

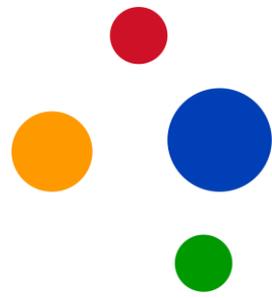


Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

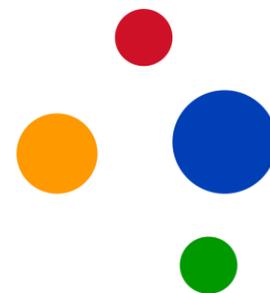
MERIA SJABLOON

VOOR SCENARIO'S EN MODULES





(Deze pagina is bewust leeggelaten)



MERIA SJABLOON VOOR SCENARIO'S EN MODULES

HOOFDREDACTEUR

Carl Winsløw

ORIGINELE TEKST GESCHREVEN DOOR

Britta Jessen, Carl Winsløw

HERZIENINGEN, REDIGERING, EN PROEFLEZEN

Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

VORMGEVING

Irina Rinkovec

VERTALING

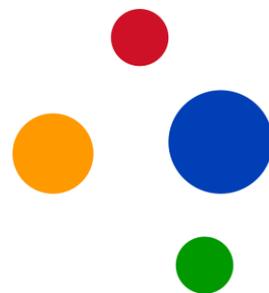
Kees Koenders, Rogier Bos

Project MERIA, februari 2018.

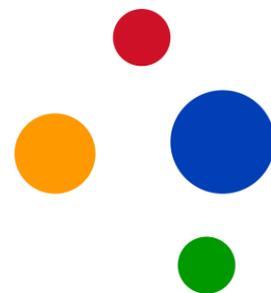
www.meria-project.eu

Dit document is beschermd onder een Creative Commons-licentie.

De inhoud van dit document geeft alleen de mening van de auteurs weer. De Europese Commissie is niet aansprakelijk voor enig gebruik van de informatie die erin is opgenomen.



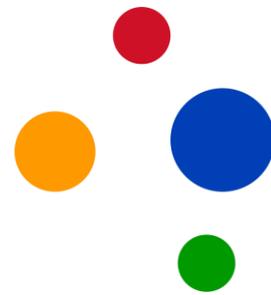
(deze pagina is bewust leeggelaten)



Inhoudsopgave

Inhoud

Introductie	2
Sjabloon voor MERIA scenario	3
Sjabloon voor een MERIA module	5
Het Scenario	5
Uitleg van het materiaal.....	5
Variaties gebaseerd op didactische variabelen	5
Observaties uit de praktijk	5
Evaluatie tools	5
Logica achter en RRWO perspectieven op het scenario.....	6
MERIA scenario en module: Oppervlaktevergroting	7
The teaching scenario.....	7
Uitleg van het materiaal.....	12
Variaties gebaseerd op didactische variabelen	13
Observaties uit de praktijk	14
Evaluatie instrumenten	15
Suggesties voor verdere problemen over oppervlakte en vergroting.....	16
Logica achter en RWO-perspectieven op het scenario	17

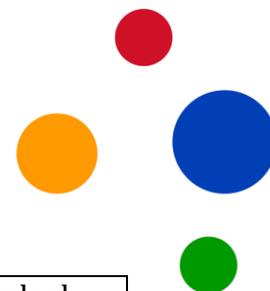


Introductie

Een van de hoofd resultaten van het project MERIA zal een set aan scenario's en modules voor het onderwijs zijn, gebaseerd op de theoretische achtergrond uit de *MERIA praktisch gids voor onderzoekend wiskundeonderwijs*.

Een *scenario* beschrijft een didactische situatie met de bijbehorende onderwijsmethodes. Het beschrijft de doelen van een les in termen van het curriculum, kennisdoelen en competenties. Daarnaast verzorgt het een duidelijke structuur van de les gebaseerd op de *Theorie van Didactische Situaties*. Een *module* bevat bovendien nog handgeschreven en digitaal materiaal bij elk onderwijs scenario, zoals opdrachten voor de leerling of digitale werkbladen. Het bevat de expliciete gedachte achter de keuze voor de vraagstukken, een perspectief van Realistisch wiskundeonderwijs (RWO), ervaringen en resultaten van gecontroleerde implementaties, inclusief potentiële winsten en valkuilen voor studenten met specifieke voorkennis en vaardigheden.

Dit boekje bevat sjablonen welke de structuur van een scenario en module beschrijven, samen met *Oppervlaktevergroting* als uitgewerkt voorbeeld. Dit voorbeeld is uitgeprobeerd op partnerscholen in alle vier samenwerkende landen (informatie omtrent scholen is beschikbaar op de webpagina van het project), met informatie in de module welke gebaseerd is op data en feedback verkregen door het team die de tests hebben uitgevoerd.



