Introduktion til den afledede funktion

Scenarie: Rutsjebanen

Tilsigtede viden	At give en forståelse for konceptet for hældningen på en kurve som hældningen for en tangentlinje i et givet punkt.
Bredere kompetencemål	Matematisk modellering, bruge lineære funktioner og grafer. En meningsfuld introduktion til matematisk analyse.
Nødvendige matematiske forudsætninger	Grafer og ligninger for lineære funktioner og nogle ikke-lineære.
Tid	60-90 minutter (2 lektioner)
Niveau	Alder 16-18 år, klassetrin 1. eller 2.g (når differentialregning skal introduceres)
Materialer til rådighed	Papir og blyant, computer med grafprogrammer som fx Geogebra, Ti-Nspire eller lignende (det er strengt taget ikke nødvendigt med computer, men kan gøre oplevelsen større).

Problemstilling:

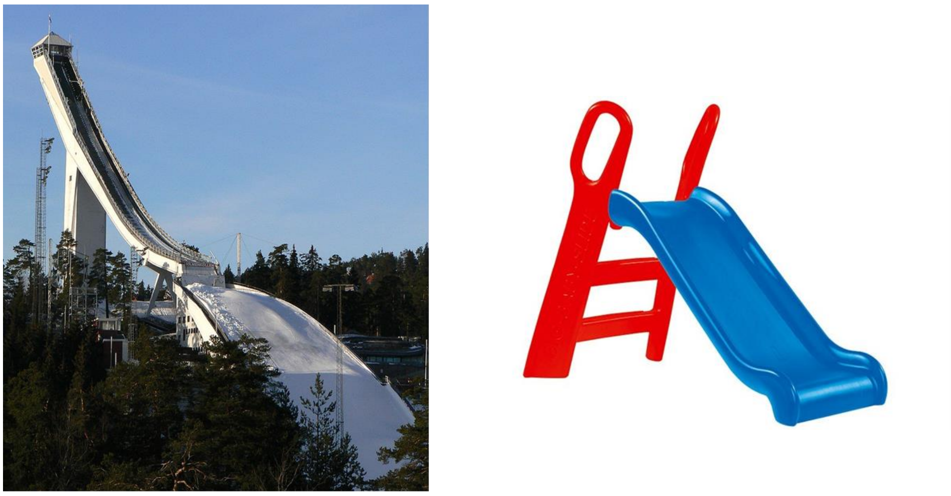

Figure 1: Til venstre: [Holmenkollen ski jump] i Oslo, Norge. Billedet er taget af [Mathias Stang] 1. februar 2007. GFDL, CC Attribution 2.5 . Til højre: en rutsjebane for børn.

Betragt billederne af et skihop samt en rutsjebane. Begge har en buet del nederst og/eller ved toppen og en lige del i midten. Brug matematik til at designe en sådan form. Fokus skal være på bare en af de buede dele og den lige del i midten. Husk, det er ikke rart at have en ujævn tur.

Indfør et passende koordinatsystem og find en forskrift for den ene buede del samt den lige del af kurven. *Bemærk*: For en længere lektion med mere modelleringsaktivitet udelades denne sidste sætning fra opgavebeskrivelsen (se også under punktet *Variationsmuligheder baseret på de didaktiske variable)*

Fase	Lærerens handlinger inkl. instruktioner	Elevers handlinger inkl. reaktioner
Devolution (didaktisk) 5 minutter	Læreren introducerer problemstillingen. Læreren understreger, at eleverne skal designe en glat kurve, så man får en rar tur på banen. Endelig sikrer læreren sig, at eleverne har forstået, at de blot skal fokusere på den ene af enderne mht. den buede del samt den lineære del i midten.	Eleverne sidder i grupper á 2-3 personer. Eleverne bliver engagerede!
Handling (adidaktisk) 20 minutter	Læreren registrerer elevernes ideer, strategier og opdagelser. Hvis eleverne ikke indser, at de to dele skal forbindes jævnt, skal læreren tage fat i dette. Hvis der er absolut ingen ideer til en funktion, der kan forme den kurvede del efter 10 minutter, skal læreren lave en kort afbrydelse for en didaktisk sekvens, hvor eleverne skal mindes om grafernes udseende for funktionerne $f(x) = x^2$ og/eller $f(x) = \cos(x)$. Hvis eleverne kommer med *cirkelløsningen* (se beskrivelsen i	Eleverne laver en skitse og indfører et passende koordinatsystem. Elevernes tilgang kan normalt falde inden for en af følgende kategorier: 1. “*Grænselinje*” De tegner frit en linje og flytter den (forskydning og rotation), indtil det ser ud som om, der kun er ét skæringspunkt i fokusområdet. 2. “*Sekantlinje*” De vælger et punkt på kurven, som skal være det tilsigtede røringspunkt for tangenten. Derpå vælges et andet punkt

