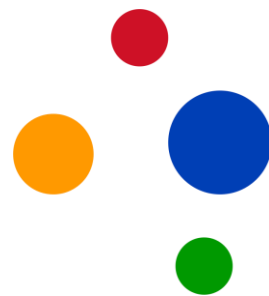




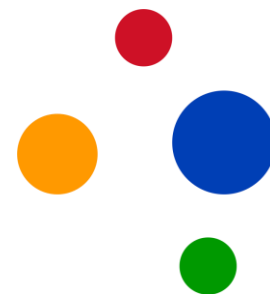
Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA PREDLOŽAK ZA SCENARIJE I MODULE





(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)



MERIA PREDLOŽAK ZA SCENARIJE I MODULE

GLAVNI UREDNIK

Carl Winsløw

TEKST NAPISALI

Britta Jessen, Carl Winsløw

RECENZIJE, UREĐIVANJE I LEKTURA

Sanja Antoliš, Jeanette Axelsen, Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Aneta Copić, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Željka Milin Šipuš, Selen Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw, Petra Žugec, Vesna Županović

PRIJEVOD

Eva Špalj

DIZAJN I VIZUALNO OBLIKOVANJE

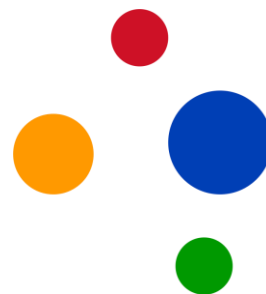
Irina Rinkovec

Projekt MERIA, veljača 2018.

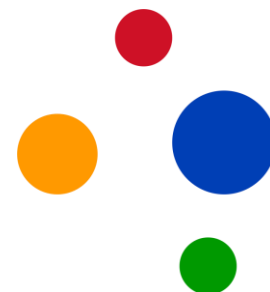
www.meria-project.eu

Ovaj je dokument zaštićen licencom o zajedničkom kreativnom dobru (creative commons).

Sadržaj ovog dokumenta odražava isključivo stavove autora. Europska komisija ne snosi odgovornost ni za koje korištenje informacija iz ovog dokumenta.

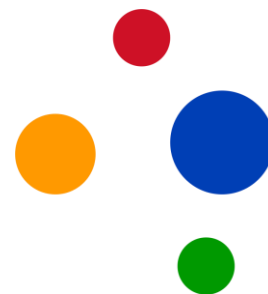


(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)



Sadržaj

| | |
|--|----------|
| Uvod | 2 |
| 1. Predložak za MERIA scenarij | 3 |
| 2. Predložak za MERIA modul | 5 |
| Scenarij..... | 5 |
| Objašnjenje materijala..... | 5 |
| Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama | 5 |
| Zapažanja iz prakse | 5 |
| Alati za procjenu..... | 5 |
| Načela i RME perspektiva u scenariju | 5 |
| 3. MERIA scenarij i modul: Povećanje površine | 6 |
| Scenarij poučavanja..... | 6 |
| Objašnjenje materijala..... | 10 |
| Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama | 11 |
| Zapažanja iz prakse | 13 |
| Alati za procjenu..... | 13 |
| Preporuke za daljnje probleme vezane za površinu i povećanje | 14 |
| Načela i RME perspektiva u scenariju | 15 |

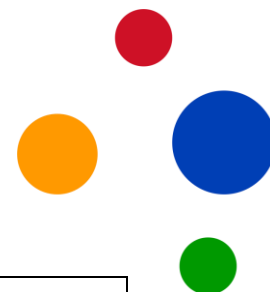


Uvod

Jedan od glavnih rezultata projekta MERIA bit će niz novih pokaznih scenarija i modula temeljenih na teoriji predstavljenoj u *MERIA praktičnom vodiču za istraživački usmjerenu nastavu matematike*.

Scenarij opisuje didaktičku situaciju i odgovarajuće metode poučavanja. U njemu su opisani ciljevi nastave u smislu područja kurikuluma, specifičnog ciljanog znanja i kompetencija te pruža jasnu strukturu lekcije temeljenu na Teoriji didaktičkih situacija. *Modul* dodatno sadrži pisane i digitalne materijale koji prate nastavni scenarij, poput radova učenika ili digitalnih radnih listova. Sadrži eksplicitno obrazloženje izbora problema i nastavnih metoda, perspektivu Realističnog matematičkog obrazovanja, iskustva i rezultate iz kontroliranih implementacija, uključujući potencijalne napretke i zamke za učenike sa specifičnim preduvjetima.

Ova brošura sadrži predloške koji opisuju strukturu scenarija i modula, kao i jedan primjer nazvan *Povećanje površine*. Ovaj pokazni scenarij testiran je u pridruženim školama u sve četiri partnerske zemlje (informacije o školama dostupne su na web stranici projekta), a informacije u modulu temelje se na podacima i povratnim informacijama koje je projektni tim prikupio u ovim ispitivanjima.