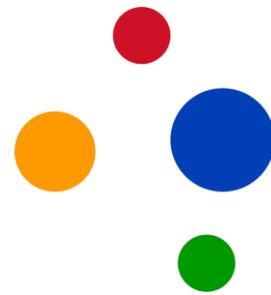
Sjabloon voor MERIA scenario

Leerdoel	Een precieze wiskundige beschrijving van het leerdoel.		
Bredere leerdoelen	Bredere leerdoelen zoals competenties, mogelijke toepassingen, redentatie etc.		
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Precieze beschrijving van de benodigde wiskundige kennis, vaardigheden en competenties welke verwacht worden van de leerling bij aanvang van het scenario.		
Leerjaar	Leerjaar en leeftijd van leerlingen waarop dit scenario van toepassing is.		
Tijd	Verwachte hoeveelheid tijd en lessen (blok van 45-60 minuten).		
Benodigd materiaal	Al het materiaal dat nodig is.		
Probleem: De exacte formulering van het probleem zoals dat aan de leerling wordt voorgelegd (mogelijk na wat voorbereidende activiteiten).			
Fases	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties van implementatie
Devolutie, overdracht (didactisch) Tijdsinschatting			
Actie (a-didactisch) Tijdsinschatting			
Formulering (didactisch/a-didactisch) Tijdsinschatting			
Validatie (didactisch/a-didactisch) Tijdsinschatting			
Institutionalisering (didactisch) Tijdsinschatting			
Mogelijke manieren voor studenten om het leerdoel te behalen	- Wees wiskundig expliciet over de mogelijke strategieën van de leerlingen. Denk eraan om te benadrukken wanneer een strategie uit te splitsen valt in een scenario met ICT voorzieningen of zonder waarbij alleen pen en papier nodig is, en ook wanneer er bij een strategie naar speciale gevallen gekeken moet worden.		
Verdieping	- Wat zijn mogelijke toepassingen/generalisaties van het begrip of concept dat bestudeerd is?		
Lijst van extra materiaal	- Werk van de leerlingen (momentopname van het bord, verslagen, uitgewerkte opdrachten, posters etc.)		



	<ul style="list-style-type: none">- Formulering van opdrachten voor de leerlingen, verslagen, of ander werk wat de leerlingen moeten aanleveren gebaseerd op de les- Tabel om de strategieën van de leerlingen vast te leggen- Video
--	--

Let op: de fases van devolutie en institutionalisering kunnen herhaald worden, maar niet te vaak in één situatie.



Sjabloon voor een MERIA module

Het Scenario

Een korte beschrijving van het scenario schrijf je in het tabel-format. Denk eraan om tijden, instructies en mogelijke verschillende strategieën voor de leerlingen samen met de doelen van het scenario aan te geven. De 'observaties' kolom wordt weggelaten in de module.

Uitleg van het materiaal

In deze sectie lever je een korte uitleg over het gebruik van al het extra materiaal (zoals hand-outs, werkbladen, dobbelstenen). Denk daarbij ook aan suggesties voor toepassingen van het materiaal in bepaalde fasen. Sommige voorzieningen zijn mogelijk alleen voor de leerkracht.

Variaties gebaseerd op didactische variabelen

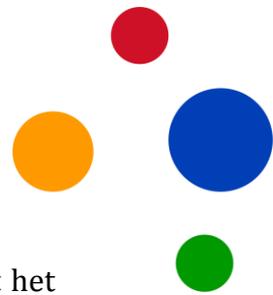
Dit is waar mogelijke variaties beschreven worden, samen met aanbevelingen omtrent wat wel en niet kan worden veranderd. De variaties kunnen gebaseerd zijn op veranderingen in het milieu (het gebruik van ICT aanpassen, het toevoegen of weghalen van wiskundige objecten), de didactische tijd (een specifieke fase langer of korter laten zijn), of het groepsverband waarin leerlingen aan de opdrachten werken (individueel, in paren, in groepen). Daarnaast moeten de impact en consequenties van de variaties bediscussieerd worden, gebaseerd op de context waarin ze gerealiseerd worden en de ervaringen die opgedaan zijn tijdens het testen van het scenario.

Observaties uit de praktijk

Hier zullen de belangrijkste observaties en reflecties van de proefimplementaties van het scenario moeten worden gedeeld. Dit houdt een beschrijving in van de minder succesvolle strategieën, samen met suggesties voor hoe en wanneer er ingegrepen moet worden en een met data onderbouwde (foto's van leerlingen hun werk, behaalde resultaten bij opdrachten etc.) beschrijving van strategieën met verscheidene niveaus van succes.

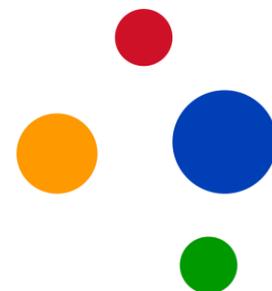
Evaluatie tools

Een mogelijk handig instrument voor evaluatie is het geven van een taak (of meerdere simpele taken) aan de leerlingen die ze op zouden moeten kunnen lossen wanneer het leerdoel van het scenario behaald is. Ook kan het handig zijn om suggesties te geven voor verdere opdrachten met betrekking tot het leerdoel. De mogelijke strategieën in het scenario kunnen gebruikt worden als 'controle instrument' gedurende de les. Als de leerkracht een vel maakt met de strategieën daarop, dan kan die gebruikt worden om bij te houden wie welke strategie volgt en of sommige belangrijke strategieën niet voorkomen. Dit kan behandeld worden tijdens het scenario, maar ook gedurende een reflectie na de les.



Logica achter en RRWO perspectieven op het scenario

Een uitgebreide presentatie over hoe het leerdoel behaald kan worden met het scenario. Verder kunnen RWO elementen worden besproken, zoals: keuze van het wiskundig leerdoel, relevantie en toepasbaarheid, onderzoek vaardigheden en potentie voor extra lessen (door een verhaallijn te bieden voor een geheel hoofdstuk of een breder perspectief te presenteren).



