Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA HANDLEIDING VOOR ONDERZOEKEND WISKUNDE LEREN

(deze bladzijde is bewust leeg gelaten)

MERIA HANDLEIDING VOOR ONDERZOEKEND WISKUNDE LEREN

EINDREDACTIE
Carl Winsløw

TEKST GESCHREVEN DOOR
Britta Jessen (Hoofdstuk 1 en 3), Michiel Doorman (Hoofdstuk 2), Rogier Bos (Hoofdstuk 4)

REVIEWS, REDACTIE EN REVISIE
Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Paul Drijvers, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw

VORMGEVING EN BEELDMATERIAAL
Irina Rinkovec

GRAFIEKEN
Rogier Bos, Matija Bašić, Ivan Kokan, Eva Špalj

Project MERIA, Augustus 2017
www.meria-project.eu

(deze bladzijde is bewust leeg gelaten)

Inhoudsopgave

Inleiding

Deze publicatie biedt de theoretische basis voor het MERIA-project, en is vooral bedoeld als ondersteuning bij het ontwerp van lesmateriaal (de scenario's en modules) in het project.

MERIA wil het gebruik van relevante, interessante en toepasbare wiskundige activiteiten op middelbare scholen ondersteunen. De veronderstelling van het project is dat zulke activiteiten de leerlingen aanzetten tot dieper wiskundig denken dan nodig bij het oplossen van oefeningen met vooropgezette methodes. Sterker nog, het „oefeningenparadigma" is in vele alledaagse onderwijssituaties (waaronder de bovenbouw van middelbare scholen en zelfs op de universiteit) een belangrijke factor die bij de gemiddelde leerling een beeld vormt van wiskunde als weinig creatief, irrelevant (in elk geval voor hen) en nutteloos (behalve om het examen te halen) routinewerk. Het alternatief dat wordt voorgesteld en nagestreefd in dit project kan grofweg omschreven worden als *onderzoekend wiskundeonderwijs*, waarbij oefeningen vervangen worden door verschillende soorten „onderzoeksactiviteiten". Onze hoofdtaken zijn dus het ontwerpen van deze activiteiten, ze testen in de praktijk en het verspreiden hiervan onder docenten (als ze blijken te werken).

Het project wil zich baseren op serieus en visionair onderzoek naar hoe eerdergenoemde taken vormgegeven kunnen worden. Deze publicatie bestaat uit vier hoofdstukken:

- Hoofdstuk 1 beschrijft het algemene concept van "onderzoekend leren" bij wiskunde, vanuit een historisch oogpunt en hoe het tegenwoordig omschreven wordt.
- Hoofdstuk 2 biedt algemene strategieën voor het implementeren van onderzoekend leren in de lespraktijk.
- Hoofdstuk 3 en 4 bieden twee specifiekere – en welomschreven – onderzoeksprogramma's voor het vormgeven van onderzoekend leren bij wiskunde:
    - De Theorie van Didactische Situaties (the Theory of Didactical Situation) in wiskunde; een theorie doe ontwikkeld is leerlingen in "onderzoeksachtige situaties" te plaatsen (net als wiskundigen): bestaande uit *actie*, het *formuleren van een hypothese* en de *validering/bewijsvoering*.
    - Realistisch Wiskundeonderwijs waarbij de wiskundige begrippen gevormd worden door het werk van studenten aan contextrijke problemen.

Er worden in de tekst referenties gegeven voor wie op een bepaald onderwerp meer verdieping zoekt dan hier aangeboden kon worden. De bijlage geeft een overzicht van een aantal van de belangrijkste referenties bij dit project. Aan het eind vindt u bovendien een woordenlijst met de belangrijkste specifieke termen uit de tekst.

1. Wat is Onderzoekend leren bij Wiskunde?

Onderzoek kan in vrije zin gezien worden als "het onderzoeken van een probleem". Hier impliceert het woord "onderzoeken" dat de moeite die gestopt wordt in het oplossen van het probleem relatief op zichzelf staat: niet gestuurd door anderen en niet volgens een voorgeschreven geroutineerde methode. *Onderzoekend leren bij Wiskunde* (IBMT - Inquiry Based Mathematics Teaching) is een onderwijsbenadering die leerlingen de mogelijkheid geeft een opdracht uit te voeren die hun huidige wiskundige kennis verrijkt of die leidt tot nieuwe kennis. Het is de bedoeling dat dit onderwijs inzicht in en begrip van wiskundige concepten en methoden voor leerlingen stimuleert.

In dit hoofdstuk tonen we de opkomst en verschillende betekenissen van IBMT. Onderzoek naar wiskundeonderwijs leidde in het verleden al tot diverse bekende begrippen voor het bovenstaande brede concept - methodes voor wiskundeonderwijs zodat leerlingen onderzoeken, verkennen, hypotheses opstellen en nadenken over wiskundige ideeën. Toch is de algemene term IBMT relatief nieuw.

Om IBMT en andere typen wiskundeonderwijs te kunnen onderscheiden, dienen we vooral te verduidelijken wat bedoeld wordt met "een probleem", in welke wijze het anders is dan een taak of een oefening, en waarom het oplossen van een probleem niet hetzelfde is als het oplossen van een oefening. We zullen uiteindelijk bespreken welk belang het heeft dat leerlingen het probleem en de gerelateerde inhoudelijke kennis onderzoeken. Onderzoek toont aan dat het van essentieel belang is dat leerlingen het probleem of de situatie zelf verkennen en aanpakken. Dit kan ze namelijk aanzetten tot het formuleren van hypotheses, het experimenteren, en het formuleren van oplossingen gebaseerd op hun activiteiten en bevindingen.