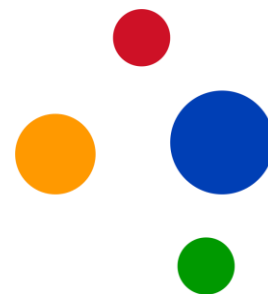
1. Predložak za MERIA scenarij

| | | | |
|---|--|--------------------------------------|----------------------------------|
| Ciljano znanje | Precizna matematička formulacija cilja | | |
| Širi ciljevi | Predstavljaju kompetencije, metode ili znanja razvijena ili produbljena na učenikovom putu do ciljanih znanja | | |
| Potrebno matematičko predznanje | Precizna formulacija matematičkog znanja, vještina i kompetencija koje su učenici do sada morali usvojiti prije provođenja scenarija | | |
| Razred | Razred i dob učenika | | |
| Vrijeme | Broj minuta i nastavnih sati (od 45-60 minuta) | | |
| Potrebni materijal | Sve moguće vrste materijala | | |
| Problem: Točna formulacija glavnoga problema koji nastavnik predaje učenicima (moguće nakon pripremnih aktivnosti) | | | |
| | Aktivnosti nastavnika, uključujući upute | Aktivnosti učenika i reakcije | Opažanja tijekom provedbe |
| Primopredaja (didaktički) Predviđeno vrijeme | | | |
| Djelovanje (adidaktički) Predviđeno vrijeme | | | |
| Formulacija (didaktički/adidaktički) Predviđeno vrijeme | | | |
| Potvrđivanje (didaktički/adidaktički) Predviđeno vrijeme | | | |
| Institucionalizacija (didaktički) Predviđeno vrijeme | | | |
| Mogući načini da učenici dođu do ciljanog znanja | - Matematički precizno opisati koje strategije učenici mogu koristiti. Ne zaboravite napomenuti u kojim se slučajevima može koristiti IKT ili samo olovka i papir, kao i kada se u strategiji proučavaju specijalni slučajevi. | | |
| Ideje za daljnje proučavanje | - Koje su moguće primjene/generalizacije zapisa ili koncepta koje bi se moglo dalje proučavati? | | |
| Popis dodatnog materijala | - Učenički radovi (snimke ploča, izvješća, zadataka, plakata i sl.) | | |



| | |
|--|--|
| | <ul style="list-style-type: none">- Formulacije učeničkih radova, izvješća ili drugih radova koje su zahtijevane od učenika tijekom provođenja scenarija- Tablica u kojoj su zapisane učeničke strategije- Video |
|--|--|

Napomena: Faze primopredaje i institucionalizacije se mogu ponoviti, ali nije poželjno da se ponavljaju previše puta.



2. Predložak za MERIA modul

Scenarij

Kratki opis scenarija je dan u obliku tablice. Potrebno je naznačiti vrijeme, dati upute i moguće različite strategije učenika zajedno s ciljevima scenarija. Stupac za zapažanja će biti izostavljen u modulu

Objašnjenje materijala

Kratko objašnjenje kako koristiti dodatne materijale, prikazujući svaki mogući materijal ili izvori ((elektronske) radne listove, kockice, didaktičke materijale) i prijedloge o korištenju u određenoj fazi. Neki od materijala/izvora mogu biti samo za nastavnika.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

U ovom odjeljku opisane su moguće varijacije zajedno s preporukama o tome što se može mijenjati i što se ne bi smjelo mijenjati. Varijacije se mogu temeljiti na promjenama okruženja (vezano uz uporabu IKT-a, dodavanje ili uklanjanje matematičkih objekata ili materijala), predviđenog vremena (potreba za kraćim/duljim fazama) ili organizacije rada učenika; individualni rad učenika, u parovima ili u skupinama. Nadalje, trebalo bi razgovarati o utjecaju i posljedicama varijacija na temelju konteksta u kojem se trebaju realizirati, te se oslanjati na iskustva testiranja scenarija.

Zapažanja iz prakse

Navesti glavna zapažanja i razmišljanja o promatranju testiranja scenarija. To podrazumijeva opis manje uspješnih strategija i prijedloga o tome kada i kako intervenirati, opis strategija različitih uspješnosti potkrijepljenih podacima (fotografije učeničkih radova, zadataka itd.)

Alati za procjenu

Predloženi su alati za procjenu u obliku jednog ili više jednostavnih zadataka koje bi učenici trebali znati riješiti ako su dostigli cilj učenja iz scenarija. Mogu biti i prijedlozi za daljnje probleme vezane uz ciljano znanje. Moguće strategije predložene u scenariju također se mogu koristiti kao „alat za provjeru" tijekom nastave. Ako nastavnik pripremi tablicu sa strategijama, može pratiti i bilježiti koje grupe slijede koju strategiju i ako su one važne izostavljene mogu se predstaviti tijekom provođenja scenarija, ali i koristiti nakon lekcije za refleksiju.

Načela i RME perspektiva u scenariju

Razrađeni prikaz kako se ciljano znanje može postići scenarijem. Nadalje, moguće je adresirati elemente RME-a, kao što su: odabir matematičkog ciljanog znanja, relevantnost i primjenjivost, istraživačke vještine i potencijal za slijed lekcija (poglavlje ili "veća slika").