MERIA scenario en module: Oppervlaktevergroting

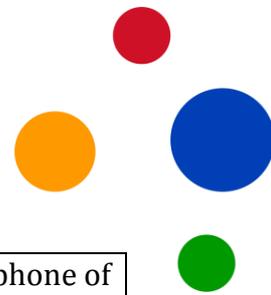
The teaching scenario

Leerdoel	Wanneer de lengte van alle zijdes van een veelhoek worden vergroot met een bepaalde factor k , dan vergroot de oppervlakte van de veelhoek met factor k^2 .
Bredere leerdoelen	Zelfstandig algebraïsch en geometrisch redeneren. Het formuleren van algemene stellingen en bewijzen gebaseerd op formules van de omtrek en oppervlakte van verscheidene vormen, met eventueel de sinusfunctie en de optelbaarheid van oppervlakte na het opdelen van een veelhoek. Het begrip van gelijkvormige veelhoeken. Indien de leerlingen gewend zijn om te werken met ICT: het genereren van hypothesen in een grafische omgeving en dat vervolgens te gebruiken als basis voor een bewijs. <i>Meer over de relevantie, perspectieven en verdere ontwikkelingen van dit scenario vind je op pagina's 13-15.</i>
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Studenten hebben enige kennis nodig over het berekenen van het oppervlakte van veelhoeken, inclusief driehoeken en vierkanten. Ook is nodig: gelijkvormigheid, het vergroten van veelhoeken met een schaalfactor.
Leerjaar	Jaar 4, leerlingen met een leeftijd van 15-16
Tijd	90 minuten, twee lessen
Benodigd materiaal	Pen, papier, ruitjespapier, geodriehoek of liniaal, GeoGebra of een andere (digitale) tool voor het tekenen en opmeten van veelhoeken, een apparaat waarmee plaatjes gemanipuleerd kunnen worden (smartphone, pc, of tablet). Het gebruik van technologie is strikt genomen niet nodig, maar het verhoogt de bekendheid met de omgeving sterk voor de meeste leerlingen.

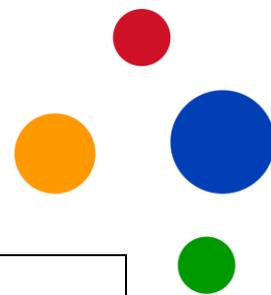


Presentatie van een student over deze situatie, in Kroatië.

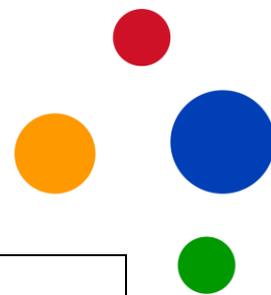




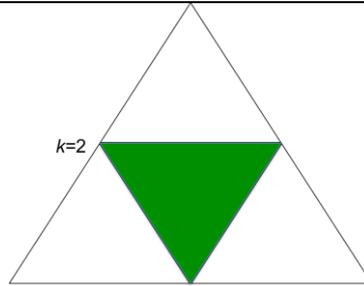
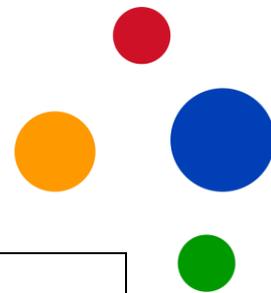
Probleem: Bekijk deze twee afbeeldingen. Wanneer je ze opent op je smartphone of computer, dan kan je gemakkelijk de afbeeldingen vergroten. Maar wat gebeurt er met de oppervlaktes van de piramide en het zwarte gebouw wanneer je dat doet?		
Fases	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties van de leerlingen
Overdracht (didactisch) 2 minuten	De leerkracht begint met de vraag: wat moet ik weten om het oppervlak van een driehoek te vinden? En hoe zit dat met het oppervlak van een veelhoek in het algemeen? Er is meer dan een antwoord mogelijk, dus je mag er ook meerdere geven. Schrijf je antwoord op papier. Je hebt hier 2 minuten voor.	De leerlingen accepteren de taak en vragen mogelijk om extra uitleg om zeker te weten of ze de taak goed begrijpen.
Actie en formulering (a-didactisch) 2 minuten	De leerkracht loopt rond en identificeert de verschillende ideeën waar de leerlingen mee komen en opschrijven.	De leerlingen schrijven formules op zoals: $A_{vierkant} = l \cdot h,$ $A_{driehoek} = \frac{h \cdot b}{2},$ $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}.$ Mogelijk komen ze ermee dat het oppervlak van een veelhoek te berekenen is met triangulatie. Andere methodes: het tellen van vierkanten op ruitjespapier, computer gebaseerde methodes.
Validatie (didactisch) 5 minuten	De leerkracht kiest leerlingen uit die hun antwoorden presenteren op het bord om alle strategieën gerepresenteerd te krijgen. De leerkracht vraagt de klas om vragen te stellen en opmerkingen te maken over de presentaties.	De leerlingen luisteren naar de presenterende leerlingen, en vragen om extra uitleg, maken opmerkingen of bespreken de suggesties op het bord.
Institutionalising (didactisch) 2 minuten	De leerkracht noemt de verschillende manieren waarmee je het oppervlak van veelhoeken kan vinden.	Leerlingen luisteren.
Overdracht (didactisch) 2 minuten	De leerlingen worden verdeeld in groepen van drie, maar moeten beginnen met individueel werken. Ze hebben 15 minuten om hun eigen oplossing op het bovenstaande probleem voor te	Leerlingen luisteren en vragen om verduidelijking waar nodig. Ze pakken wat ze willen gebruiken van het benodigde materiaal.