Voordat we deze onderdelen van IBMT gaan beschrijven, zullen we kort bespreken hoe en waarom IBMT recent opgekomen is als overkoepelende aanpak voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs. MERIA is zeker niet het eerste Europese initiatief ter promotie van IBMT. In de laatste tien jaar heeft de Europese Unie verschillende grootschalige projecten gefinancierd voor het ontwikkelen, implementeren en beoordelen van "onderzoekend natuurwetenschappelijk onderwijs" op diverse niveaus van het onderwijssysteem (Artigue & Baptist, 2012; Mass & Artigue, 2013; Ropohl, Rönnebeck, Bernholt & Köller, 2016). Het merendeel van deze projecten keek ook naar wiskunde naast natuurwetenschappen. Het concept van "onderzoekend leren" is zelfs natuurlijker en duidelijker aanwezig in natuurwetenschappelijk onderwijs dan in wiskundeonderwijs. In het wiskundeonderwijs zijn min of meer gelijkwaardige begrippen en benaderingen ontwikkeld onder de noemer van probleem oplossen of wiskundig modelleren. Er zijn in natuurwetenschappelijk onderwijs, net als in wiskundeonderwijs, echter diverse visies op hoe dit type onderwijs vormgegeven zou moeten worden. Dit handboek behandelt twee van deze benaderingen in wiskundeonderwijs gedetailleerder (Hoofdstuk 3 en 4).

Volgens het Fibonacci-project is onderzoek in natuurwetenschappelijk onderzoek vaak gebaseerd op zintuiglijke ervaringen (Artigue & et al., 2012, p. 9). Verschillende natuurwetenschappelijke begrippen houden verband met ervaringen van snelheid, tijd, licht, kracht, zuurgraad, en veranderingen in seizoenen. Deze ervaringen kunnen verder bestudeerd worden volgens cyclische onderzoeksprocessen, zoals het zogenaamde 5E-model. Het 5E-model verwijst naar de fases van onderzoekend leren in de natuurwetenschappen waarbij er van studenten wordt verwacht dat ze de kennis of ideeën die ontwikkeld worden tijdens een onderzoekend proces betrokken raken bij (engage in), onderzoeken (explore), verklaren (explain), uitdiepen (elaborate) en evalueren (Bass, Contant & Carin, 2009, p. 91). In het 5E-model kan de beleving van kracht of tijd of van chemische reacties voor leerlingen een startpositie zijn die ze betrekt in meer systematisch onderzoek naar een fenomeen of naar oorzakelijke verbanden. Deze onderzoeksprocessen kunnen ertoe leiden dat leerlingen kennis vormen over natuurwetenschappelijke wetten.

Daarentegen borduurt wiskundige kennis vooral voort op bestaande meer theoretische inzichten. Zeker, inductief redeneren met “experimenten” kan in vele situaties gebruikt worden, zoals bij patronen in getallen of bij het zoeken naar een algemenere formulering van een patroon in een serie voorbeelden. Maar, zoals Artigue en Baptist (2012) aangeven, levert de cumulatieve aard van wiskunde een uitdaging voor het één op één overnemen van het concept “onderzoekend leren” van de natuurwetenschappen. In de wetenschap wordt een hypothese (door een onderzoeker of een leerling) gevalideerd door experimenten, terwijl bij wiskunde de ultieme validatie vraagt om bewijs op basis van deductie.

Deze publicatie biedt twee verschillende benaderingen op Onderzoekend Wiskundeonderwijs (IBMT). Eén van de benaderingen geeft voorbeelden over hoe de ervaringen van leerlingen kunnen dienen als startpunt voor een onderzoeksproces. Deze benadering heet Realistisch Wiskundeonderwijs (Realistic Mathematics Education - RME) en is mede ontwikkeld door Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991). De andere aanpak is de Theorie van Didactische Situaties (Theory of Didactical Situations - TDS), oorspronkelijk ontwikkeld door Guy Brousseau (Brousseau, 1997). TDS is gebaseerd op het idee dat leerlingen nieuwe kennis vergaren wanneer ze tijdens het oplossen van een probleem zich aanpassen aan een zogenaamd didactisch milieu. In hoofdstuk 3 en 4 zullen we verder ingaan op RME en TDS. In dit hoofdstuk tonen we de basisbegrippen van IBMT voor de belichting van de herkomst, verantwoordingen (*waarom* het belangrijk is om na te streven) en beperkingen (welke uitdagingen zich voor kunnen doen).

Herkomst van IBMT

Meer dan een eeuw geleden werd voor het eerst aangegeven dat lesgeven in het algemeen gerelateerd zou moeten zijn aan de ervaringen van leerlingen en gericht moet zijn op hun activiteiten. De onderwijskundige John Dewey wordt regelmatig geassocieerd met de uitdrukking “al doende leren”. Hij gaf aan dat onderwijzen zou moeten draaien om de activiteiten van leerlingen en de wijze waarop ze daarvan leren (Dewey, 1902). Dewey (1938) benadrukt het mogelijke belang van onderzoek en de rol ervan binnen leren en onderwijzen - vooral op het gebied van de exacte vakken. Voor een groot deel beschouwde hij wiskunde als een hulpmiddel of een taal om complexe gegevens te ordenen en een systematische behandeling van uitkomsten van onderzoeksprocessen uit te voeren - bijvoorbeeld de uitkomsten van de acties van leerlingen wanneer ze experimenteren met natuurkundige wetten of biologische systemen. Hoewel Dewey geen specifieke voorstellen heeft gedaan over hoe onderzoekend wiskundeonderwijs vormgegeven kan worden, hebben verschillende wiskundigen later zijn ideeën nagestreefd.