3. MERIA scenarij i modul: Povećanje površine

Scenarij poučavanja

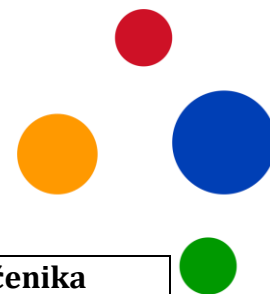
| | |
|---------------------------------|--|
| Ciljano znanje | Ako se duljine stranica mnogokuta povećaju s koeficijentom k površina mnogokuta se povećava s koeficijentom k^2 . |
| Širi ciljevi | <p>Autonomno algebarsko i geometrijsko razmišljanje, formuliranje općih tvrdnji i dokaza temeljenih na formulama za opseg i površinu različitih likova, uključujući potencijalno i trigonometrijsku formulu za površinu, kao i aditivnost područja kod rezanja mnogokuta na dijelove. Pojam sličnih mnogokuta.</p> <p>Ako učenici koriste IKT: generiranje hipoteza u grafičkom okruženju i korištenje grafičkog okruženja za početak dokaza.</p> <p>Istraživačke vještine: formuliranje hipoteza, generiranje primjera, sustavno eksperimentiranje, organiziranje podataka, pronalaženje i opravdavanje formule, suradnja i komuniciranje rezultata</p> |
| Potrebno matematičko predznanje | Učenici trebaju znati izračunati površinu mnogokuta, uključujući površinu trokuta i kvadrata. Također je potrebno znanje zapisa sličnosti te što znači povećanje mnogokuta dva puta, tri puta itd. |
| Razred | Dob 15 – 16 godina, 1. razred |
| Vrijeme | 90 minuta, 2 školska sata |
| Potrebni materijal | Milimetarski papir ili papir s kvadratićima, ravnalo, računalo, matematički program za crtanje i mjerenje mnogokuta (GeoGebra ili Geometer's Sketchpad), uređaj za manipulaciju slikama (primjerice pametni telefon, tablet). Uporaba tehnologije nije nužna, ali omogućava povoljno okruženje za učeničko istraživanje. |



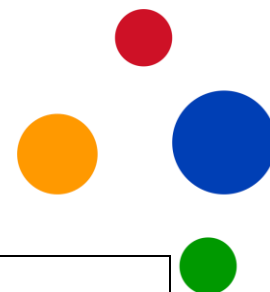
Učenik prezentira rad svoje grupe, Hrvatska

Problem: Pogledajte ove dvije slike. Ako ih otvorite na pametnom telefonu ili računalu, možete jednostavno povući slike kako biste ih povećali. Ali što se događa s površinama koje zauzimaju piramida i crna zgrada kad sliku povećavamo?

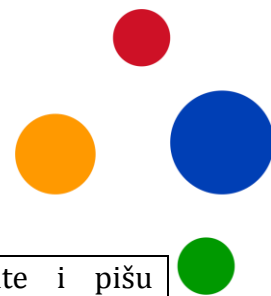


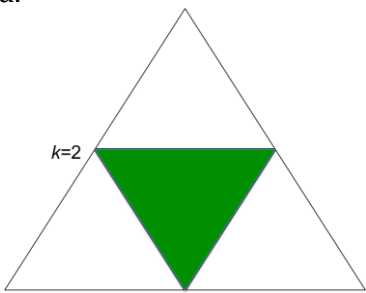


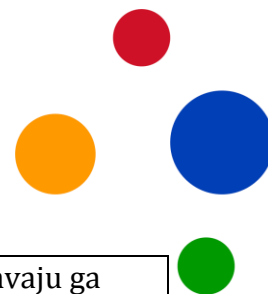
| Faza | Postupci nastavnika, uključujući i upute | Postupci i reakcije učenika |
|---|--|---|
| Primopredaja 1 (didaktički) 2 minute | Nastavnik započinje pitanjem: Što trebam znati kako bih izračunao površinu trokuta? Ili površinu bilo kojeg mnogokuta? Postoji više od jednog odgovora. Imate 2 minute da zapišete svoj odgovor. | Učenici prihvaćaju zadatak i eventualno postavljaju pitanja ako im nešto nije jasno. |
| Djelovanje i formulacija (adidaktički) 2 minute | Nastavnik obilazi učionicu i uočava različite ideje kojih su se učenici prisjetili i zapisali. | Učenici zapisuju formule poput: $P_{\text{pravokutnika}} = a \cdot b,$ $P_{\text{trokuta}} = \frac{a \cdot v}{2}$ Neki će učenici možda zapisati Heronovu formulu $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, a neki učenici možda znaju formulu $P_{\text{trokuta}} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$ Neki učenici mogu primijetiti da se površina može izračunati kao zbroj površina trokuta na koje je mnogokut podijeljen. Mogu i brojati kvadratiće na papiru ili koristiti računalo koje će izmjeriti površinu. |
| Potvrđivanje (didaktički) 5 minuta | Nastavnik bira grupe da prezentiraju svoje radove na način da se predstave sve strategije. Nastavnik traži od učenika da postavljaju pitanja ili komentiraju prezentacije. | Učenici slušaju one koji prezentiraju, traže pojašnjenja, komentiraju i diskutiraju prijedloge na ploči. |
| Institucionalizacija (didaktički) 2 minute | Nastavnik sažima različite načine za računanje površine mnogokuta. Ako su neki učenici izrekli ideje koje nisu zapisane, nastavnik ih dodaje na ploču. | Učenici slušaju i po izboru zapisuju bilješke. |
| Primopredaja 2 (didaktički) 2 minute | Učenici su podijeljeni u grupe po 3, ali ih se potiče da rade individualno. Imaju 15 minuta da pripreme svoj odgovor na gore navedeni problem. Provjerite jesu li učenici razumjeli problem. | Učenici slušaju i postavljaju dodatna pitanja ako je potrebno. Učenici uzimaju potrebni materijal; ako žele koriste papir, ravnalo itd. |



