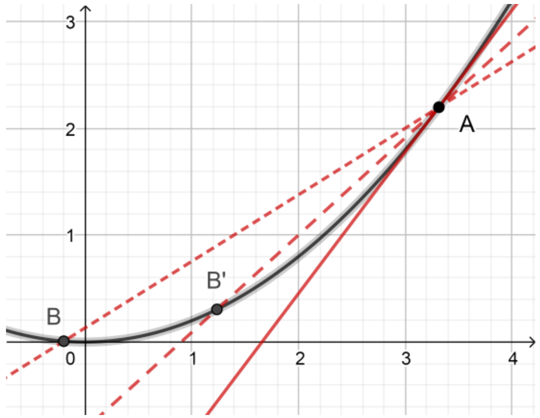
15 min	pristupima koji će predstaviti svoja rješenja.		
Potvrđivanje (didaktički) 10 min	Nastavnik pita: „Kako znamo da je rješenje dobro? Postoji li najbolje rješenje?“ Ako su učenici samo vizualno potvrđivali svoje rješenje, nastavnik može predložiti numeričke pristupe za potvrđivanje.	Učenici objašnjavaju zašto je neko rješenje dobro i može li jedno biti bolje od drugog. • Vizualno potvrđivanje: Neki će se učenici osloniti na vizualnu procjenu dizajna; ako izgleda dobro, onda je dobro. Također učenici mogu zumirati krivulju. • Algebarsko potvrđivanje: Učenici mogu izračunati točku(e) presjeka algebarski i možda vidjeti da je ona lokalno jedinstvena. • Numeričko potvrđivanje: Učenici mogu izračunati $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za dvije točke na krivulji i vidjeti je li to približno nagib njihovog pravca. Ako su učenici radili na rješenju s kružnicom i odredili tangentu, trebali bi biti sigurni da imaju najbolje rješenje i objasniti zašto (geometrijski dokaz i/ili algebarski ili oboje).	
Institucionalizacija (didaktički) 10 min	Nastavnik diskutira zapis tangente na način koji odgovara rješenjima do kojih su došli učenici. Nastavnik ističe jedno ili više od sljedećih stajališta o nagibu krivulje u točki:	Neki će učenici spominjati nagib. Neki mogu koristiti riječ „tangenta“ ili tipku za tangentu u GeoGebri. Učenici slušaju i zainteresirani su za računanje najboljeg rješenja za proizvoljne oblike i krivulje.	

	a) najbolja lokalna aproksimacija slijedi vizualno potvrđivanje b) lokalno jedinstvena granična linija – jedna točka presjeka slijedi algebarsko potvrđivanje c) klasična definicija koja koristi sekantu i limes kvocijenta diferencija slijedi numeričko potvrđivanje Ako su neki učenici došli do rješenja s kružnicom raspravlja se o ideji tangente na ostale krivulje. Nastavnik ističe da je najbolje rješenje za kružnicu tangenta i da su učenici zapravo aproksimirali tangentu za ostale krivulje.		

Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje	Više je mogućnosti što učenici mogu činiti, na primjer: 1. Pristup pomoću granične linije Učenici odabiru na primjer $y = x^2$ Algebarsko potvrđivanje: promatrajući familiju pravaca $y = x + b$ Granična linija dobiva se eliminacijom varijable y: $x^2 = x + b$. Jednadžba ima jedinstveno rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli: $1 + 4b = 0$. Dakle $b = -\frac{1}{4}$ daje glatki tobogan. 

2. Pristup pomoću sekante:

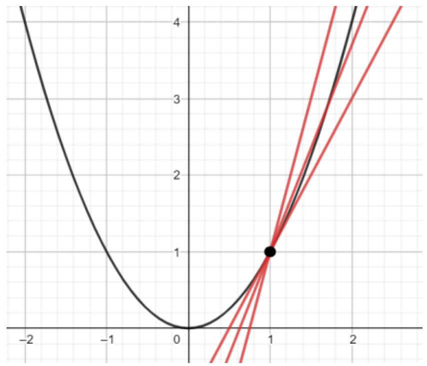
   Učenici fiksiraju jednu točku na krivulji, točku u kojoj će položiti tangentu. Zatim odabiru još jednu točku na krivulji, crtaju pravac kroz te dvije točke i pomiču drugu točku bliže prvoj kako bi dobili glatko spajanje. Što bliže odaberemo točku to je aproksimacija bolja. Ovaj pristup najbolje funkcionira s ICT-om.



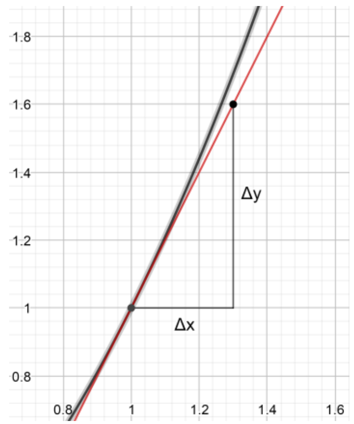
3. Pristup pomoću linearne aproksimacije:

   Na primjer, učenici odabiru $y = x^2$ i točku $(1,\ 1)$ kao točku u kojoj krivulja prestaje i počinje pravac $y = a\,x + b$. Mogu pogoditi da je $a > 1$ i pokušavati s različitim vrijednostima (od kojih je $a = 2$ točna). Pokušavanje znači skiciranje ili crtanje grafova.