Dewey was tegen een lange traditie van *kennisoverdracht* van docent op leerlingen, welke zo oud is als het vak zelf. Voor veel wiskundigen betekent lesgeven herhalen, en leerlingen een gegeven tekst laten opzeggen of het nadoen van een actie van de docent terwijl die wiskundige problemen oplost. Dit geldt ook voor de meer praktische en elementaire kanten van wiskunde, gerelateerd aan rekentechnieken. Zelfs vandaag de dag is wiskundeonderwijs regelmatig gebaseerd op het herhalen van getoonde technieken, en het tot in perfectie herhalen van eindeloze reeksen met dezelfde berekeningen. In veel scholen bestaat een veelvoorkomend “model” voor wiskundeonderwijs uit een docent die een bepaalde techniek toont (bijv. een formule, een regel, een methode) waarna hij zijn leerlingen een aantal “typerende” voorbeelden geeft over hoe ze de nieuwe kennis toe moeten passen wanneer ze bepaalde wiskundige taken oplossen. Tenslotte geeft hij de leerlingen dezelfde soort opdrachten zodat ze kunnen oefenen wat de docent deed (Schoenfeld, 1988). Een voorbeeld zou kunnen zijn dat leerlingen de definitie van tweedegraads vergelijkingen gepresenteerd krijgen en hoe ze de wortels van een vergelijking kunnen vinden,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Leerlingen krijgen daarna de formule

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dan toont de docent de leerlingen hoe ze de wortels van een specifiek vergelijking kunnen vinden, bijvoorbeeld $2x^2 + 2x - 12 = 0$, door de gegeven formule te gebruiken. Leerlingen kunnen meer voorbeelden krijgen voordat ze gevraagd wordt om een reeks van dezelfde oefeningen op te lossen. Zo imiteren leerlingen de actie van de docent terwijl ze kunnen negeren wat dit inhoudt, net als de verantwoording bij de methode. Als leerlingen gevraagd wordt om vergelijkingen op te lossen wanneer de vergelijking één of geen reële wortels heeft, geeft dat voor de leerlingen onderzoeksmogelijkheden naar de betekenis van wortels en oplossingen van de vergelijking.

Routineopdrachten vragen van een leerling alleen imitatie van de docent, wat ze regelmatig zullen doen zonder dat ze de logica of betekenis zien of dat ze de opdrachten en technieken die ingezet zijn voor de oplossing kunnen (re)construeren (Schoenfeld, 1988). Leerlingen kunnen wiskunde na verloop van tijd zelfs zien als een nogal betekenisloos geheel aan technieken die aangeleerd worden door nabootsing. Dit soort onderwijs laat leerlingen vele belangrijke kanten van wiskunde, zoals het oplossen van complexe problemen, samenhangende kennisstructuren bouwen, het speculeren en bewijzen, en het zoeken naar speciale gevallen, niet ervaren.

Voor een groot deel van de leerlingen van middelbare scholen is het de afgelopen eeuw voldoende gebleken om kennis over te brengen en leerlingen te leren hoe ze gestandaardiseerde opdrachten op moeten lossen. In veel landen komt vandaag de dag alleen een grotere en meer diverse groep leerlingen het middelbaar onderwijs in. Het lesgeven aan deze groep vraagt een bredere aanpak onderbouwd door onderzoek in wiskundeonderwijs. Het onderzoeksveld van wiskundeonderwijs is gedurende eeuwen opgekomen, beginnend met docenten die hun reflecties op de lespraktijk deelden en onderwijstechnieken ontwikkelden naar aanleiding van hun eigen ervaringen (Kilpatrick, 2014). Tegenwoordig hebben leerlingen een dieper begrip van wiskunde nodig dan in het verleden om te kunnen voldoen aan de behoeften van de maatschappij. Vroeger was het normaal dat men school verliet om de arbeidsmarkt op te gaan voor de bovenbouw van het middelbaar onderwijs. Dit vroeg slechts om praktische wiskundige vaardigheden zoals rekentechnieken en vastgestelde procedures kunnen herhalen. Tegenwoordig vragen veel beroepen en hoger onderwijs van leerlingen dat ze de middelbare school afronden met kennis en vaardigheden in basisrekenvaardigheden, statistiek, het begrip van functies, etc. Dit groeiende aantal leerlingen in de bovenbouw, sommigen met erg weinig motivatie voor het vak, brengen een specifieke uitdaging met zich mee voor het wiskundeonderwijs. Deze leerlingen kunnen misschien minder goed de overgebrachte kennis opnemen dan eerdere generaties, vandaar dat meer onderzoekend leren nodig is. Beter begrijpen hoe leerlingen wiskundige kennis ontwikkelen blijft een belangrijke onderzoeksinteresse in het wiskundeonderwijs. Mogens Niss formuleert de motivering van zijn interesse als:

> *Als we beter begrijpen hoe leerlingen wiskunde leren, en welke obstakels een gemiddelde leerling daarbij tegen komt, dan zouden we een beter begrip krijgen van wat wiskundige kennis, inzicht, en vaardigheid zijn (en niet zijn), of hoe ze ontwikkeld, opgeslagen, en geactiveerd worden en dus hoe ze gestimuleerd kunnen worden* (Niss, 1999, p. 4).