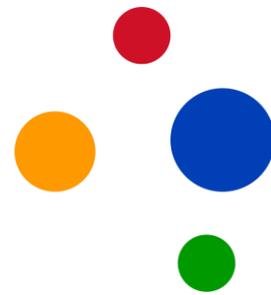
	<p>bereiden. Vraag de leerlingen of ze het begrijpen.</p> <p>De leerlingen worden voorzien van (of gevraagd om mee te nemen) papier, ruitjes papier, een schaar, een geodriehoek of liniaal, een rekenmachine en een computer met relevante software.</p>	
Actie (a-didactisch) 15 minuten	<p>De leerkracht loopt rond om te noteren welke strategieën de leerlingen kiezen. <i>De leerkracht heeft geen interactie, behalve voor het geven van verduidelijking omtrent het probleem.</i></p>	<p>Leerlingen beginnen met het proberen van sommige strategieën met hun groep. Zie beneden voor mogelijke strategieën.</p>
Formulering (a-didactisch) 10 minuten	<p>De leerkracht vraagt de groepen om tot een enkele oplossing te komen door hun persoonlijke ideeën te presenteren en bespreken. De leerkracht overziet het werk van de groepen om de presentaties te organiseren.</p>	<p>Leerlingen geven een korte presentatie van hun werk en de groep verfijnt de presentatie van de gekozen strategie.</p>
Validatie (didactisch) 20 minuten	<p>De leerkracht vraagt de groepen om een voor een te presenteren, beginnende bij de meest praktische en vage formuleringen en eindigend met de meest algemene oplossingen.</p> <p>De klas wordt aangemoedigd om samen met de leerkracht uitgebreid vragen te stellen gedurende de presentaties.</p>	<p>Leerlingen geven hun best mogelijke presentatie, luisteren, en stellen uitgebreid vragen wanneer presentaties onduidelijk voor ze zijn.</p>
Overdracht (didactisch) 10 minuten	<p>De leerkracht vraagt de groepen om de relaties en verschillen tussen de gegeven antwoorden uit te leggen. Welke is "het nuttigste" en waarom?</p>	<p>Leerlingen accepteren de taak.</p>
Actie/formulering (a-didactisch) 15 minuten	<p>De leerkracht observeert de discussies en formulering van antwoorden binnen de groepen.</p>	<p>Leerlingen geven mogelijk antwoorden gebaseerd op voorbeelden, berekeningen, of algebraïsche manipulatie.</p>
Validatie (didactisch) 10 minuten	<p>De leerkracht gebruikt de opgedane kennis over het werk van de individuele groepen om verschillende presentaties van oplossingen te selecteren en op volgorde te zetten zodat alle</p>	<p>Groepen presenteren hun oplossingen door gebruik te maken van het bord. Andere groepen vragen om verduidelijking of geven opmerkingen waar relevant.</p>



	strategieën worden gerepresenteerd.	
Institutionaliseren (didactisch) 5 minuten Totaal: 90 minuten	De leerkracht rond af door de verschillende strategieën te benadrukken. Zij/hij formuleert hoe de strategieën met elkaar te maken hebben en elkaar ondersteunen, maar ook hoe sommige strategieën de voorkeur hebben in specifieke situaties (met nieuwe voorbeelden). De leerkracht formuleert het leerdoel in zijn algemene vorm, daarbij verwijzend hoe het zich voordoet in de verschillende oplossingen van de leerlingen.	Leerlingen luisteren en sommige maken eventueel wat aantekeningen.
Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen.	<ul style="list-style-type: none"> ○ De veelhoeken op ruitjespapier tekenen, de hoeveelheid bedekte vierkanten tellen in het originele en vergrote figuur (zonder expliciet gebruik te maken van het concept van schaalfactor van lengtes). ○ De veelhoeken tekenen, de basis b en de hoogte h opmeten met een liniaal om de oppervlakte te berekenen met $A = \frac{h \cdot b}{2}$ ○ Experimenteren met verschillende schaalfactoren van lengtes (2, 3, 0.5, etc.) om uiteindelijk op de hypothese uit te komen dat de lengte opschalen met 2 een oppervlaktevergroting met een factor 4 geeft, etc. <ul style="list-style-type: none"> ○ Kan algebraïsch gerealiseerd worden vanuit voorbeelden (kies dimensie van een driehoek) ○ Kan gerealiseerd worden door driehoeken op papier te tekenen, de liniaal gebruiken om de zijdes op te meten en vervolgens de oppervlakte te berekenen ○ De figuren kunnen getekend worden met behulp van ICT, bijvoorbeeld met GeoGebra. De lengtes van zijdes en oppervlakte kunnen dan gemeten worden met behulp van tools binnen de applicatie. ○ Teken de driehoeken op papier en knip ze uit. Wanneer de vergroting een geheel getal k is, dan past de kleinere driehoek k^2 keer in de vergrote driehoek. 	



- Met gebruik van ICT: teken de veelhoek, vergroot het tot een bepaald niveau, en vraag het programma om de oppervlaktes te berekenen. De leerlingen kunnen hier bijvoorbeeld Geometer's Sketchpad voor gebruiken.
- Gebaseerd op de hierboven beschreven experimenten kan de volgende symbolische redenering ontwikkeld worden:
 - Wanneer we de zijdes van een rechthoekige driehoek (met hoogte h en basis b) vergroten met een factor k , dan zal de nieuwe hoogte $k \cdot h$ zijn en de nieuwe basis $k \cdot b$. Dit betekent dat de oppervlakte vergroot is met een factor k^2 , sinds $A_2 = \frac{1}{2} \cdot kh \cdot kb = k^2 \cdot A_1$, waar A_1 de oppervlakte is van de initiële driehoek.
 - Voor een algemene driehoek (niet per se rechthoekig dus) met hoogte h en basis b moet je beargumenteren waarom te hoogte vergroot tot $k \cdot h$. Dit kan gedaan worden door te kijken naar twee rechthoekige driehoeken waaruit de driehoek bestaat.
 - Wanneer de lengte van de zijdes van een willekeurige driehoek (met zijdes a, b onder hoek C) vergroot worden met een factor k , dan kan de initiële oppervlakte berekend worden als $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$. De vergrote oppervlakte is dan $A_2 = \frac{1}{2} \cdot ka \cdot kb \cdot \sin(C) = k^2 \cdot A_1$
 - Voor gelijkzijdige driehoeken kan de formule $A = \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$ gebruikt worden, dus wanneer z vergroot met factor k , vergroot de oppervlakte met factor k^2 .
 - Voor de rechter foto (en andere veelhoeken) deel je de veelhoek op in driehoeken en bereken je van elk de oppervlakte die opgeteld kunnen worden om tot de oppervlakte van de veelhoek te komen.
 - Heron's formule kan gebruikt worden: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Dit vereist van de studenten dat ze algebraïsche manipulatie kunnen toepassen op uitdrukkingen met wortels en machten.