| | | |
|---|--|--|
| | Učenicima se daje (ili se traži da ponesu) papir, milimetarski papir, škare, ravnalo, džepno računalo, te računalo s odabranim IKT alatima (ako je to uobičajeno u poučavanju). | |
| Djelovanje (adidaktički) 15 minuta | Nastavnik obilazi učionicu i uočava strategije koje učenici koriste. <i>Nastavnik se ne upliće u rad učenika osim u svrhu objašnjenja problema.</i> | Učenici isprobavaju neke od niže navedenih strategija unutar svoje grupe. |
| Formulacija (adidaktički) 10 minuta | Nastavnik traži od učenika unutar grupe da se dogovore o zajedničkom rješenju problema prezentirajući i raspravljajući svoje osobne ideje u grupi. Nastavnik promatra rad grupa kako bi mogao organizirati prezentacije. | Učenici ukratko prezentiraju svoj rad unutar grupe, a grupa doraduje prezentaciju odabrane strategije. |
| Potvrđivanje (didaktički) 20 minuta | Nastavnik poziva jednu po jednu grupu da prezentira svoj rad, počevši od grupe koja ima specifične i neprecizne formulacije, a završava s grupom s najopćenitijim argumentima. Učenike se potiče da postavljaju učinkovita pitanja za vrijeme prezentacije drugih grupa. | Učenici prezentiraju na najbolji mogući način, slušaju i postavljaju pitanja ako su im tuđe prezentacije nejasne. |
| Primopredaja 3 (didaktički) 2 minute | Nastavnik traži od grupa da objasne odnose i razlike među predstavljenim rješenjima. Koje je rješenje "najkorisnije" i zašto? | Učenici prihvaćaju zadatak. |
| Djelovanje/formulacija (adidaktički) 15 minuta | Nastavnik prati formulaciju po grupama. | Učenici mogu graditi argumente na primjerima, izračunima ili algebarskim manipulacijama. |
| Potvrđivanje (didaktički) 10 minuta | Nastavnik na temelju različitih pristupa i razina određuje redosljed i odabire različite prezentacije rješenja, tako da su predstavljene sve strategije | Grupe prezentiraju svoja rješenja na ploči. Ostale skupine traže pojašnjenja ili dodaju komentare kada je to relevantno. |



| | | |
|--|---|--|
| <p>Institucionalizacija (didaktički)</p> <p>5 minuta</p> | <p>Nastavnik sažima glavne ideje stavljajući naglasak na različite strategije. Formulira kako su strategije povezane i međusobno podržavane, iako su neke strategije poželjnije u određenim slučajevima. Nastavnik formulira ciljano znanje u svom općem obliku, ističući kako se ono pojavljuje u različitim rješenjima učenika.</p> | <p>Učenici pažljivo prate i pišu bilješke.</p> |
| <p>Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje</p> | <ul style="list-style-type: none"> ○ Neki će učenici crtati mnogokute na milimetarskom papiru i brojati kvadratiće koje zauzimaju originalni i povećani lik (bez da su eksplicitno koristili koncept koeficijenta povećanja). ○ Neki će učenici crtati likove na običnome papiru i pomoću ravnala izmjeriti duljinu osnovice i visine te izračunati površinu koristeći formulu $P_{\text{trokuta}} = \frac{a \cdot v}{2}$ (također bez korištenja koeficijenta povećanja). ○ Neki će učenici isprobavati različite koeficijente povećanja (2, 3, 0.5 itd.) te zaključiti da će se ako primjerice povećaju duljine stranica lika 2 puta, površina povećati 4 puta. Do toga mogu doći na različite načine. <ul style="list-style-type: none"> ○ Algebarski, pomoću primjera, odabirući različite duljine stranica trokuta. ○ Ista strategija korištenjem IKT-a. ○ Korištenjem milimetarskog papira; crtanjem različitih likova koje će povećavati te brojati kvadratiće koje likovi zauzimaju. ○ Korištenjem programa dinamičke geometrije; crtanjem likova i mjerenjem dimenzija. ○ Crtanjem trokuta koje će izrezati te preslagivati. Ako je koeficijent povećanja k, tada mali trokut u povećani stane k^2 puta. <div style="text-align: center;">  </div> | |

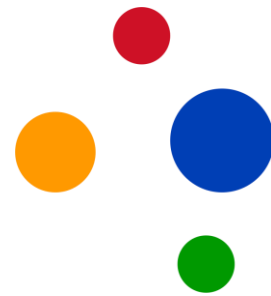


| | |
|--|---|
| | <ul style="list-style-type: none"> ○ Korištenjem IKT-a: učenici crtaju mnogokut, povećavaju ga određeni broj puta i pomoću alata mjere površine, primjerice uz pomoć Geometer's Sketchpada. ○ Na temelju opisanih postupaka učenici mogu doći do sljedećih zaključaka: <ul style="list-style-type: none"> ○ Ako duljine kateta a i b pravokutnoga trokuta povećamo k puta, nove će duljine kateta iznositi $k \cdot a$, odnosno $k \cdot b$. To znači da će nova površina biti $P_2 = \frac{(k \cdot a) \cdot (k \cdot b)}{2} = k^2 \cdot P_1$, pri čemu je P_1 površina početnoga trokuta. ○ Za proizvoljni trokut duljine osnovice a i visine h potrebno je argumentirati zašto se visina poveća k puta. Jedan je ideja trokut rastaviti na dva pravokutna trokuta. ○ Za specijalni slučaj jednakostraničnog trokuta duljine stranice a možemo koristiti formulu $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Ako se duljina a poveća k puta, površina će se povećati k^2 puta. ○ Ako učenici računaju površinu trokuta pomoću Heronove formule $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, uvrštavanjem koeficijenta povećanja k i algebarskim manipulacijama dobivaju isti zaključak da se površina povećala k^2 puta. ○ Ukoliko neki učenik zna formulu $P = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2}$, površina će novoga trokuta duljina stranica $k \cdot a$ i $k \cdot b$ također biti k^2 puta veća. |
|--|---|