Gedurende de 20e eeuw zijn diverse benaderingen voor het leren van wiskunde ontwikkeld. Een terugkerend thema is om het onderwijs te laten inspireren door manieren waarop professionele wiskundigen binnen wiskunde denken, leren en onderzoeken.

Vroeg in de 20e eeuw verzamelden de wiskundigen Fehr, Laisant, Hadamard informatie over hoe zij en hun collega's nieuwe wiskundige kennis ontwikkelden - om onderzoek te karakteriseren en om onderzoekers een inspiratie te laten zijn voor het leren van leerlingen (Kilpatrick, 2014). Dit idee kwam ook terug in de eerste hervormingsbewegingen waarbij de Duitse wiskundige Felix Klein (begin 20e eeuw) een nieuw programma introduceerde voor lerarenopleidingen waarin hij praktische opdrachten, de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht en een functionele benadering van wiskunde stimuleerde (Kilpatrick, 2008). Klein speelde een essentiële rol in de vroege ontwikkeling van het onderzoeksgebied van wiskundeonderwijs, en vooral in de relatie tussen onderzoek naar wiskunde en naar wiskundeonderwijs. Op verschillende en vaak indirecte wijzen beïnvloeden zijn ideeën nog altijd het wiskundeonderwijs op de middelbare school. De volgende golf hervormingen, passend bij het idee van IBMT, is de nadruk op het belang van probleem oplossen binnen wiskundeonderwijs in de jaren '80.

Kenmerken van onderzoeksprocessen

In dit onderdeel bieden we een overzicht van ideeën en concepten die leidend waren in de ontwikkelingen van IBMT gedurende de vorige eeuw. Een kernbegrip is dat van *een probleem*.

> Binnen IBMT is *een probleem* meer dan een bepaalde taak, opdracht of activiteit. Een probleem is open en dat vraagt van leerlingen om te experimenteren, hypotheses op te stellen over mogelijke oplossingen, communiceren over hypotheses en mogelijke oplossingsstrategieën, en mogelijk verdere vragen te stellen die onderzocht kunnen worden als een deel van het oplossingsproces.

Een voorbeeld van een probleem zou het volgende kunnen zijn:

> "Denk aan een willekeurige driehoek met zijde-lengtes *a*, *b* en *c*. Als alle zijdes in dezelfde mate vergroot worden, hoeveel groter is dan de oppervlakte van de vergrote driehoek in vergelijking tot de oorspronkelijke?"

Afhankelijk van de context waarin het probleem geplaatst is, geeft het leerlingen diverse mogelijkheden voor betrokkenheid in het karakteriseren van een probleem en het vinden van de oplossing. Er zijn verschillende oplossingsstrategieën voor dit probleem afhankelijk van de voorkennis van de leerlingen over driehoeken, afmetingen van zijdes, hoeken, oppervlaktes, verhoudingen en congruentie.. Leerlingen kunnen het idee van vergroting oplossen en experimenteren met een additieve en een multiplicatieve structuur van vergroting. Ze kunnen een groot aantal driehoeken maken, ze vergroten, resultaten verzamelen en hypotheses opstellen over het vergroten van de oppervlakte. De leerlingen kunnen verder naar speciale gevallen kijken (zoals rechthoekige driehoeken) en op algebraïsche wijze een hypothese afleiden over hoeveel groter het vergrote gebied zal zijn. Daarna kunnen verschillende oplossingsstrategieën verder worden vergeleken, besproken en zelfs gevalideerd of getest op nieuwe driehoeken. Binnen IBMT is het een voordeel dat leerlingen verschillende en persoonlijke ideeën na kunnen streven, en deze ideeën kunnen vergelijken, verbinden en evalueren om zo meer solide kennis te construeren. Dit houdt in dat leerlingen meer weten dan slechts het berekenen van de oppervlakte van een driehoek. Ze kunnen nieuwe kennis koppelen aan andere relevante domeinen om zo open problemen op te lossen. De opgedane kennis houdt verband met symmetrie en relaties tussen meetkundige vormen.

Binnen wiskunde zijn de acties en ervaringen waaruit Dewey dacht dat leren zou moeten voortkomen, meestal gedreven door pogingen om een probleem op te lossen. Het getoonde probleem van de driehoek vergroting is een voorbeeld. Problemen kunnen variëren in hun aard, hun oorsprong, moeilijkheidsgraad, aantal mogelijke strategieën of oplossingen, etcetera. Ze hebben ook een ander potentieel voor het stimuleren van wiskundige nieuwsgierigheid of creativiteit dan 'gewone' gesloten opdrachten die meestal een beroep doen op een specifieke strategie en die messtal een kort antwoord hebben..

Andere voorbeelden uit de schoolpraktijk kunnen gaan over de dynamische toepassingen van computerprogramma's of het modelleren van situaties buiten wiskunde. Een leerling kan een grafiek tekenen of een lineaire functie die gegeven is als $f(x) = ax + b$. invoeren in een Computer Algebra Systeem of Dynamische Meetkunde Software. Hierbij heeft een leerling de kans om de grafiek te verplaatsen, of hem omhoog of omlaag te kantelen. De leerling kan onderzoeken wat er met de grafiek gebeurt wanneer de coëfficiënten aangepast worden. Dit probleem kan gevoed worden door nieuwsgierigheid en het kan leerlingen helpen bij het ontwikkelen van kennis over de grafische interpretatie van de coëfficiënten a en b. ICT-technologie en diverse software spelen in het algemeen een belangrijke rol in de ontwikkeling en ondersteuning van IBMT (zie bijvoorbeeld Artigue & Baptiste, 2012, p. 10).