Uitleg van het materiaal

De twee foto's zullen de leerlingen moeten bezighouden in de overdrachtsfase. De leerlingen zijn bekend met het idee van in- en uitzoomen op foto's met computers en mobiele telefoons. De gekozen foto's laten vormen zien die gekarakteriseerd kunnen worden als een driehoek en een trapezium. De laatste kan worden bedekt met driehoeken en daardoor opgelost worden door het vergrotingsprobleem van alleen de driehoek op te lossen. Echter is daar wel een argumentatie voor nodig. Dit moet door de leerkracht behandeld worden tijdens de laatste overdracht



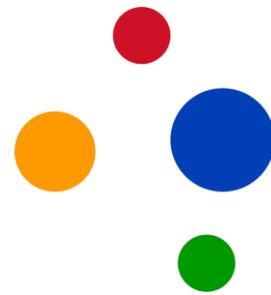
indien de studenten er zelf nog niet mee zijn gekomen. In Appendix A vind je een hand-out met drie verschillende groottes van de foto's, die gebruikt kunnen worden om het probleem aan de leerlingen duidelijk te maken.

Als de leerlingen en leerkracht bekend zijn met het gebruik van ICT in de klas, kan de foto worden

Leerlingen werkend met ruitjespapier en driehoeken (Kroatië) geïntegreerd met ICT (zoals GeoGebra) en een bestand dat met de leerlingen wordt gedeeld. Het is te overwegen om de hoekpunten te markeren, als de syntax van het berekenen van de oppervlakte opgenomen moet worden in het elektronische werkblad, of als de hoekpunten verplaatsbaar moeten zijn. Appendices B, C en D bevatten allemaal voorbeelden van werkbladen in GeoGebra en Geometer's Sketchpad, waar leerlingen kunnen experimenten met de oppervlaktes van verscheidene veelhoeken.

Indien de leerlingen alleen bekend zijn met erg basale begrippen over figuren en hun afmetingen kan het nodig zijn om ze figuren te laten tekenen op ruitjespapier en het aantal bedekte vierkanten te laten tellen. Om de figuren te vergroten met behoud van alle hoeken kan het nodig zijn dat studenten de vormen uitknippen om te gebruiken bij het tekenen van de vergrootte figuren. Hiervoor zullen de leerlingen een schaar en liniaal nodig hebben. De bovenstaande foto laat studenten zien welke hun eigen figuren maken en vergroten met behulp van ruitjespapier.

Wanneer het voor de leerlingen comfortabeler is om te werken met concrete modellen van veelhoeken (bijvoorbeeld driehoeken), zullen er meerdere soorten modellen moeten worden voorzien. Dat zorgt ervoor dat de leerlingen een idee krijgen voor het vergroten van oppervlakte met een geheel getal als factor zodat ze gemakkelijker kunnen overgaan op een meer symbolische beschrijving van het probleem.



Variaties gebaseerd op didactische variabelen

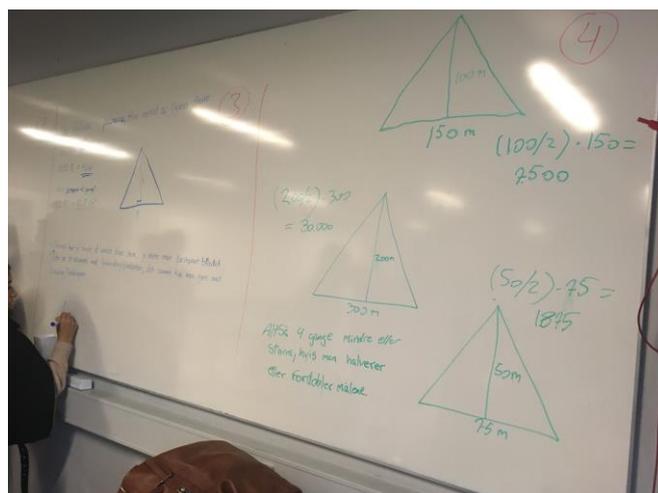
Tijdens de didactische fases zal de focus moeten liggen op de formuleringen van de leerlingen en de validatie daarvan. Tijdens de a-didactische fases zal er niet gehint moeten worden naar de oplossing.

Het milieu: er kunnen andere foto's gekozen worden, maar die moeten wel duidelijk de vormen van een driehoek en een vierhoek (geen rechthoek) bevatten. Leerlingen kunnen aangemoedigd worden om ICT te gebruiken, maar zorg er wel voor dat er enig werk moet zijn met formules in de gebruikte applicatie. Anders kan het zijn dat de leerlingen wel tot de conclusie kunnen komen dat oppervlakte vergroot met de factor k^2 , maar er geen algebraïsche onderbouwing aan kunnen geven. Dat laatste kan dan behandeld worden in een vervolgles. Zorg er voor dat er geen hints naar de oplossing te krijgen zijn in de ICT omgeving, naast de probleemstelling zelf.

Gedurende de validatie is het van belang dat verkeerde strategieën en formules gecorrigeerd worden – voor zo ver mogelijk door andere leerlingen. De leerkracht kan de rest van de klas betrekken met vragen aan specifieke studenten als: Kan je herhalen wat er zojuist is gezegd? Klopt dat? Waarom denk je dat? Waar weet je dit van? Is het toepasbaar op beide figuren? En op alle figuren? Wat is de relatie tussen $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$ en $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$? Etc. De vragen die gesteld worden hangen af van de aanwezige voorkennis en de prestaties van de klas.

De *lengte* van de fases kan aangepast worden aan het werk van de leerlingen, maar moet niet te veel verlengd worden.

