



MERIA Scenario “Remweg”

Kwadratisch verband

Leerdoel	De remweg heeft een kwadratisch verband met de beginsnelheid.
Bredere leerdoelen	Kwadratische functies en hun karakteristieken als een constante tweede afgeleide (tweede verschil voor kwadratische rijen), en een constant stijgende of dalende afgeleide (verschil voor kwadratische rijen). Berekeningen doen met verschillende meeteenheden. Data organiseren. Functionele verbanden formuleren. Grafieken van (kwadratische) functies tekenen op papier of met ICT. Onderzoeksvaardigheden: data analyseren en het zoeken naar patronen in tabellen, resultaten verantwoorden tijdens presentaties (de berekeningen domineren het proces en leerlingen moeten hun aanpak kunnen samenvatten). Interdisciplinaire vaardigheden: leerlingen moeten werken met variabelen uit de natuurkunde en de situatie leren begrijpen (door de werelden van notatie en procedure samen te brengen). Professionele communicatievaardigheden worden benadrukt door het schrijven van een verslag. Leerlingen bespreken ook de verantwoordelijkheid van bestuurders en verkeersveiligheid.
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Basale kennis over functies, het verband tussen constante snelheid en afstand, gemiddelde snelheid, km/u omrekenen naar m/s (en vice versa).
Leerjaar	Jaar 4, leerlingen met een leeftijd van 15-16 (wanneer kwadratische functies zijn behandeld)
Tijd	90 minuten, twee lessen
Benodigd materiaal	Werkbladen met in te vullen tabellen, rekenmachine, computer, ruitjespapier.

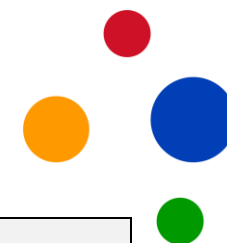
Observaties bij implementaties

De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):

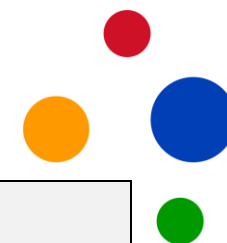
Probleem: In een stedelijk gebied met veel basisscholen klagen ouders over de huidige snelheidslimiet, omdat ze die ontoereikend vinden voor een gebied waar veel kinderen naar school gaan. Een groep roekeloze bestuurders zegt dat ze zich geen zorgen hoeven te maken omdat ze op tijd remmen. Nu worden jullie (de leerlingen) gevraagd om te onderzoeken hoe de remweg afhankelijk is van de snelheid vlak voor het remmen. Adviseer de burgemeester over de gevolgen van het veranderen van de snelheidslimiet. Onderbouw je advies met representaties zoals tabellen en grafieken.

Beschouw een auto die zó remt dat de snelheid elke 0,4 seconden met 10 km/u vermindert. Je kan de tabellen hieronder gebruiken om je berekeningen te organiseren, observeren, en vervolgens je antwoord zo goed mogelijk te onderbouwen.

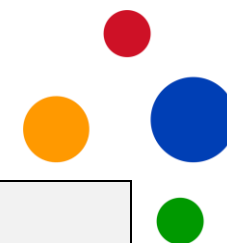




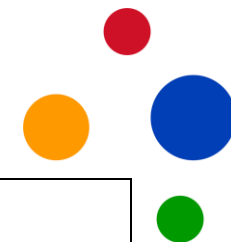
Fase	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties bij implementaties
Devolutie, overdracht (didactisch) 10 minuten	De leerkracht deelt de klas op in groepen van drie of vier. De leerkracht introduceert het probleem aan de leerlingen. Hij/zij zorgt ervoor dat de leerlingen de aanname van een constant afnemende snelheid tijdens het remmen begrijpen en bespreekt het idee van kleine tijdsintervallen waar de beweging kan worden benaderd door een beweging met constante (gemiddelde) snelheid. De leerkracht controleert dat de leerlingen de termen in de tabellen, het basale verband tussen snelheid tijd en afstand, het omrekenen van km/u naar m/s en het idee dat 40 km/u vervangen kan worden met andere getallen begrijpen. De leerkracht merkt naar de leerlingen op dat ze de vrijheid hebben om hun eigen en andere strategieën te gebruiken. Ze hebben de vrijheid om elke vorm van technologie te gebruiken.	Leerlingen luisteren, praten over hun ideeën en beantwoorden de vraag.	
Actie (a-didactisch) 20 minuten	De leerkracht loopt rond en observeert de leerlingen zonder in te grijpen. In het geval dat veel groepen met een nieuwe tabel beginnen voor elke nieuwe beginsnelheid, kan de leerkracht klassikaal behandelen hoe de groepen daar mee	Leerlingen bespreken strategieën binnen hun groep. Ze maken tabellen af met rekenmachine of met ICT om punten grafisch te weergeven.	