Objašnjenje materijala

Dvije fotografije trebaju učenike uvesti u fazu primopredaje. Učenici znaju zumirati slike na mobitelima i računalima. Likovi na fotografijama koji se mogu pojmiti kao trokut i trapez. Trapez se može podijeliti na trokute i problem svesti na problem povećanja trokuta. Dakako, to treba i argumentirati. Taj problem treba nastavnik istaknuti u posljednjoj primopredaju ako učenici sami nisu primijetili. U Dodatku A je nastavni listić s tri različite dimenzije fotografija koje se mogu koristiti u radu.

Ako učenici i inače koriste IKT u nastavi, primjerice u Geogebri ili Geometer's Sketchpadu, fotografije se učenicima mogu dati u elektronskoj verziji. Površinu mogu izračunati označavajući vrhove likova te koristeći alate za mjerenje. Dodatci B, C i D sadrže primjere u Geogebri i Geometer's Sketchpadu u kojima učenici mogu eksperimentirati s površinama različitih mnogokuta.



Učenici koriste milimetarski papir i ravnalo (Hrvatska)

Ako učenici barataju samo s osnovnim pojmovima o likovima i njihovih mjera, možda je potrebno potaknuti ih da crtaju likove na milimetarskom papiru i prebrojavaju broj kvadratića koje likovi pokrivaju. Kako bi povećavali likove, a da kutovi ostanu isti, treba im omogućiti da likove izrežu iz papira te ih koriste pri crtanju većih likova. U tome im slučaju trebaju škare i ravnalo, kao što je prikazano na slici.

Ako su učenici navikli raditi s konkretnim modelima mnogokuta, primjerice trokuta, treba im te modele pripremiti. Pomoću njih je učenicima lakše pojmiti problem povećanja površine ako se površina poveća dva, tri ili neki prirodni broj puta te tako preći u simbolički zapis problema.

Varijacije temeljene na didaktičkim varijablama

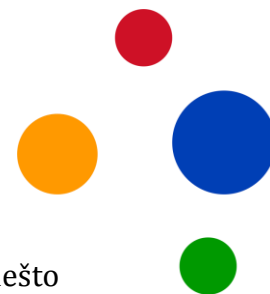
U didaktičkim je fazama potrebno pažnju usmjeriti na učeničke formulacije i potvrđivanje. Ne treba ih previše navoditi u adidaktičkim fazama. U ovom ćemo poglavlju objasniti što se može mijenjati, odnosno koje su didaktičke varijable.

Okruženje (milieu): Mogu se odabrati i druge fotografije ili slike, ali trebaju sadržavati jasne likove, trokut i četverokut (ne pravokutnik). Učenike treba poticati da koriste IKT, ali ako izrađuju dinamične proračunske tablice za priložene slike, trebaju koristiti formule. Učenici će možda doći do zaključka da se površina povećava s koeficijentom k^2 , ali neće znati algebarski obrazložiti. To se onda može napraviti na sljedećem satu. Ako kreirate svoj radni listić, izbjegavajte navođenja ili savjete kao primjerice: Popunite tablicu.

Tijekom potvrđivanja je važno da sve pogrešne strategije ili formule ispravljaju drugi učenici, koliko god je to moguće. Nastavnik može ostatak razreda poticati pitanjima kao: Možete li ponoviti što je upravo rečeno? Zašto to mislite? Otkuda to znate? Vrijedi li to za oba lika? Za sve likove? Koja je veza između $P = \frac{av}{2}$ i

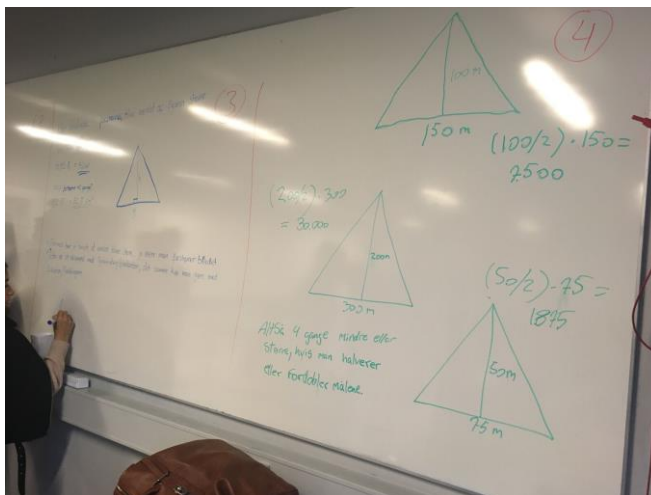
$P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$?, i slično. Pitanja ovise o tome do kuda su učenici došli i koji su im rezultati.