Leerlingen kunnen meerdere andere vragen tegenkomen waarin de behoefte aan kennis aangesproken wordt, zoals "Kunnen alle natuurlijke getallen geschreven worden als een product van priemgetallen? Kunnen ze geschreven worden als een som van priemgetallen?" of "Hoe kan ik beschrijven hoe mijn fiets versnelt op weg naar school wanneer ik de snelheidsmetingen op verschillende momenten bekijk en vastleg?". Deze vragen of problemen vragen van leerlingen dat ze nieuwe kennis ontwikkelen. De problemen kunnen voortkomen uit puur wiskundige vraagstukken, maar ze kunnen ook voortkomen uit ervaringen of acties uit de werkelijkheid. Problemen, de formulering van een probleem en het oplossen ervan zijn de belangrijkste onderdelen van een onderzoeksproces in wiskundeonderwijs en spelen een belangrijke rol in publicaties over wiskundeonderwijs. We zullen nu een kort overzicht geven van hoe deze begrippen in de context van wiskundeonderwijs in de vorige eeuw geadresseerd werden.

Het oplossen van problemen als leermiddel

De probleemoplossende activiteit is in de oorsprong van IBMT net zo'n belangrijk onderdeel als het stellen van een probleem. Hoewel in vele landen het *oplossen van problemen* vanaf de jaren '80 een essentieel onderdeel geworden is in het wiskundecurriculum, was het geen nieuw begrip in de literatuur van die tijd. In 1945 publiceerde George Pólya zijn boek "How to solve it?" wat gezien wordt als een klassieke referentie in probleemoplossende benaderingen in wiskundeonderwijs (Artigue & Blomhøj, 2013, p. 802). Het boek beschrijft het oplossen van problemen als een activiteit waarmee wiskundigen zich bezig houden wanneer ze onderzoek doen. De nadruk ligt op de rol van problemen en de benodigde heuristische vaardigheden voor het oplossen van deze problemen. Heuristische vaardigheden leiden tot inhoudelijke kennis en benodigde strategieën om niet-alledaagse problemen aan te pakken. Het driehoeksprobleem is zo'n probleem, een niet-alledaags probleem voor de schoolomgeving. Het kan opgelost worden door inhoudelijke kennis toe te passen zoals de oppervlakte van een willekeurige driehoek, maar het vraagt ook dat leerlingen kennis ontwikkelen over soortgelijke driehoeken terwijl ze bekende strategieën en stukjes kennis op nieuwe manieren combineren. In zijn werk stelt Pólya dat leerlingen de strategieën, zoals een tegenargument vinden, gebruiken om een situatie te schetsen, om speciale gevallen te overwegen, om te speculeren en te controleren, bewijs uit het ongerijmde, etc. Bij dit driehoeksprobleem kan een goede startstrategie zijn speciale gevallen te bekijken met tastbare driehoeken of rechthoekige driehoeken. De gebruikte kennis kan een definitie, een regel, een methode, etc. zijn. Dit zijn allemaal gebruikelijke elementen van een wiskundeactiviteit op universitair niveau. Pólya's werk spreekt echter niet stelselmatig over hoe deze activiteiten tijdens de wiskundelessen aangepakt kunnen worden op elk niveau van het onderwijssysteem.

Schoenfeld is één van de onderzoekers die betrokken waren bij het nastreven van de systematische verwezenlijking van Pólya's ideeën voor het wiskundeonderwijs. Hij bekritiseerde het gebruik van Pólya's werk in de jaren '80 als bagatelliserend (1992, p. 352), vooral het onderbelichten van de cruciale rol van de ontwikkeling van de heuristische vaardigheden van de leerling. Schoenfeld beargumenteert dat voordat leerlingen betrokken kunnen worden bij probleemoplossende activiteiten, er eerst een onderscheid gemaakt moet worden tussen problemen en oefeningen. Oefeningen kunnen opgelost worden met *bekende oplossingsstrategieën* terwijl oplossende activiteiten vragen om methodes en kennis op nieuwe manieren te ontwikkelen of combineren. Schoenfeld identificeert belangrijke elementen in dit proces waarbij het nodig is dat leerlingen uit bronnen kunnen putten. Hiermee wordt wiskundige kennis van het individu bedoeld die gebruikt kan worden bij het probleem; intuïties en informele kennis over het domein, feiten, algoritmische procedures, "routinematige" niet-algoritmische procedures, begrip (propositionele kennis) over de afgesproken regels voor het werken in het domein. Dus dit is wat leerlingen moeten leren waar ze zich op moeten richten tijdens probleemoplossende processen: hun eerder vergaarde kennis, vaardigheden en competenties, en om ze te combineren met intuïtie en een voorlopige hypothese van een antwoord. Om dit te bereiken hebben leerlingen hun heuristiek nodig, waaronder "strategieën en technieken voor progressie op onbekende of niet-standaard problemen; vuistregels voor het effectief oplossen van problemen. Een aantal van deze vuistregels zijn: het tekenen van figuren, introduceren van een geschikte notatie, verkennen van gerelateerde problemen, herformuleren van problemen; achterwaarts werken, testen en verifiëren van procedures" (Schoenfeld, 1985, p. 15). Deze heuristieken hebben overeenkomsten met

Dewey's beschrijving van de rol van wiskunde in het onderzoeksproces, maar ze gaan ook verder dan dat. Volgens Artigue en Blomhøj (2013) delen zij vele eigenschappen met benaderingen van onderzoekend natuurwetenschappelijk onderwijs zoals het stellen van vragen, veronderstellen, systematisch experimenteren, samenwerken, communiceren, het probleem op diverse manieren representeren, allemaal om nieuwe kennis te ontwikkelen bij de leerlingen. Het is ook belangrijk te erkennen dat deze heuristische vaardigheden een verkennende, creatieve en nieuwsgierige houding in de wiskunde vereisen.

