


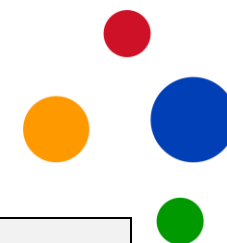


## MERIA Scenario “Conflictlijnen – introductie”

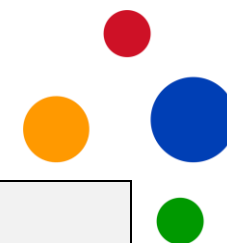
### Het segmenteren van een vlak met middelloodlijnen

Leerdoel	Een gebied met punten kun je verdelen in deelgebieden met middelloodlijnen van paren punten.
Bredere leerdoelen	<p>Constructie van een middelloodlijn. Het begrip dat een middelloodlijn de verzameling punten is die even ver van twee gegeven punten afliggen. Eigenschappen van middelloodlijnen en hun snijpunten bij driehoeken en vierhoeken, en de eigenschappen van punten in gebieden die vastgelegd zijn door middelloodlijnen. Kunnen werken met de notatie <math>d(P,X) &lt; d(P,Y)</math>.</p> <p>Onderzoeksvaardigheden: experimenteren, netjes en systematisch tekenen van grensgebieden of deelgebieden die vastgelegd zijn door (afstanden tot) gegeven punten. Bevindingen duidelijk presenteren door te besluiten op welk deel van de getekende middelloodlijnen ook grenslijn zijn. Deze grenslijn noemen we conflictlijn. De kaart met deelgebieden heet ook wel een Voronoi-diagram.</p> <p>Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen kunnen een territoriaal probleem of geografisch conflict (aardrijkskunde) verbinden met meetkundige redeneringen. Andere vakgebieden kunnen ook aan de orde komen, bijvoorbeeld de navigatie van een robot.</p>
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Pythagoras en driehoeksongelijkheid (vooral vanwege het bewijs dat de middelloodlijn een conflictlijn is).
Leerjaar	Leerjaar 4-5, leeftijd 15-16 jaar (wanneer de middelloodlijn wordt geïntroduceerd).
Tijd	40 minuten, met gebruik van applet 70 minuten.
Benodigd materiaal	Werkbladen, papier, ICT en MERIA applet in GeoGebra: <a href="https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html">https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html</a> Alternatieve sites: <a href="http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html">http://alexbeutel.com/webgl/voronoi.html</a> , <a href="https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4">https://www.desmos.com/calculator/ejatebvup4</a>
<b>Observaties bij implementaties</b>	
De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):	
<p><b>Probleem:</b> Gegeven is een kaart van een woestijn met waterbronnen. Leerlingen worden gevraagd om gebieden in de woestijn zó te kleuren dat voor elk mogelijk punt in een gekleurd gebied, de bijbehorende bron de dichtstbijzijnde is. <sup>1</sup></p>	
	

<sup>1</sup> Het probleem en de kaart van de woestijn worden geïntroduceerd in het boek 'Geometry with Applications and Proofs, Voronoi Diagrams' door A. Goddijn, M. Kindt, W. Reuter