Trajanje faza se svakako mogu prilagoditi učenicima, ali ne previše produljiti. Tijekom prve dvije adidaktičke faze učenicima ne smijemo reći što trebaju otkriti ili ih podsjećati na to što je koeficijent povećanja. Ako nastavnik nije siguran u to što učenici znaju otprije, treba im postavljati pitanja kao: Kada su likovi slični? Kako ih možemo usporediti? Ima li ih smisla usporediti?, i slično. Predloženim



pitanjima treba pomoći pojedinom učeniku ili grupi, ako većina razreda radi nešto smisleno. Ako vidite da gotovo svi učenici imaju problem, tada se faza treba skratiti i učenicima plenarno postaviti pitanja.

Nastavnik ne treba poučavati grupu po grupu. Nadalje, *nije potrebno* ostati uz grupu dok učenici raspravljaju. Provedite malu primopredaju ograničenog problema i ostavite učenike da samostalno djeluju, formuliraju i potvrđuju. Ne pomažite im s daljnjim pitanjima ili odgovorima.



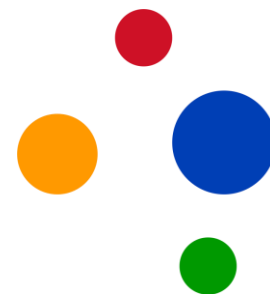
Grupa učenika predstavlja svoje rješenje na ploči (Danska)

Intervencije tijekom *treće faze* djelovanja, formulacije i potvrđivanja: Glavne su ideje slične gore navedenima. Ako je nekoj grupi teško početi, nastavnik ih može savjetovati da usporede strategiju s određenom strategijom neke od ostalih grupa. Važno je za usporedbu odabrati strategiju koja ima neke sličnosti, tako da učenici dobiju mali poticaj za daljnji rad. To je kao nova primopredaja s malo manje otvorenim podproblemom.

Tijekom *završne institucionalizacije*: važno je da se gotovo sve (sve, ako je moguće) strategije komentiraju i povežu međusobno. Primjerice, ako je jedna grupa koristila formulu $P = \frac{av}{2}$, a druga $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, potrebno je komentirati (poželjno je da to čini jedna od grupa učenika) da je $v = b \sin \gamma$. Takve matematičke argumente treba nastavnik detaljno pripremiti (zapisati) kao pripremu za nastavni sat. Razmišljanje o svim mogućim strategijama pomaže nastavniku u vođenju nastavnoga sata i predviđanju procesa razmišljanja kod učenika. Nastavnik treba imati na umu da tijekom poučavanja radi s dinamičkim sustavom – učenicima treba dozvoliti da se prilagode okruženju, ne može od njih očekivati isti način razmišljanja i iste odgovore!

Proces istraživanja prisutan je u *svim* fazama. Možda će trebati više od jedne lekcije da se učenici slobodno upuste u ovakav način poučavanja.

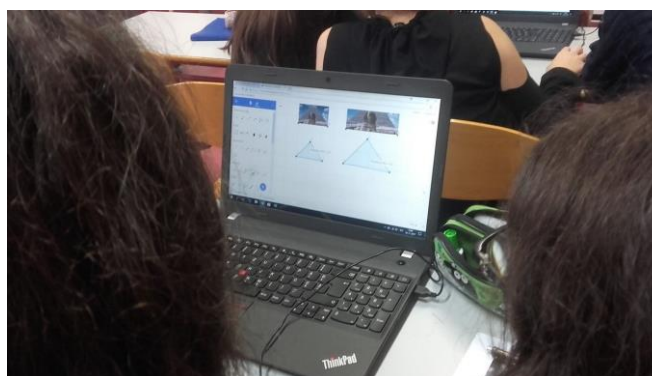
Neki će nastavnici složiti tablicu svih mogućih učeničkih strategija, kao pomoć u adidaktičkim fazama. Uz svaku se od očekivanih strategija mogu pripremiti primjerice 3 pitanja koja nastavnik može koristiti kada grupa predstavlja određenu strategiju. Tijekom adidaktičkih faza nastavnik zapisivati kako grupe diskutiraju o svojim strategijama i te bilješke koristiti kako bi organizirao formulaciju.



Zapažanja iz prakse

Najvažnije zapažanje je da neki nastavnici imaju potrebu poučavati učenike tijekom svih faza scenarija. To uništava adidaktički potencijal situacije i veoma ometa učenike. Također je uočeno da neki učenici proučavaju postotak povećanja ili smanjenja (za koliko se posto povećala površina ako se stranice povećaju za 30 %). To se može povezati s koeficijentom povećanja od $k=1.3$. U tome se slučaju tijekom zadnje faze formulacije i potvrđivanja može pitati učenike da svoj rezultat u postotcima povežu s koeficijentom povećanja. U grupama koje su koristile Heronovu formulu je to prilika da se podsjetite svojstava potenciranja, korjenovanja i rada sa zgradama.

Ako će učenici koristiti IKT, nastavnik treba pripremiti pitanja o tome što računalo radi kada koristimo alate, kako to matematički argumentirati. Primjerice: Što računalo radi kada mjeri površinu? Kako računalo pomoću označenih vrhova računa udaljenost? Što mislite pomoću koje formule računalo računa udaljenost? Kada računalo poveća sliku za 25 %, što se to produlji za 25 %?



