MERIA Scenario “Fietsfabriek”

Lineaire en stapsgewijze lineaire functies

<table>
<tr><td>Leerdoel</td><td>De constructie van stapsgewijze lineaire functies als optimale oplossing voor een probleem met meerdere lineaire voorwaarden.</td></tr>
<tr><td>Bredere leerdoelen</td><td>Grafieken tekenen van (lineaire) functies op papier en met ICT. Bespreking over het schalen van de grafieken langs één as. Dieper begrip van lineaire functies (de helling a en de constante b) door ze te gebruiken met lineaire voorwaarden om stapsgewijs lineaire functies te construeren. Bespreking van de continue en discrete aspecten in relatie tot algebraïsche en grafische weergaven tijdens het modellering proces.
Onderzoeksvaardigheden: experimenteren met getallen voor het tekenen van een grafiek, onbelangrijke data en duidelijk suboptimale fabrieken negeren, resultaten van het modelleren interpreteren, verantwoordelijkheid nemen voor het eindverslag en bevindingen presenteren in de vorm van een advies.
Interdisciplinaire vaardigheden: Leerlingen zullen de verscheidene economische aspecten van het probleem kunnen bespreken, zoals de verschillen tussen winst en inkomsten. Professionele communicatievaardigheden worden benadrukt bij het schrijven van het verslag.</td></tr>
<tr><td>Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden</td><td>Het tekenen van de grafiek van een lineaire functie. Bekendheid met de notatie $f(x) = ax + b$ en het interpreteren van a en b.</td></tr>
<tr><td>Leerjaar</td><td>Leeftijd van 15-16 jaar, klas 4-5 (nog eerder met kleinere getallen).</td></tr>
<tr><td>Tijd</td><td>50 min (80 min)</td></tr>
<tr><td>Benodigd materiaal</td><td>De tabel met data over de kosten
<table>
<tr><th>Locatie</th><th>Kosten van het bouwen van een fabriek op locatie in €</th><th>Kosten van het produceren van één fiets in de fabriek in €</th></tr>
<tr><td>A</td><td>300 000</td><td>120</td></tr>
<tr><td>B</td><td>450 000</td><td>110</td></tr>
<tr><td>C</td><td>660 000</td><td>60</td></tr>
<tr><td>D</td><td>680 000</td><td>80</td></tr>
</table>
Ruitjespapier en/of applets (om de lineaire voorwaarden aan te passen) en/of ICT in het algemeen, voor het maken van grafieken, aanpassen of toevoegen van voorwaarden, het vinden van snijpunten etc. Een breed krijtbord of whiteboard (of smartboard).</td></tr>
</table>

Observaties bij implementaties
De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):

Probleem:

Je bent een consultant die bedrijven adviseert over de locatie waar ze hun nieuwe fietsfabrieken kunnen bouwen. Op basis van de tabel die de kosten laat zien van de verschillende locaties, wat zou je de bedrijven adviseren en waarom?[1]

Fase	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties bij implementaties
Devolutie (didactisch) 5 minuten	De leerkracht legt de situatie en de bovenstaande tabel uit, en legt het probleem voor. “Hoe zou je in het algemeen de bedrijven begeleiden bij het kiezen van een locatie voor hun fabriek? Werk samen met je buur en bereid een klassikale presentatie van jullie oplossing voor.”	Leerlingen luisteren en begrijpen de relevantie van het probleem. Ze kunnen vragen hebben over de betekenis van de tabel en het probleem. De leerkracht zal de leerlingen de kans moeten geven om zulke vragen te stellen om er voor te zorgen dat iedereen het begrijpt.	
Actie (a-didactisch) 15 (20) minuten	De leerkracht observeert en noteert hoe de leerlingen het probleem aanpakken. Dit is waar de leerkracht kennis opdoet over de voorkennis van de leerlingen. Het is belangrijk dat de leerkracht geen hints en alleen – indien nodig - de opdracht nog eens duidelijk maakt.	De paren beginnen met het uitproberen van verschillende strategieën, gebaseerd op hun eigen voorkennis. Zie “Mogelijke manieren voor de leerlingen om het leerdoel te behalen”. Omdat de leerlingen in paren werken zal de a-didactische formulering voorkomen.	
Formulering (didactisch)	De leerkracht kiest groepen (tenminste drie) die verschillende strategieën	De paren presenteren zoals de leraar heeft aangegeven (eerst simpele	

[1] Dit probleem is geinspireerd door Example 2.10 uit het boek *„Primijenjena matematika podržana računalom“* van het project *„STEM genijalci*".

10 (15) minuten	presenteren bij het bord – het bord zal verdeeld moeten worden in gebieden voor de presentaties. De leerlingen mogen niets achteraf uitvegen. Laat de gekozen paren mondeling presenteren, beginnende met simpelere oplossingen. Op dit punt zal er geen validatie komen.	oplossingen gebaseerd op getallen, daarna oplossingen met grafieken en functies).	
Devolutie (didactisch) 1 minuut	Bespreek met je partner wat de overeenkomsten en verschillen zijn tussen de presentaties. Gebruik dat om je eigen antwoord te verbeteren. Jullie hebben vijf (tien) minuten.	Leerlingen luisteren. De leerkracht moet ervoor zorgen dat alle leerlingen het begrijpen.	
Actie/ formulering (a-didactisch) 5 (15) Minuten	De leerkracht loopt rond om te observeren wat de paren bespreken, en hoe ze gebruik maken van de ideeën van de anderen.	De paren wijzen naar de overeenkomsten en verschillen, en proberen daarmee hun eigen oplossing te verbeteren.	
Formulering en validatie (didactisch) 10 (15) minuten	De leerkracht probeert zoveel mogelijk observaties en verbeterde antwoorden van de paren (klassikaal) te behandelen. De leerkracht streeft ernaar dat leerlingen fouten uit de vorige oplossingen vaststellen.	Leerlingen formuleren overeenkomsten en verschillen, en leggen daarbij uit hoe ze hun eigen oplossing daarmee hebben kunnen verbeteren. Mogelijk wijzen ze ook op tekortkomingen.	
Institutionalisering (didactisch) 5 (10) minuten	De leerkracht benadrukt dat er niet één correct antwoord is, maar dat het antwoord afhangt van de hoeveelheid fietsen die geproduceerd worden. De leerkracht baseert uitleg eerst op de antwoorden van de leerlingen, om daarna de notatie van stapsgewijze functies te introduceren met een voorbeeld:	Leerlingen luisteren en herkennen de definitie in hun eigen strategie. Ze reflecteren op hoe dit zich tot de anderen verhoudt. Ze maken hun aantekeningen.	