	kolonnen til højre), så er et opfølgende spørgsmål: ”Hvad sker der, hvis du ændrer vinklen eller punktet, hvor cirklen og linjen mødes? Hvordan vil linjens ligning så ændre sig?” Efter dette skal læreren bede eleverne fokusere på løsninger, hvor cirklen ikke anvendes som en del af kurven.	på kurven, og der tegnes en ret linje gennem de to punkter. Det andet punkt rykkes nærmere det første for at opnå en mere glat kurve. 3. “*Lineær approksimation*” Eleverne vælger et punkt på kurven, tegner en linje og prøver herpå at justere hældningen, så den bedst passer til kurven. Nogle vil måske vælge en cirkel som kurve samt det faktum, at en tangent står vinkelret på radius. Vi kalder denne løsning for *cirkelløsningen*. I afsnittet *Mulige veje for eleverne til at opnå den tilsigtede viden* kan du se mere udførlige detaljer omkring disse tilgange.
Formulering (adidaktisk) 15 minutter	Læreren beder eleverne formulere deres resultater. Mens eleverne arbejder med deres præsentation, udvælger læreren grupper med forskellige tilgange til løsningen og rækkefølgen til præsentationerne.	Eleverne formulerer deres resultater i gruppen. I nogle grupper præsenterer en elev deres bud på en kurve.
Validering (didaktisk) 10 minutter	Læreren stiller spørgsmålene: ”Hvordan ved vi, at vi har en god løsning?” Og “Er der en bedste løsning?” Hvis eleverne kun har brugt visuel validering, kan læreren foreslå en algebraisk eller en numerisk løsning til validering.	Eleverne forklarer, hvorfor nogle løsninger er gode, og hvorfor nogle løsninger er bedre end andre. • *Visuel validering*: nogle grupper vil stole på deres visuelle evaluering af designet. Hvis det ser godt ud, så er det fordi, det er godt. De vil måske endda styrke argumentet ved

		at zoome ind og bekræfte deres tese. • *Algebraisk validering*: eleverne kan beregne skæringspunktet mellem den retlinede del og den ”bløde” del algebraisk og måske se, at det lokalt er entydigt. • *Numerisk validering*: eleverne kan beregne $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ for to punkter på kurven og undersøge, om det tilnærmet svarer til hældningen for deres linje. Hvis eleverne har arbejdet med *cirkelløsningen* og beregnet tangentens ligning, så skal de tjekke, at de har en tangent og forklare hvorfor (geometrisk og/eller et algebraisk bevis).
Institutionalisering (didaktisk) 10 minutter	Læreren drøfter begrebet tangentlinje således, at det følger op på det, eleverne kom frem til. Læreren kan fremhæve et *eller flere* af følgende betragtninger på hældningen for en kurve i et punkt: a) Den bedste approksimation lokalt følger en visuel validering. b) En lokal entydig grænselinje og et skæringspunkt følger en algebraisk validering. c) Klassisk definition ved brug af sekanter og grænseværdien for differenskvotienten følger en numerisk validering.	Nogle elever vil måske sige noget om hældningen. Nogle vil måske bruge ordet ”tangent” eller bruge værktøjet i deres CAS-værktøj. Eleverne lytter og bliver interesseret i at kunne beregne den bedste løsning på problemstillingen for vilkårlige former og kurver.

	Hvis der er dukket en *cirkelløsning* op, så drøftes tangenten for en cirkel og tangenten for andre kurver. Læreren minder om, at den bedste løsning for cirklen er tangenten, og at eleverne faktisk har tilnærmet tangenten til de andre kurver.	