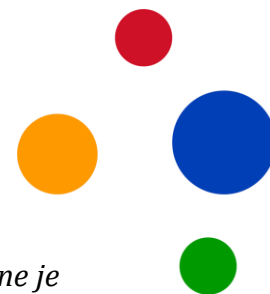
Učenici istražuju dimenzije trokuta u Geogebri (Slovenija).

Ako nastavnik koristi drugačije likove (što je vidljivo iz prakse) treba paziti da slika ne promijeni problem. Ako se na fotografiji uočava treća dimenzija, to bi moglo zbuniti neke učenike. Ako vrhovi nisu jasno vidljivi, može biti teško izmjeriti duljine. Ako se koriste složeniji likovi, možda će to nekim učenicima biti izazov, ali neki bi se mogli zbuniti. Dakle, nastavnik treba odlučiti poznajući svoj razred. Ali svakako treba izbjeći likove koji nisu mnogokuti.

Alati za procjenu

Na kraju lekcije ili ubrzo nakon toga, sljedeći se zadaci mogu koristiti za kratku provjeru znanja usvojenog tijekom provođenja scenarija:

1. Prijatelj ti kaže da za konstrukciju kvadrata čija je površina upola manja od površine zadanoga kvadrata trebaš prepoloviti duljinu stranice kvadrata. Što misliš?
Odgovor: Netočno. Ako se duljina stranice prepolovi, površina će biti četiri puta manja.
2. Duljine stranica trokuta T iznose redom 3 cm, 5 cm i 7 cm. Trokut T^* ima iste kutove, ali mu je površina četiri puta veća. Kolike su duljine stranica trokuta T^* ? *Odgovor: Duljine stranica su dvostruko dulje, odnosno 6 cm, 10 cm i 14 cm.*
3. Lik, primjerice trokut, nacrtan je na papiru formata A4. Povećajte ga na fotokopirnom stroju na format A3 (površina se udvostručuje). Što se događa s duljinama stranica početnoga lika?



Odgovor: Budući se površina udvostručila, koeficijent povećanja površine je $k^2 = 2$. To znači da su se duljine stranica povećale $k = \sqrt{2}$ puta.

- Učenici trebaju u interakciji istražiti Voronojeve dijagrame s tri točke i objasniti zašto (gotovo) uvijek vide podjelu na tri područja.

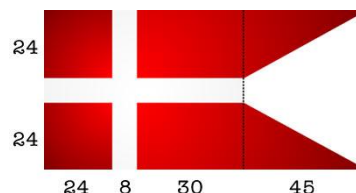
Preporuke za daljnje probleme vezane za površinu i povećanje

Pribor: papir, olovka, ravnalo, kutomjer, džepno računalo.

Rješenja moraju sadržavati detaljna objašnjenja kako se do njih došlo.

- Papir formata A5 je dobiven iz papira formata A4 tako da se list papir formata A4 presavije na pola. Dulja stranica lista papira formata A4 iznosi 297 mm. Koliko iznosi duljina kraće stranice toga lista papira?

- Propis za dimenzije Danske zastave oblika lastavičjeg repa prikazani su na skici. Preporuka je da širina zastave predstavlja $1/5$ visine stupa. Ako je jedinica dužine 1 cm, zastava na skici preporučena je za stup visine 280 cm. Kolika je površina zastave koja se stavlja na stup visine 1120 cm?



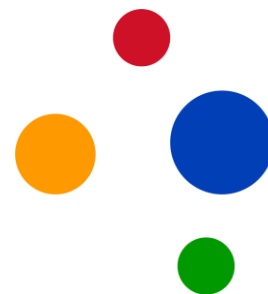
- Cijena 100 listića zlata dimenzija $2.2'' \times 2.0''$ iznosi 27.99 \$. Umjetnik želi zlatnim listićima prekriti slovo **A** na plakatu veličine $3.5 \text{ m} \times 8 \text{ m}$. Rečeno joj je da je to preskupo i da smanji veličinu plakata tako da se cijena potrebne količine zlatnih listića smanji za 30 %. Kolike će biti dimenzije manjega plakata?
- Božićni ukrasi prikazani na slici dobiveni su presavijanjem kružnih isječaka u stošce. Za male je stošce potrebno 350 cm^2 kartona. Procijenite koliko je kartona potrebno za velike stošce.
- Na mapi grada površina parka iznosi otprilike 12 cm^2 . Procijenite stvarnu površinu parka ako je mapa izrađena u mjerilu 1:7200.



- Za projekt iz matematike jedan je učenik izradio sliku od geometrijskih likova. Širina prikazane slike iznosi 5 cm. Na originalnoj slici površina žutoga četverokuta u sredini iznosi 10 cm^2 . Koliko je široka originalna slika?

- Godine 1854. promjer zlatne kovanice od 1 dolara povećan je s 13 mm na 15 mm bez da joj se promijenila masa. Za koliko se posto povećala površina kovanice? Za koliko se posto smanjila debljina kovanice?
- Napišite neka zapažanja o povećanju i skaliranju na temelju umjetničke slike s trokutima prikazane desno?