Dit kan allemaal teruggevonden worden in het probleem van de driehoeksvergroting met de mogelijke oplossingsstrategieën. Het probleem kan opgelost worden door te experimenteren met concrete materialen (het produceren van de driehoeken), nadenken over verschillende herformuleringen van het probleem (vergroten met additieve of multiplicatieve strategieën) of het probleem kan vanuit een abstract perspectief aangepakt worden door bijvoorbeeld een speciaal geval te belichten, zoals een driehoek met een rechte hoek.

Binnen IBMT is het *oplossen van problemen* de activiteit waarvan verwacht wordt dat leerlingen betrokken zijn bij één of meerdere fases van het onderzoeksproces. Het omvat het gebruik van eerder opgedane kennis door leerlingen, hun intuïtie, vage ideeën, en hypotheses om het probleem te verkennen en te begrijpen. Door te experimenteren en nieuwe manieren te ontdekken om hun kennis te combineren, waaronder kennis ontwikkelt tijdens de verkenning, bouwen leerlingen nieuwe kennis op wat geëvalueerd dient te worden met verdere experimenten. De wiskundige creativiteit en nieuwsgierigheid van leerlingen stuurt het probleemoplossende proces en is ook verder ontwikkeld door betrokkenheid bij het oplossen van het probleem.

Het is echter nog wat onduidelijk hoe we leerlingen op deze manier les kunnen geven, en wanneer en hoe elk element toegepast kan worden. Docenten moeten problemen ontwikkelen waarbij leerlingen gelegenheid krijgen zich op te stellen als wiskundige onderzoekers, en dus vermijden dat ze de leerlingen vertellen wat te doen. Hierbij benadrukken we dat het lesgeven zich niet alleen richt op leerlingen om hen de kans te geven ervaring op te doen met problemen die een meer open aard hebben, zoals bij het driehoeksprobleem, maar ook om hen succesvol het hele onderzoeksproces te laten doorlopen tot aan het oplossen van het probleem of het bewijzen van een bevinding.

De hoeveelheid begeleiding in probleemoplossend onderwijs

Al in 1938 pleitte Dewey dat het leerproces van leerlingen verankerd zou moeten zijn in de interactie van de leerlingen met een probleem. Deze interactie gebeurt bij voorkeur in een samenspel tussen bekende en onbekende situaties waarbij de voorkennis van de leerlingen het onderzoek naar het onbekende begeleidt. Bijvoorbeeld, gebaseerd op wat leerlingen al weten, kunnen ze een hypothese formuleren en het probleem op een systematische manier benaderen in het onderzoeksproces. In het driehoeksprobleem kunnen leerlingen systematisch de relatie verkennen tussen de vergroting van de driehoek en de vergroting van de oppervlaktes. Leerlingen kunnen specifieke hypotheses formuleren bij dit verband met de speciale casus van de rechthoekige driehoek. De hypothese kan geëvalueerd worden door willekeurige driehoeken te maken en de oppervlaktes te berekenen van de eerste en de vergrote driehoek. Gebaseerd op de ervaringen met de acties kunnen de leerlingen hun eigen kennis vormen bij het bestudeerde probleem. In het driehoeksprobleem hebben leerlingen de mogelijkheid om kennis bij gelijke driehoeken te vormen, een algemene formule voor de oppervlakte $A = \frac{1}{2}ab\sin C$, waarbij C de hoek is tussen de twee zijdes a en b, en begrip van de trigonometrische verhoudingen. Vandaar dat, voor het ontwerpen van onderzoekend onderwijs, een docent scenario's gaat ontwerpen die hem helpen te begrijpen in welke fase leerlingen hun voorkennis gebruiken in het bestuderen van een probleem, waar een hypothese opgezet wordt en waar deze getest wordt, en waar nieuwe kennis gevormd of geformuleerd wordt op basis van de generalisaties van de acties van de leerlingen. In dit opzicht ondersteunt en begeleidt de docent de leerlingen in hun kennisconstructie (Godino et al., 2015). De docent neemt de rol op zich van ervaren mede-onderzoeker die de jongere leden van de onderzoeksgemeenschap ondersteunt in plaats van dat hij alle antwoorden heeft (Artigue & Baptist, 2012).

> De ondersteuning van leerlingen in hun werk aan een IBMT-probleem houdt verband met de formulering van het probleem. De formulering zou leerlingen in staat moeten stellen om een hoeveelheid strategieën te ontwikkelen afhankelijk van welke voorkennis ze al hebben. Het zou verder de verkenning van en het experimenteren met het probleem voor de leerlingen moeten stimuleren waardoor ze nieuwe kennis vormen. In dit proces zou de docent de leerlingen moeten begeleiden - niet door ze te voorzien van de antwoorden, maar als een ervaren mede-onderzoeker die vragen stelt en zo het onderzoeksproces stimuleert.

Tegenwoordig is het algemeen geaccepteerd dat werkelijk probleemoplossend werken een bijdrage levert aan de leeropbrengst van wiskundeonderwijs: "men leert *meer* van het oplossen van een probleem dan wanneer het antwoord aangeleverd wordt" (Bosch & Winsløw, 2016). Dit "meer" past bij de eerdergenoemde heuristiek en het gebruik van bronnen. Dit kan ongrijpbaar lijken, maar is zeker herkenbaar wanneer het voorbij komt. Eerdere studies tonen aan dat goed probleemoplossend lesgeven gaat om het creëren van gepaste *relaties* tussen specifieke leerlingen en specifieke taken (Schoenfeld, 1992, p.