Gedurende de eerste twee a-didactische fases moet de leerlingen niet verteld worden wat ze horen te ontdekken of herinnerd worden aan wat een schaalfactor of lengte is. Indien de leerkracht niet zeker is of de leerlingen de benodigde voorkennis bezitten, kan die vragen stellen als: Wanneer zijn figuren gelijkvormig? Hoe kunnen we ze vergelijken? Is het redelijk om ze te vergelijken? Etc. De voorgestelde vragen zullen alleen gesteld moeten worden



De oplossingen van een groep leerlingen op een whiteboard (Denemarken)

aan groepen of individuen wanneer de meeste andere leerlingen de benodigde voorkennis lijken te hebben. Als de meerderheid van de klas die vragen nodig heeft, moet de fase ingekort worden en zullen de vragen klassikaal gesteld moeten worden. De leraar behoort niet elke groep apart les te geven. Verder is het *niet*



nodig om bij de groep te blijven tot ze een antwoord hebben op zo'n vraag. Zie het als een kleine overdracht van een begrensd probleem en laat de leerlingen actie ondernemen, formuleren en valideren. Geef geen hulp met verder vragen of hints naar het antwoord.

Onderbrekingen gedurende de *derde fase van actie*, formulering en validatie: het algemene idee is vergelijkbaar met die van hierboven. Wanneer sommige groepen moeite hebben met op gang komen, dan kan de leerkracht voorstellen dat ze hun strategie vergelijken met die van een andere groep. Deze vergelijkbare strategie moet wiskundig gezien goed gekozen zijn, wat inhoudt dat er duidelijke relaties aanwezig zijn. Dit is als het overdragen van een nieuw, enigszins minder open, deelprobleem aan de groep.

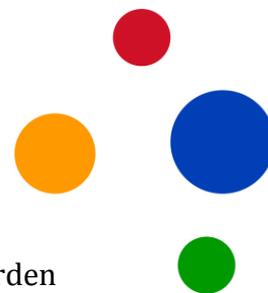
Gedurende de *laatste institutionalisering*: het is belangrijk dat de meeste (al dan niet alle) strategieën klassikaal worden gedeeld en met elkaar in verband worden gebracht. Bijvoorbeeld, als een groep de formule $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot b$ gebruikt en een andere $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$ gebruikt, zal moeten worden beargumenteerd (hopelijk door een groep leerlingen) dat $h = a \cdot \sin(C)$. Zulke wiskundige argumentaties zullen ter voorbereiding van de les door de leerkracht moeten worden geformuleerd en opgeschreven in detail. Het beschouwen van alle mogelijke strategieën helpt de leerkracht om op het onderzoeksproces van de leerlingen te anticiperen. Denk eraan dat je tijdens het lesgeven te maken hebt met een dynamisch systeem – studenten moeten de ruimte hebben om zich aan te passen aan het milieu, je kan dus niet verwachten dat ze allemaal hetzelfde antwoord geven!

Het onderzoeksproces omvat *alle* fases. Er kan meer dan één sessie nodig zijn voordat de leerlingen gemakkelijk deelnemen in deze manier van lesgeven.

Sommige leerkrachten maken een schema van mogelijke strategieën, om te gebruiken tijdens a-didactische fases. De verwachte strategieën kunnen op een rijtje worden gezet, met bij elke strategie bijvoorbeeld drie vragen die mogelijk nuttig zijn om te stellen wanneer een groep zo'n strategie presenteert. Gedurende de a-didactische fases kan de leerkracht noteren welke groepen de verscheidene strategieën bespreken, om vervolgens te gebruiken voor de organisatie van de daaropvolgende didactische formulering.

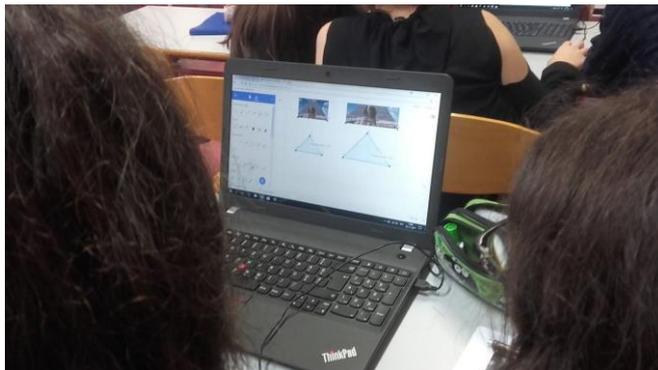
Observaties uit de praktijk

De belangrijkste observatie wat betreft het scenario is dat sommige leerkrachten ernaar neigen om leerlingen gedurende alle fases van het scenario les te geven/te helpen. Dit doet de a-didactische potentie van de situatie teniet en leidt de studenten erg af. Er is ook geobserveerd dat sommige leerlingen werkten met het idee van mate van toename en afname (met welk percentage vergroot het



oppervlak bij een vergroting van alle zijdes van 30%). Dit kan gerelateerd worden aan een schaalfactor van lengtes door $k = 1.30$ te nemen. In dit geval kan er gedurende de laatste formulering- en validatiefase aan de leerlingen gevraagd worden of ze hun resultaat kunnen relateren aan de schaalfactor. Groepen die als strategie Heron's formule nemen hebben de speciale gelegenheid om zich de rekenregels voor machten, wortels en haakjes te herinneren (of aan herinnerd te worden).

Indien de leerkracht de leerlingen wil laten werken met ICT, is het nodig om vragen voor te bereiden omtrent het wiskundige begrip achter de operaties die de computer doet. Denk hierbij aan: Wat doet de computer wanneer die de oppervlakte berekent? Welke formules denk je dat de computer kan gebruiken? Wanneer de computer het plaatje vergroot met 25%, wat wordt er dat 25% groter?



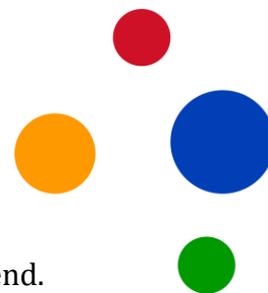
Leerlingen onderzoeken de afmetingen van driehoeken met GeoGebra (Slovenië).