Načela i RME perspektiva u scenariju

Relevantnost i primjenjivost

Razmatramo sljedeće tri perspektive:

- *Stvarni život*: ovaj je kontekst povezan s svakodnevnim iskustvom povećavanja fotografija ili dokumenata. Učenici trebaju osvijestiti različite interpretacije pojma „dva puta veće od originalne fotografije“ ili da kada traže dvostruko veće kocke od 1 m^3 znači da će dobiti kocku dimenzija: $? \text{ m} \times ? \text{ m} \times ? \text{ m}$.
- *Svijet rada*: Mogućnost poimanja efekta povećavanja i skaliranja s određenim koeficijentom bitan su koncept u mnogim disciplinama, na primjer u zdravstvu (% otopine) ili arhitekturi (modeli u smanjenoj veličini).
- *Daljnja istraživanja*: Znanja i vještine usvojene kroz ovaj scenarij mogu se primijeniti u mnogim znanstvenim disciplinama. (primjerice biologiji – oblici kostiju u životinja i fizici – hlađenje tijela). Povijesno-filozofski aspekt u humanističkim znanostima: duplikacija kocke u poznatom Platonovom dijalogu „Menon“.

Istraživačke vještine

U scenariju Povećanje površine učenici formuliraju hipoteze, smišljaju primjere, sistematično eksperimentiraju, organiziraju podatke, nalaze i opravdavaju formule, suradnički rade i komuniciraju rezultate. Do koje će mjere će vježbati ove vještine uvelike ovisi o načinu na koji će ih nastavnik uključiti u refleksiju metoda za vrijeme drugog potvrđivanja kada grupe prezentiraju. Nadalje, učenike se može uključiti u formulaciju i institucionalizaciju. U tome slučaju predložimo da nastavnik bilježi njihove zaključke kako bi se mogao osvrnuti na njih tijekom sljedećeg sata.

Potencijal za slijed lekcija

Scenarij Povećanje površine može biti dio većega niza lekcija o dilataciji i vezi s promjenom duljine, površine i obujma geometrijskih likova, odnosno tijela.

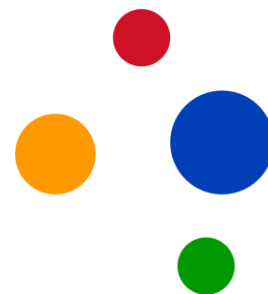
- *Predznanje*

Za provedbu cjeline bi učenici trebali znati formule za računanje površine i obujma osnovnih geometrijskih likova, kao što su trokuti, pravokutnici, krugovi te tijela poput kocke i valjka. Nadalje, učenici trebaju poznavati pojam koeficijenta povećanja i svojstva sličnosti da omjer među duljinama ostaje isti.

- *Uvod*

Kontekst s bogatim otvorenim problemom koji premošćuje modul. Problem u kontekstu koji prirodno povezuje povećanje s promjenom duljine, površine i obujma te priziva pitanje o njihovoj vezi. Mogućnosti:

- Životinje – hlađenje i grijanje tijela određenog obujma u odnosu na površinu kože
- Izrada maketa u omjeru - Minimundus ili pomoću LEGO-kockica
- Pakiranje – količina materijala za pakiranje



- Matrhoška lutke – istraživanje visine i težine lutaka različitih veličina
- Analiza proporcija prilikom povećanja lutaka

Načela za scenarij

- *Horizontalna matematizacija:* Matematički jezik se uvodi kako bi se diskutiralo o situaciji. Učenici kreiraju prvi neformalni model situacije. Učenici istražuju veze generirajući primjere, mjereći i unutar grupe pokušavaju otkriti pravilnost. Pripremaju prezentaciju svojih rezultata. Nastavnik vodi diskusiju o sličnostima i razlikama u rezultatima koje su učenici prezentirali kako bi svi uočili da se različite dimenzije ponašaju različito. To rezultira potrebom da se jedna dimenzija detaljno istraži. Primjerice, površina.
- *Vertikalna matematizacija:* Matematika koja je bit ovoga problema se dalje istražuje. Radi se apstraktni, općenitiji model. Uvodi se problem površine kroz Scenarij Povećanje površine. U njemu se istražuje povećanje dviju fotografija; jedna prikazuje piramidu, a druga zgradu. Kontekst povećanja slike prirodno dovodi do pitanja o promjeni duljina i površina na slici. Međutim, postoji mogućnost da učenici počnu raspravljati o drugim karakteristikama objekata prikazanih na slici, primjerice, što se događa s dimenzijama piramide kada je povećamo, ili da odlutaju u diskusiju o projekciji i perspektivi. Nakon provedbe scenarija učenici trebaju usvojiti da se površina mijenja s koeficijentom k^2 ako se duljine stranica mijenjaju s koeficijentom k . Nadalje, istraživačke vještine kao generiranje primjera, organiziranje podataka i rezultata te opravdavanje formule mogu biti u fokusu faza formulacije i institucionalizacije.
- *Zaključak i refleksija i prijedlozi za daljnje istraživanje:* Učenik promišlja, povezuje ideje, eksplicitno pokazuje koncepte i vještine, a nastavnik naglašava glavne točke učenja.
U sljedećoj se lekciji može istraživati što nam zaključak/zaključci scenarija govore o početnim rezultatima rada u grupama: možemo li koristiti k^2 i istraživačke strategije u tim kontekstima? Jedan ili više početnih problema se može detaljnije istraživati kako bi se došlo do sličnih zaključaka o duljini i površini. I na kraju razumijevanje da promjena duljine za koeficijent k dovodi do promjene karakteristike objekta (primjerice površine ili obujma) dimenzije d (primjerice $d = 2$ ili $d = 3$) s koeficijentom k^d .