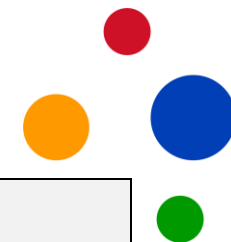
Fase	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties bij implementaties
Devolutie 1 (didactisch)  5 minuten	Introduceer het begrip conflictlijn klassikaal: Stel dat twee leerlingen (X en Y) wat snoepjes hebben en aan jou wordt gevraagd om een snoepje te halen bij de dichtstbijzijnde. De leerkracht kiest twee leerlingen uit en vraagt: wie is dicht bij leerling X en wie bij leerling Y. Tenslotte laat de leerkracht leerlingen hun hand opsteken als ze moeite hebben met beslissen.	Leerlingen doen mee door hun handen op te steken en te beslissen bij wie ze het dichtstbij zitten. Daarbij zien ze de beslissingen van hun klasgenoten.	
Institutionalisering (didactisch)  2 minuten	De leerkracht vat de belangrijkste bevinding samen: Het probleem is om punten met 'dezelfde afstand' te vinden, de uitdaging ligt bij het vinden van een soort procedure waarmee je precies en met zekerheid de verzameling van zulke punten kunt vinden. De notatie (bijv. $d(A,C) < d(B,C)$ wanneer C dicht bij A dan B ligt) wordt geïntroduceerd. Hier wordt bij de volgende stap verder op in gegaan (leerlingen krijgen de mogelijkheid om te werken met notatie en afstands-gerelateerd beredeneren).	Leerlingen luisteren en kunnen de geïnstitutionaliseerde redeneringen en notatie verbinden met hun eigen werk.	
Devolutie 2 (didactisch)  3 minuten	De leerkracht legt een nieuw probleem voor: Zet jezelf ergens in de woestijn (voorzien de leerlingen van een werkblad). Vind de bron die het dichtst bij je ligt. Vind alle plekken vanaf waar je ook naar die bron zou gaan.	Leerlingen luisteren en maken een begin aan het werken op de kaart van de woestijn.	



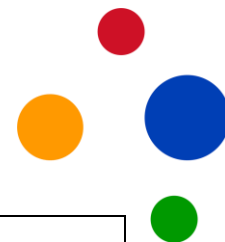
	Verdeel uiteindelijk de kaart in gebieden zodat alle punten in een gebied het dichtste bij de bijbehorende bron liggen.		
Actie (a-didactisch)  15 minuten	De leerkracht loopt rond in de klas.	Na de bron die het dichtste bij hun ligt gevonden te hebben, beginnen groepen met het construeren van een gebied met alle van zulke punten – de dichtstbijzijnde bron gepaard met punten, die een voor een gevonden worden. De leerlingen ontdekken dat, om uiteindelijk tot gebieden te komen, ze een soort strategie (bewijs) nodig zullen hebben omdat het te ingewikkeld wordt wanneer ze meer punten toevoegen.	
Formulering (a-didactisch)  5 minuten	De leerkracht loopt rond in de klas om verschillende ideeën die de leerlingen opperen en gebruiken vast te stellen en kondigt presentaties aan.	Leerlingen bespreken in groepsverband wat ze hebben gedaan, en schrijven op wat de verzameling aan punten met de gevraagde eigenschap volgens hun is.	
Validatie (didactisch en a-didactisch)  5 minuten	De leerkracht vraagt wat groepen om te presenteren wat ze tot nu toe hebben gedaan (als het mogelijk is ten minste een groep die cirkels gebruikt en een groep die met middelloodlijnen is begonnen)	Leerlingen presenteren.	
Institutionalisering (didactisch)  5 minuten	De leerkracht laat de onderliggende stelling van wat er tot nu toe is gedaan zien: $d(A,P) = d(B,P)$ dan en slechts dan als P op de middelloodlijn ligt. Voronoi diagrammen worden gemaakt met middelloodlijnen, dus liggen die aan de basis voor de algoritmes die zulke diagrammen maken. Daarbij kunnen de definities van middelloodlijnen	Leerlingen begrijpen de geïntroduceerde notatie omdat dat te maken heeft met hun activiteit. Zo definieert $d(A,P)=d(B,P)$ een lijn van punten P (de 'conflictlijn' van punten A en B). $d(A,P)<d(B,P)$ definieert een gebied (zogeheten 'veilig gebied'). Daarnaast begrijpen ze het wiskundige probleem,	