Als de leerkracht andere figuren kies (wat sommigen doen), moet er goed nagegaan worden of die het probleem veranderen. Indien de foto's duidelijk een derde dimensie laten zien, kan dat sommige leerlingen verwarren. Wanneer de hoekpunten niet aangegeven zijn kan het moeilijk zijn om de lengtes van de zijdes te bepalen. Als je ingewikkeldere figuren uitkiest kan dat sommige leerlingen verwarren, maar anderen juist beter betrekken. Hierom is de keuze sterk afhankelijk van de klas. Niet-veelhoeken zullen moeten worden vermeden in deze situatie.

Evaluatie instrumenten

Aan het einde van de les, of vlak erna, kunnen de volgende taken door de leerlingen uitgevoerd worden als snelle test over de kennis die ze hebben opgedaan gedurende het scenario.

- 1) Je vriend beweert dat om een vierkant te halveren in oppervlakte, je simpelweg alle zijden moet halveren. Wat denk jij?
Antwoord: Dat klopt niet. Als alle zijdes worden gehalveerd houd je een kwart van de oppervlakte over.
- 2) Een driehoek T heeft zijdes met lengtes van 3 cm, 5 cm en 7 cm. Driehoek T^* heeft dezelfde hoeken, maar vier keer het oppervlak van T . Welke lengtes hebben de zijdes van T^* ?
Antwoord: Als het oppervlakte 4 keer zo groot is moeten alle zijdes verdubbeld zijn. Dus: 6 cm, 10 cm en 14 cm.



- 3) Een figuur, zoals bijvoorbeeld een driehoek, wordt op een A4'tje getekend. Gebruik een kopieermachine om dat te vergroten naar een A3-formaat (welke het dubbele oppervlakte heeft van A4). Wat gebeurt er met de zijdes van de figuur?

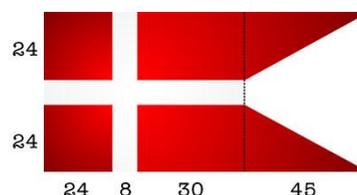
Antwoord: Omdat de oppervlakte is verdubbeld weten we dat de schaalfactor $k^2 = 2$. Dus is de schaalfactor $k = \sqrt{2}$. De zijdes worden dus allemaal $\sqrt{2}$ keer zo groot.

Suggesties voor verdere problemen over oppervlakte en vergroting

Benodigd: Papier, pen, geodriehoek, rekenmachine of soortgelijk.

1. Het papierformaat A5 is een verkleining van een A4 door het A4 dubbel te vouwen. De lange zijde van een A4 is 297 mm. Wat is de lengte van de korte zijde?

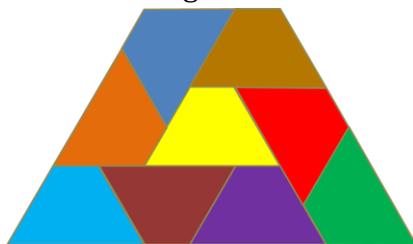
2. Regulaties voor de Deense zwaluwstaart-vlag bepalen de afmetingen er van, dit is zichtbaar in het plaatje. Het wordt aanbevolen om als breedte van de vlag $1/5$ van de vlaggenstok te nemen. Dus, als de eenheden in cm zijn, is de vlag in het plaatje geschikt voor een stok van 280 cm. Wat is de aanbevolen oppervlakte van deze vlag bij een stok van 1120 cm?



3. Bladgoud wordt verkocht voor een prijs van \$27.77 per 100 vellen van 5.5 cm bij 5 cm. Een artiest wil een in goud bedekte letter **A** maken op een bord van 3.5 m bij 8 m. Haar wordt verteld dat dit te duur gaat worden. Ze moet de het bord verkleinen om de goudprijs te verlagen met 30%. Wat zijn de afmetingen van het verkleinde bord?



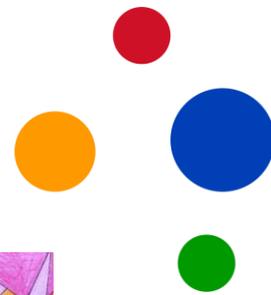
4. De kerstmis versieringen in het plaatje rechts zijn gemaakt door cirkelsectoren om te vormen in kegel. Voor de kleine kegels wordt ongeveer 350 cm^2 aan karton gebruikt. Geef een inschatting van de hoeveelheid karton die nodig zal zijn voor de grotere kegel.



5. Op een stads plattegrond met schaal 1:7200 heeft een park naar inschatting een oppervlakte van 12 cm^2 . Geef een inschatting van de werkelijke grootte van het park.

6. Een groep van zes leerlingen die leren over driehoeken heeft de links afgebeelde tekening gemaakt. De breedte van het plaatje is 5 cm. In de originele tekening is de oppervlakte van de gele vierhoek 10 cm^2 . Hoe breed was die in de originele tekening?

7. In 1854 is de diameter van een één-dollar munt veranderd van 13 mm naar 15 mm zonder het gewicht te veranderen. Met welk percentage is het oppervlak vergroot? En met welk percentage is de dikte verkleind?



8. Welke conclusies over vergroting kan je trekken uit het kunstwerk met driehoeken in het plaatje rechts?



Logica achter en RWO-perspectieven op het scenario

Relevantie en toepasbaarheid:

We bekijken de volgende drie perspectieven:

- Dagelijks leven: Deze kennis is te relateren met de alledaagse ervaring van het vergroten van foto's of documenten. Leerlingen zullen zich bewust moeten zijn van de verschillende interpretaties van "twee keer zo groot als de originele foto". Een ander voorbeeld is het de interpretatie van "bestel twee keer zoveel zand ten opzichte van 1 m³".
- Op de werkvloer: Kunnen redeneren over vergroting en de effecten van schalen met een bepaalde factor is relevant op vele werkplekken, bijvoorbeeld in de zorg (% oplossingen) en architectuur (schaal modellen).
- Verdere studie: De kennis en vaardigheden gerelateerd aan dit onderwerp kunnen gebruikt worden in vele disciplines binnen de wetenschap (bijvoorbeeld biologie achter de vorm van dieren botten en de natuurkunde achter afkoeling van objecten). Een historisch-filosofische noot voor leerlingen met interesse in de geesteswetenschappen: het verdubbelen van de oppervlakte van een vierkant komt voor in Plato's beroemde dialoog *Menon*.