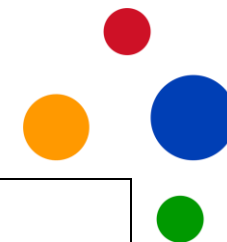
	<p>omgaan. Waarschijnlijk zal ten minste één van de groepen zich realiseren dat ze de vorige berekeningen kunnen hergebruiken bij het bepalen van remwegen voor andere beginsnelheden. Dit kan als feedback voor alle andere groepen gebruikt worden.</p>	<p>Ze hebben het over precisie en kiezen daarvoor verschillende startsnelheden.</p> <p>Groepsleden hebben verschillende ideeën en ontwikkelen die individueel.</p> <p>Leerlingen gebruiken eventueel berekeningen, grafieken of natuurkundige wetten om tot conclusies te komen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Verandering van remweg is niet constant, - Het verband tussen startsnelheid en afstand is niet lineair, - Wanneer de startsnelheid verhoogt, wordt de remweg langer, maar niet proportioneel. <p>Sommige leerlingen zal het opvallen dat de tweede verschillen (ongeveer) constant zijn en passen een recursieve methode toe voor berekeningen.</p>	
<p>Formulering (didactisch)</p> <p>10 minuten</p>	<p>De leerkracht gaat langs bij elke groep en vraagt of ze kort kunnen presenteren wat ze hebben gevonden. Zij/hij zou vragen kunnen stellen en hun ideeën bespreken, vooral wanneer ze niet verder komen. De leerkracht vraagt de groepen met meerdere strategieën om zich op één strategie te richten die ze zullen gebruiken om hun ideeën te presenteren (in verband met tijdsgebrek).</p>	<p>Leerlingen geven een korte presentatie van hun werk en stellen vragen.</p>	



	De leerkracht herinnert de leerlingen eraan dat het doel van activiteit is om erachter te komen hoe de remweg zich verhoudt tot de snelheid vlak voor het remmen om voorspellingen te kunnen maken en goed advies te kunnen geven aan de burgemeester.		
Actie en formulering (a-didactisch) 20 minutes	De leerkracht observeert.	Leerlingen proberen hun berekeningen en observaties te generaliseren. Sommige zullen hun strategie voor het generaliseren of aanpak van het probleem kunnen veranderen. Leerlingen bereiden zich voor om advies te geven aan de burgemeester	
Validatie (didactisch) 25 minuten	De leerkracht vraagt de leerlingen om hun strategieën te presenteren en vergelijken.	Leerlingen presenteren hun werk, luisteren, stellen vragen en bespreken andere strategieën en oplossingen.	
Institutionalisering (didactisch) 5 minuten	De leerkracht benadrukt de wiskundige verschillen en gelijkheden tussen de strategieën van de leerlingen, legt uit waarom sommige strategieën geen bewijs leveren maar wel overtuigend kunnen zijn met een grafiek en formule die eventueel met technologie zijn gemaakt. Ook legt die uit dat het verband kwadratisch is. De leerkracht introduceert kwadratische functies.	Leerlingen luisteren en verbinden hun oplossingen met een algemene kwadratische functie.	



Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen	Leerlingen krijgen de tabel met data (v, d).									
		Tijd (seconden)	Snelheidsverandering tijdens het remmen (km/u)	Gemiddelde snelheid (km/u)	Gemiddelde snelheid (m/s)	Tijdsinterval Δt	Afgelegde afstand Δd (m)			
		$t = 0$ tot $t = 0.4$	$v = 40$ tot $v = 30$	35	$\frac{175}{18}$	0.4	$\frac{35}{9}$			
		$t = 0.4$ tot $t = 0.8$	$v = 30$ tot $v = 20$	25	$\frac{125}{18}$	0.4	$\frac{25}{9}$			
		$t = 0.8$ tot $t = 1.2$	$v = 20$ tot $v = 10$	15	$\frac{25}{6}$	0.4	$\frac{15}{9}$			
		$t = 1.2$ tot $t = 1.6$	$v = 10$ tot $v = 0$	5	$\frac{25}{18}$	0.4	$\frac{5}{9}$			
	Afgelegde afstand na het remmen (m)						$\frac{80}{9}$			
	Snelheid vlak voor het remmen (km/u)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	Remweg (m)	5	$\frac{80}{9}$	$\frac{125}{9}$	20	$\frac{245}{9}$	$\frac{320}{9}$	45	$\frac{500}{9}$	$\frac{605}{9}$
	Of met kommagetallen bijvoorbeeld:									
Snelheid vlak voor het remmen (km/u)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	
Remweg (m)	5	8.89	13.89	20	27.22	35.56	45	55.56	67.22	

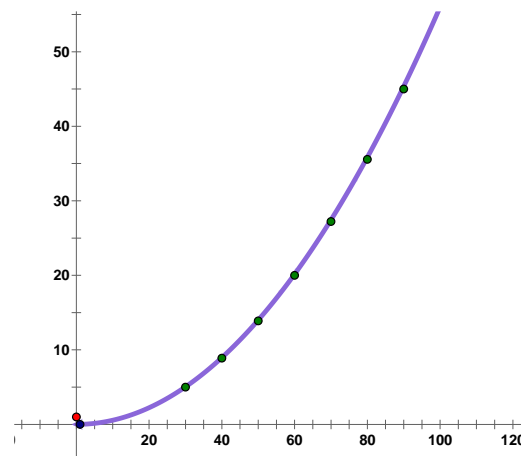


Door naar de data te kijken kunnen ze concluderen:

- De remweg is langer wanneer de snelheid hoger is.
- Het verband tussen snelheid en remweg is niet lineair ($\frac{\Delta d}{\Delta v}$ is niet constant).
- Als de snelheid verdubbeld, verviervoudigd de afstand zich. Wanneer de snelheid verdrievoudigd, wordt de afstand negen keer zo groot.
- Leerlingen kunnen de punten (v, d) tekenen en concluderen dat het verband misschien kwadratisch is. Ze kunnen de kwadratische functie

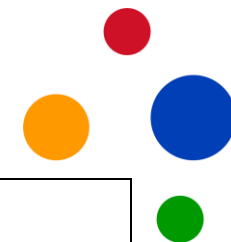
$$d = av^2 + bv + c$$

opschrijven en de onbekende coëfficiënten a, b, c bepalen door data in te vullen en het systeem aan lineaire vergelijkingen op te lossen. Ze zullen een benadering krijgen. Deze strategie zal geen bewijs leveren voor een kwadratisch verband.



- Na de conclusie dat het verband mogelijk kwadratisch is kunnen de leerlingen ICT gebruiken om kwadratische regressie te vinden. Ze zullen een benadering krijgen. Deze strategie zal geen bewijs leveren voor een kwadratisch verband.
- Met de data in de tabellen kunnen leerlingen generaliseren:

$$d_{40} = 5 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 15 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 25 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4 + 35 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$



$$d_{40} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7) = \frac{5}{9} \cdot 16 = \frac{80}{9} \approx 8.89$$

$$d_{50} = d_{40} + 45 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{50} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = \frac{5}{9} \cdot 25 = \frac{125}{9} \approx 13.89$$

$$d_{60} = d_{50} + 55 \cdot \frac{5}{18} \cdot 0.4$$

$$d_{60} = \frac{5}{9}(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9}(1 + 3 + \dots + (2n - 1)) = \frac{5}{9} \cdot n^2$$

Een belangrijke conclusie is dat wanneer we de remweg observeren, we zoeken naar het moment dat de snelheid gelijk aan nul is; zoveel keer zullen we tien aftrekken van v_0 tot dat we nul krijgen:

$$v_0 - 10n = 0 \Rightarrow n = \frac{v_0}{10}$$

$$d_{v_0} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{1}{180} v_0^2 \approx 0.0056 v_0^2$$

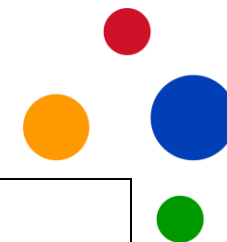
In deze formule is v_0 in km/u en krijgen we de afstand in meters.