353). Vandaar dat de focus van het onderzoek de laatste decennia lag op de kenmerken van geschikte problemen – er moet voldoende rijke potentie inzitten dat leerlingen de heuristiek en bronnen toe kunnen passen. De focus lag verder op het verkennen van de richtlijnen voor de instructie en te zorgen dat de begeleiding de leerlingen effectief hun volle potentie in laat zien. In de jaren '80 varieerden suggesties voor instructies van begeleide leerlingoefeningen tot oefeningen waarbij leerlingen de processen onder woorden moesten brengen als een soort van *metareflectie* op hun eigen oefeningen. Deze metareflecties kunnen zijn dat de leerlingen het probleem om moeten zetten in wiskunde, bijvoorbeeld in het probleem met het modelleren van de versnelling tijdens de fietsrit naar school. Bovendien is metareflectie nodig bij het probleem dat kijkt naar de grafiek van een lineaire functie in het coördinatenstelsel en van leerlingen vraagt om concrete data te verzamelen van een reeks voorbeelden om de hypotheses bij deze coëfficiënten te formuleren. Instructieprincipes behandelen ook uitdagingen en zorgen van docenten wanneer ze in moeten grijpen bij leerlingactiviteiten of geen antwoorden mogen geven, of hoe de optimale strategieën toegepast kunnen worden (Schoenfeld, 1992, p. 354). Wanneer de docent voorstelt dat leerlingen naar een bepaalde casus kijken, datapunten moeten uittekenen om lineaire regressie uit te voeren of om het probleem als een grafiek of meetkundig figuur te schetsen, zullen sommige leerlingen dit zien als de enige mogelijke manier om het probleem op te lossen. Niet omdat ze ervan overtuigd zijn dat die strategie het probleem oplost, maar eerder omdat de docent het zegt. Daarom is het lastig om leerlingen te begeleiden of ondersteunen zonder te wijzen op een antwoord. In het driehoeksprobleem is het geen triviale taak voor een docent om de leerlingen te begeleiden als ze erop staan alleen met concrete voorbeelden te werken. Een vraag als of hun hypothese in het algemeen stand zal houden kan leiden tot nieuwe visies op het probleem, maar het kan ook te overweldigend zijn en in werkelijkheid geen hulp bieden. Dit is over het algemeen de uitdaging van het neerzetten van onderzoeksprocessen in een onderwijsomgeving. Leerlingen moeten een beperkt terrein krijgen waarin ze hun onderzoek uit kunnen voeren, maar als de begeleiding te gericht is, of er teveel beperkingen zijn, is de potentie van het onderwijsontwerp verpest. Dan kunnen de leerlingen de kennis niet vormen op basis van hun acties en ervaringen. Vandaar dat een docent de leerlingen niet exact kan vertellen wat ze moeten doen. Tegelijkertijd moet de docent de behoefte bij de leerlingen creëren om op een bepaalde manier te handelen wat mogelijk leidt tot de gewenste leerdoelen. Vandaar dat de ondersteuning anders gezien moet worden dan het bieden van voorbeelden, strategieën en het stellen van te directe en gesloten vragen.

> De uitdaging in het begeleiden van de onderzoeksprocessen van leerlingen: bij teveel richting is er geen echt onderzoek, en wordt het leerpotentieel teniet gedaan; maar met te weinig richting lopen leerlingen vast en zijn ze niet langer betrokken bij het oplossen van het probleem. De „juiste" hoeveelheid richting geven is een delicate balans.

Het belang van leerlingvragen bij het omgaan met problemen

Recentere studies stellen de probleemstelling voor als aanpak om leerlingen te betrekken bij het oplossen van problemen. Het pedagogische idee van het stellen van een probleem kan wel zo oud zijn als het idee van het oplossen van problemen. Ellerton (2013) refereert naar Einstein en Infeld die beweerden dat de formulering van een probleem belangrijker is dan het geven van het antwoord, en dat het een uitdagendere taak is (Ellerton, 2016, p. 88). Dit is mogelijk wat overdreven, maar het geeft aan hoe belangrijk het is vraagtekens te zetten bij de kennis die verder bestudeerd of geleerd moet worden.