   Učenici zapisuju jednadžbu pravca $y = a\,x + b$, a iz poznate točke pravca zaključuju $a + b = 1$ pa za svaki odabrani nagib pravca mogu izračunati b.



Neki učenici mogu odrediti aproksimaciju koeficijenta a koristeći dvije točke na nacrtanom pravcu i računajući $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:



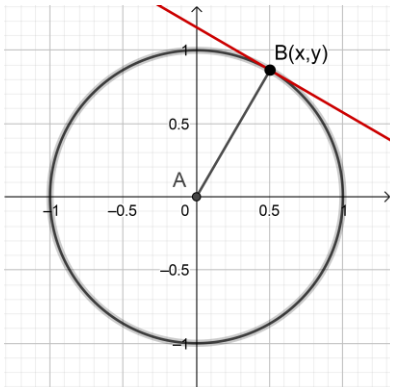
Numerički primjer: učenici mogu odrediti $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.6}{0.3} = 2$.
Zatim iz $a + b = 1$ slijedi $b = -1$. Potvrđivanje je vjerojatno vizualno, ali može biti napravljeno i numerički, moguće uz sugestiju nastavnika, budući da je metoda slična.
Učenici mogu odabrati dvije točke na paraboli i izračunati $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; na primjer (1,1) i (1.1 , 1.21). Tada je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1.$$

što je blizu prethodnom rezultatu.
Učenici mogu potvrditi rješenje računajući sjecište pravca i parabole (algebarsko potvrđivanje). Ako su učenici upoznati s kvadratnim jednadžbama i diskriminantom mogu nastaviti rješavajući sustav jednadžbi:
$y = x^2, y = ax + 1 - a$, i dobiti $x^2 - ax + a - 1 = 0$. Jednadžba ima jedno rješenje ako je diskriminanta jednaka 0:
$a^2 - 4(a - 1) = 0 \ \Rightarrow \ a = 2$.

4. Rješenje s kružnicom
Učenici odabiru kružnicu.
Učenici koji biraju kružnicu mogu odabrati na primjer kružnicu

$$x^2 + y^2 = 1$$



i točku $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, koja odgovara kutu od $\frac{\pi}{4}$. Ako znaju da je polumjer kružnice okomit na tangentu, mogu odrediti koeficijent smjera pravca $a = -1$. Nakon toga mogu odrediti jednadžbu tangente.
Kada nastavnik traži da odaberu drugu točku, učenici mogu odrediti kvocijent diferencija a tangente pomoću kvocijenta diferencija pravca na kojem leži radijus, a koji je $\frac{y}{x}$. Dakle $a = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (općenito), ali učenici će vjerojatno ovo napraviti za neku konkretnu točku. Ovo razmatranje može postati jednostavnije ako učenici znaju i koriste vektore.

5. Uz primjenu IKT (Geogebra ili neki slični program)
Ako učenici koriste neki program dinamične geometrije ili neki drugi program vjerojatno će slijediti iste korake u zaključivanju kao i bez primjene IKT-a. Razlika je u tome što IKT računa jednadžbu pravca brže i crta točan graf odabrane krivulje. Učenici će moći proučiti više primjera u kraćem vremenu i uočiti stvari koje ne mogu s olovkom i papirom. Na primjer:

- Neki učenici u Geogebri mogu pronaći tipku za tangentu i krenuti od toga
- Učenici mogu nacrtati krivulju i proizvoljni „dobar“ pravac točkom krivulje i nekom drugom točkom. Mogu zumirati i provjeriti izgleda li nacrtani pravac dobro. Mogu pomicati drugu točku da dobiju bolje rješenje. Mogu odabrati rješenje koje im najbolje izgleda i pročitati jednadžbu pravca koristeći „alat za mjerenje“.
- Neki učenici mogu započeti zumiranjem u točki krivulje sve dok krivulja ne počne izgledati ravno. Tada mogu odabrati dvije točke na krivulji i odrediti jednadžbu pravca koji ih sadrži (ili barem nacrtati pravac koji je približno tangenta).
- Učenici mogu pokušati provjeriti ima li nacrtani pravac sjecišta s krivuljom (u ovom slučaju će različito zaključivati ako su nacrtali pravac ili polupravac). Neki učenici će možda koristiti program i tako odrediti sjecišta krivulje i pravca. Moći će uočiti da će uz jednu čvrstu točku na krivulji promjena nagiba pravca utjecati na promjenu položaja drugog sjecišta (kao što je navedeno u fazi *Institucionalizacije*). Budući da će odmah vidjeti rezultate, moći će zaključiti da je najbolje rješenje u slučaju kad se točke A i D podudaraju.