- Leerlingen kunnen rekenmachines gebruiken en de data met kommagetallen in de tabellen opschrijven. De resultaten zullen niet exact zijn en zo is het niet makkelijk om patronen te herkennen.
- Leerlingen kunnen de informatie gebruiken dat de snelheid elke 0.4 seconden met 10 km/u vermindert. Ze kunnen berekenen dat de snelheid elke seconde met 25 km/u vermindert, of met 6.94 m/s, wat betekent dat de versnelling $a = 6.94 \text{ m/s}^2$ is. Dan gebruiken ze formules uit de natuurkunde:

$$v = v_0 - at, d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2.$$

Ze komen tot een belangrijke conclusie: wanneer we de remweg observeren zoeken we voor het moment dat de snelheid gelijk is aan nul. Uit de eerste formule ($v = 0$) berekenen ze de tijd $t = \frac{v_0}{a}$ en substitueren ze dat in de tweede om te krijgen dat:

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{9v_0^2}{125} = \frac{v_0^2}{13.8} = 0.072v_0^2.$$



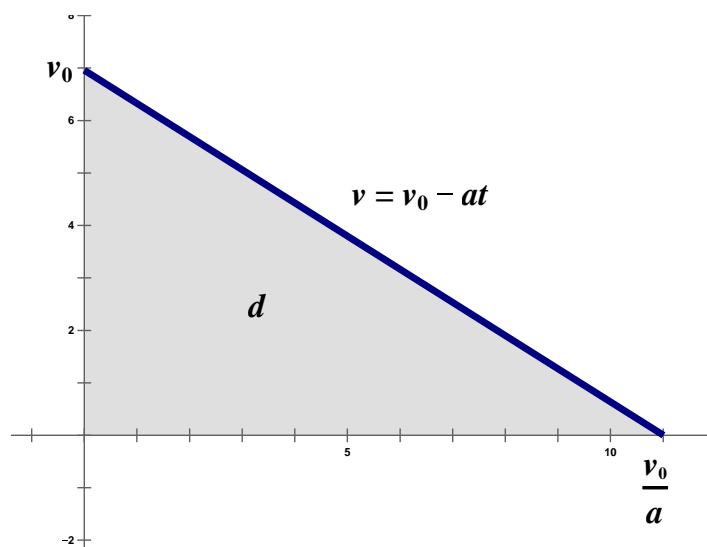
- In deze formule is v_0 in m/s en krijgen we de afstand in meters.
- Als studenten de versnelling berekenen in km/u^2 krijgen ze:
 $a = 90000 \text{ km/u}^2$, substitueer v_0 in km/u en krijg de afstand in kilometers.

$$d = \frac{v_0^2}{180000}, \text{ of in meters } d = \frac{v_0^2}{180}.$$

- Leerlingen kunnen een v - t grafiek tekenen en de afstand bepalen door de oppervlakte onder de grafiek uit te rekenen:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{a} \cdot v_0 = \frac{v_0^2}{2a} = 0.072v_0^2.$$

In deze formule is v_0 in m/s.





	Tijd (seconden)	Snelheidsverandering tijdens het remmen (km/u)	Gemiddelde snelheid (km/u)	Gemiddelde snelheid (m/s)	Tijdsinterval Δt (s)	Afgelegde afstand Δd (m)
	$t = 0$ tot $t = 0.4$	$v = 40$ tot $v = 30$	35			
Afgelegde afstand na het remmen (m)						

Snelheid vlak voor het remmen (km/u)	40							
Remweg (m)								