	<p>besproken worden: “de verzameling aan punten met gelijke afstand tot punten A en B”, en “de lijn door het middelpunt van en loodrecht op lijnstuk AB. Een optioneel onderdeel van het scenario: Kan je de stelling bewijzen? (Niet alle leerlingen hebben daar de behoefte toe)</p>	<p>aangezien dat ook naar boven kwam in hun activiteit.</p>	
<p>Devolutie 3 (optioneel)  5 minuten</p>	<p>ICT kan gebruikt worden om Voronoi diagrammen te maken. De leerkracht demonstreert wat een ICT programma kan doen (na twee punten toegevoegd te hebben). Herinner je/herontdek dat er een lijn is met punten van gelijke afstand, en dat het vlak opgedeeld is in twee gebieden. Ga daarna door met drie punten, en ontdekt dat er een punt met gelijke afstand tot alle drie is. Gebruik bijvoorbeeld: <a href="https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html">https://meria-project.eu/applet/voronoi/voronoi.html</a>. Kom terug op je originele probleemstelling en onderzoek wat er gebeurt in specifieke gevallen. Speel er een beetje mee tot je bijvoorbeeld een mooi en verassend patroon met een verzameling van gestructureerde punten vindt. Ook kan je de patronen uitzoeken die je krijgt met het plaatsen van vier punten.</p>	<p>Leerlingen luisteren en aanschouwen hoe de software automatisch Voronoi diagrammen tekent. Ze raken erin geïnteresseerd en uitgedaagd om de software zelf te gebruiken. Ze willen onderzoeken wat er gebeurt door er een beetje mee te spelen.</p>	
<p>Actie (a-didactisch)</p>	<p>De leerkracht loopt rond in de klas, daagt studenten uit om systematisch te experimenteren en helpt alleen met</p>	<p>Leerlingen construeren een zelfbedacht probleem in de software, vinden de oplossing en vergelijken dat met het</p>	



10 minuten	softwarematige problemen. Als veel leerlingen hetzelfde probleem hebben, behandeld dat dan klassikaal.	originele figuur. Ze onderzoeken ook wat er gebeurt in andere gevallen met regelmatig en/on onregelmatig verdeelde punten.	
Formulering (a-didactisch) 5 minuten	De leerkracht vraagt aan de leerlingen om een presentatie voor te bereiden over hun (meest verrassende) bevindingen en daagt ze uit om specifieke patronen uit te leggen (bijv. wanneer heeft een 4-punt Voronoi diagram vier gebieden?).	Leerlingen bereiden twee screenshots voor: een van de oplossing van hun zelfbedachte probleem en de ander van een mooi patroon (en hoe ze die geconstrueerd hebben). Ze proberen hun bevindingen te beargumenteren met de cirkel-tool, formele afstands-notatie, en stellingen zoals Thales, Pythagoras ...	
Validatie (didactisch en a-didactisch) 5 minuten	De presentaties helpen met de validatie van wat er gaande is in deze diagrammen, het bekend raken met de formele notatie en het gebruik van geometrische redeneringen in verschillende segmentatie situaties.	Leerlingen zien het verband tussen de validatie en de formuleringen van hun bevindingen.	
Institutionalisering (didactisch) 5 minuten	Algemene conclusies over het concept van Voronoi diagrammen bestaan uit middelloodlijnen en een aantal illustrerende gevallen en patronen in deze diagrammen.	Leerlingen realiseren zich hoe de geïnstitutionaliseerde leerdoelen verbonden zijn met hun initiële onderzoek binnen de woestijn-context en hebben die leerdoelen behaald.	
Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sommige leerlingen zullen beginnen met het schetsen van lijnen tussen de gegeven punten met min of meer gekromde delen en geen duidelijk snijpunt waar drie (of vier) lijnen elkaar ontmoeten.</li> <li>• Sommige leerlingen zullen cirkels tekenen of de gebieden verdelen met gekromde lijnen. Deze leerlingen zullen zich moeten realiseren dat gekromde lijnen onmogelijk zijn en dat het tekenen van cirkels behulpzaam is voor het vinden van punten met dezelfde afstand tot een bron of middelpunt, maar niet voor het vinden van grenzen (alhoewel het wel daarvoor gebruikt kán worden).</li> <li>• Sommige leerlingen zullen meteen weten wat ze moeten doen en beginnen met het tekenen van middelloodlijnen. Voor hen is het cruciaal om te bespreken wat er gebeurt in de gebieden waar middelloodlijnen elkaar ontmoeten. Komen ze samen in één punt?</li> </ul>		



Werkblad