	$$f(x) = \begin{cases} 120x + 3 \cdot 10^5, x \leq a \\ 60x + 6.6 \cdot 10^5, x \geq a \end{cases}$$ Waar a=6000. Hij/zij gebruikt dit om samen te vatten hoe je het bedrijf advies geeft: locatie B en D zijn nooit optimaal, terwijl A en C optimaal zijn voor productie respectievelijk onder en boven 6000 fietsen. De optimale-kosten functie is een stapsgewijze lineaire functie (gedefinieerd met positieve gehele getallen).		

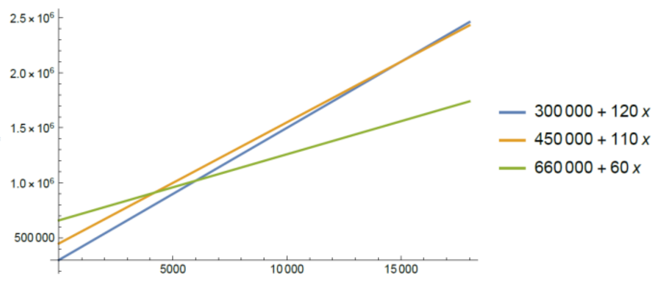
Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen	• Sommige leerlingen beginnen te werken met getallen, om te zien wat ze betekenen: ○ Sommige leerlingen beginnen met het berekenen van de prijzen voor een bepaald aantal fietsen gemaakt op elke locatie. Proefondervindelijk kunnen ze vinden voor welke aantallen twee locaties even voordelig zijn. ○ Leerlingen kunnen tabellen maken voor elke locatie waarin ze de totalen kosten voor een bepaald aantal fietsen berekenen. Zo kunnen ze de locaties vergelijken en de goedkoopste aanwijzen voor elk aantal fietsen (dit kan op papier of in een spreadsheet worden gedaan). ○ Voor elk paar aan locaties kan gekeken worden onder welke voorwaarde de ene beter is dan de andere. Daarvoor moeten de vaste kosten afgewogen worden tegen de variabele kosten. Er zijn in totaal zes van zulke vergelijkingen nodig. • Sommige leerlingen gebruiken meteen functies. Ze stellen voor elke locatie een functie op die de totale jaarlijkse kosten bij een productie van x fietsen beschrijft: $f(x) = 120x + 300\,000,$ $g(x) = 110x + 450\,000,$ $h(x) = 60x + 660\,000,$ $k(x) = 80x + 680\,000.$ ○ De grafieken van de functies worden getekend in één of meer coördinatensystemen. Met die grafische weergave kan bepaald worden welke locatie het beste is. ○ Leerlingen die ruitjespapier gebruiken kunnen het snijpunt kunnen aflezen op de assen.

  - Leerlingen die ICT gebruiken kunnen alle functies in één keer laten tekenen, maar zullen moeite kunnen hebben met het aanpassen van de assen.
  - In elk geval biedt het bovenstaande niet het nodige inzicht hoe de kosten geminimaliseerd kunnen worden. Daarvoor moet er goed nagedacht worden over het probleem. Vergissingen zullen gemaakt worden, zoals de productiekosten verwarren met de verkoopprijzen of winst.
  - Door paren van de vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen kunnen de snijpunten exact gevonden worden. Leerlingen zullen gebruik maken van grafische weergaves om te bepalen welke paren van functies relevant zijn. Deze strategie behoeft vaardigheid in het oplossen van vergelijkingen.
- De leerlingen kunnen tot verschillende conclusies komen.
  - Of de leerlingen werken met getallen (en tabellen), of functies (en grafieken), zullen sommige zich realiseren dat er niet één "beste locatie" is. Het advies hangt namelijk af van het aantal fietsen dat geproduceerd gaat worden. De conclusie kan meer of minder precies zijn geformuleerd: in woorden, vergelijkingen, grafieken, etc.
  - Sommige leerlingen zullen met een snel en onjuist antwoord komen, bijvoorbeeld "A is het beste omdat die bij 1, 2, …, 10 fietsen het altijd de laagste prijs geeft".

- **Voorbeelden van grafieken en vergelijkingen die leerlingen zouden kunnen maken** (zowel op papier of als met technologie), om te kunnen bepalen welke locaties goedkoper zijn bij verschillende waardes voor het aantal geproduceerde fietsen.

```
In[70]:= Plot[{300000 + 120 x, 450000 + 110 x, 660000 + 60 x},
   {x, 0, 18000}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[70]=




```
In[66]:= Solve[300000 + 120 x == y && 450000 + 110 x == y, {x, y}]
Out[66]= {{x → 15000, y → 2100000}}

In[67]:= Solve[300000. + 120 x == y && 660000 + 60 x == y, {x, y}]
Out[67]= {{x → 6000., y → 1.02 × 10^6}}
```