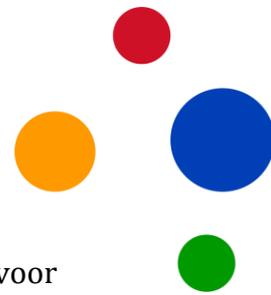
Onderzoekvaardigheden

In het oppervlakte scenario ervaren leerlingen het belang van onderzoeksvaardigheden, zoals het formuleren van een hypothese, het maken van voorbeelden, systematisch experimenteren, data organiseren, het vinden en rechtvaardigen van een formule, samenwerken, en het communiceren van resultaten. De mate waarin deze vaardigheden worden aangesproken is voornamelijk afhankelijk van de manier waarop de leerkracht de leerlingen betreft in feedback op de methodes gedurende de tweede validatiefase wanneer de groepen moeten presenteren. Daarbij kan de feedback onderdeel gemaakt worden van de daaropvolgende formulering en institutionaliseringsfasen. In andere gevallen suggereren we dat de leerkracht de feedback opschrijft om in een latere les op terug te kunnen komen.

Potentie voor een reeks aan lessen

Het oppervlakte scenario kan onderdeel zijn van een grotere serie aan lessen over vergroting en hoe dat zich relateert tot het veranderen van lengtes, oppervlaktes en volumes van geometrische figuren.

- *Voorkennis*



Voor zo'n hoofdstuk verwachten we dat leerlingen bekend zijn met formules voor het berekenen van het oppervlak en volume van eenvoudige wiskundige figuren zoals driehoeken, rechthoeken, cirkels, kubussen en cilinders. Daarbij zullen ze bekend moeten zijn met het begrip van een schaalfactor en zijn relatie tot het vergroten van figuren waarbij de verhouding tussen zijdes hetzelfde blijft (gelijkvormigheid).

- *Een introductie*

Een context met een rijke open vraag die de module overkoepeld. Een probleem in een context die op een natuurlijke wijze vergroting verbindt met het veranderen van lengtes, oppervlaktes, en volumes en die de vraag oproept hoe dat tot elkaar in verhouding staat. Sommige mogelijkheden zijn:

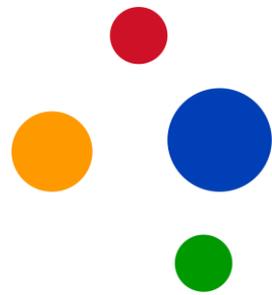
- Dieren – het afkoelen en opwarmen van een lichaam met een bepaald volume ten opzichte van het huidoppervlak
- Gebouwen met een factor verkleinen – Met mini mundus of LEGO
- Verpakking industrie – hoeveel materiaal voor het verpakken
- Babushka-poppen – onderzoek de lengte & gewicht van poppen met verschillende groottes
- Analyseer de afmetingen van poppen bij vergroting

- *Horizontale mathematiseren*

Wiskundige taal wordt geïntroduceerd om de situatie te bespreken. De leerlingen vormen een eerste informeel model van de situatie. Leerlingen onderzoeken relaties door het maken van voorbeelden en proberen te ontdekken wat er gebeurt. Ze bereiden een presentatie van hun vondsten voor. De leerkracht leidt het overleg op basis van gelijkenissen en verschillen tussen de vondsten om een tot de conclusie te komen dat andere dimensies zich anders gedragen. Dit resulteert in een behoefte om een van deze dimensies nader te onderzoeken. Laten we daarvoor oppervlakte nemen.

- *Verticaal mathematiseren*

De bij het probleem betrokken wiskunde wordt verder ontwikkeld. Het model wordt abstracter en meer gegeneraliseerd. Introduceer het oppervlakte probleem met het oppervlakte scenario. Dit scenario wordt geïntroduceerd in de context van het vergroten van twee foto's: een van een piramide en een van een gebouw. Deze context (het vergroten van foto's) leidt op een natuurlijke wijze tot vragen omtrent het veranderen van lengtes en oppervlaktes in de foto. Echter loop je wel het risico dat leerlingen eigenschappen van de geportretteerde objecten gaan gebruiken (bijvoorbeeld wat er gebeurt met de afmetingen van een piramide wanneer je deze vergroot) en dat ze afgeleid raken door aspecten als de gevolgen van projectie (perspectief). Dit scenario resulteert in het begrip dat oppervlaktes schalen met een factor k^2 wanneer lengtes geschaald worden met een factor k . Verder kunnen de onderzoeksvaardigheden van het maken van voorbeelden, data organiseren, en het vinden en rechtvaardigen van een formule de focus hebben tijdens de formulering en institutionalisering fases.



- *Conclusie en reflectie en suggesties voor verdere studie*

De leerling reflecteert, integreert ideeën, maakt concepten en vaardigheden expliciet. De leerkracht benadrukt de belangrijkste leerpunten.

Een vervolgles kan verder uitdiepen wat de conclusies van het scenario ons vertellen over de initiële inzichten: kunnen we k^2 gebruiken, en strategieën in die context onderzoeken? Een of meer van de initiële probleemstellingen kan worden uitgezocht in meer detail om tot soortgelijke conclusies te komen over lengte en volume. Aan het eind kan een soort begrip verkregen worden dat het schalen van lengte met een factor k resulteert in het schalen van objecten (bijvoorbeeld oppervlakte of volume) met dimensie d (bijvoorbeeld met $d = 2$ of $d = 3$) met een factor k^d .