De opkomst van het stellen van problemen als een benadering voor het wiskundeonderwijs is gekoppeld aan de vernieuwde interesse in probleemoplossing in de jaren '80. Ellertons studie naar boeiende pre-service wiskunde docenten bij probleemstellende activiteiten benoemt dat het stellen van problemen mogelijk een dominante rol krijgt in het wiskundecurriculum (Ellerton, 2013, p. 90). Redenen voor deze bewering zijn dat het stellen van problemen de ontwikkeling van heuristiek en bronnen bij het oplossen van problemen en IBMT bij leerlingen gevoed wordt, of, zoals Singer, Ellerton en Cai het formuleren: „Het stellen van problemen bevordert de probleemoplossende vaardigheden, houdingen, en het vertrouwen in wiskunde bij leerlingen, en draagt bij aan een breder begrip van wiskundige concepten en de ontwikkeling van wiskundig denken” (Singer, Ellerton & Cai, 2013, p.2). Volgens Artigue en Blomhøj (2013), maar ook Hiebert et al. (1996), kan het stellen van problemen als een leerlingactiviteit ook Deweys idee van reflectief onderzoek ondersteunen wat impliceert dat leerlingen de kans moeten krijgen en zelfs aangemoedigd moeten worden om de doelkennis te problematiseren. Dit betekent bovendien dat leerlingen gestimuleerd moeten worden om na te denken over de gevolgen van de problemen waar ze mee geconfronteerd worden tijdens IBMT. In het voorbeeld van de driehoek is het redelijk dat leerlingen zich afvragen wat bedoeld wordt met “het gelijkelijk vergroten” van de zijdes van een driehoek. Het is echter belangrijk dat de leerlingen zelf op een antwoord komen, bijvoorbeeld door te experimenteren met zowel additieve als multiplicatieve strategieën. Dit ondersteunt de zelfstandige kennisconstructie bij leerlingen, vooral een ontdekking als dat de optelstrategie niet leidt tot soortgelijke driehoeken. Dit kan de leerlingen brengen bij de vraag of oppervlaktes alleen vergeleken kunnen worden wanneer de oorspronkelijke en de vergrote driehoek gelijk zijn. Verder kan het driehoeksprobleem leerlingen ertoe brengen zich af te vragen hoe ze de hoogte van een willekeurige driehoek kunnen vinden wanneer ze alleen de zijlengtes kennen als a, b en c, etc.

Een goed probleem heeft een openheid die leerlingen laat verwonderen, afbakenen en vragen stellen bij de relevante inhoudskennis. De vraagstelling is cruciaal als de sturing bij het onderzoeksproces en zou leerlingen ertoe moeten zetten om hun eigen vragen en hypotheses te beantwoorden.

In het kader van het begeleiden en scaffolding zijn er een aantal ontwerpideeën ontwikkeld om het stellen van problemen vorm te geven als een activiteit binnen wiskunde op school. Deze ideeën omvatten het geven van informatie aan leerlingen en ze vragen problemen te stellen die opgelost kunnen worden met de ontvangen informatie; vraag ze bepaalde gegevens op te lossen en achteraf soortgelijke problemen te formuleren, of beschrijf een aantal situaties aan leerlingen en vraag ze problemen te formuleren bij de beschreven situatie (Bosch & Winsløw, 2016). Deze ontwerpideeën zijn echter niet helemaal passend wanneer de activiteit van de leerling de activiteiten van wiskundige onderzoekers moet reflecteren, waar nieuwe vragen naar voren komen naar aanleiding van de interacties van de onderzoekers en de domeinkennis op het spel staat, bijvoorbeeld door het onderzoek van andere onderzoekers of door persoonlijke of collectieve probleemoplossende activiteiten. Deze activiteiten kunnen leiden tot verwondering of nieuwsgierigheid en dan tot de formulering van nieuwe problemen wat het onderzoek verder stuurt. Volgens Kilpatrick is dit niet alleen een eigenschap van onderzoek. Hij beweert dat zelfs meer in het algemeen, in het dagelijks leven, de meeste problemen geformuleerd worden door een persoon die ze oplost en dat wiskundeonderwijs in dit opzicht meer zou mogen lijken op het echte leven (Kilpatrick, 1987, p. 124). De uitgesproken rol van het stellen van een probleem in de diverse benaderingen van IBMT variëren, maar het is een gedeeld kenmerk om leerlingen zich te willen laten verwonderen, ze nieuwsgierig te maken, veronderstelde verbanden te zoeken, en een hypothese te formuleren voor verder onderzoek.

Waar komen de problemen vandaan?

Tegelijkertijd met de probleemstellende literatuur hebben andere theorieën over wiskundeonderwijs de rol van een probleem, het oplossen van een probleem en het stellen van een probleem op verschillende manieren besproken. Het oplossen van niet-routinematige problemen is een hoeksteen in diverse benaderingen op wiskundeonderwijs, wat begon en verder ontwikkeld werd vanaf de jaren '70: de Theorie van Didactische Situaties (Theory of Didactical Situations - TDS, Brousseau, 1997) en Realistisch Wiskundeonderwijs (Realistic Mathematics Education - RME, Freudenthal, 1991). Een gedeeld idee in TDS en RME is dat leerlingen niet-routinematige ideeën zouden moeten krijgen die ze dan oplossen door de ontwikkeling van nieuwe kennis. Bij TDS is het de bedoeling dat dit gebeurt door de aanpassingen van leerlingen aan het zogenoemde milieu van de lessituatie (Brousseau, 1997). Bij RME komt de ontwikkeling van kennis wanneer leerlingen het fenomeen in het probleem mathematiseren. RME maakt een onderscheid tussen twee aspecten in dit proces: verticale en horizontale verwiskundiging (Freudenthal, 1991). Beide theorieën delen het idee dat een docent de leerlingen het oorspronkelijke idee biedt, maar dat er van hen verwacht wordt hiernaar te handelen en ideeën te formuleren in het oplossen van het probleem. Dit kan er impliciet of expliciet toe leiden dat leerlingen deze kennis in twijfel trekken. De twee benaderingen zijn de keerpunten van de activiteiten in MERIA en de uitgebreide uiteenzettingen van de twee theorieën zullen later in dit boekwerk gegeven worden.

Er zijn echter andere theoretische benaderingen die IBMT ook behandelen. Van de Wiskundige Competentie Theorie (Mathematical Competence Theory, Niss et al., 2002) kan worden gezegd dat het de heuristische vaardigheid beslaat ondanks dat de theorie functioneert met acht competenties waarvan er geen één heuristiek genoemd wordt. Vooral de zogenoemde probleemoplossende vaardigheid en de modelleervaardigheid delen kenmerken van wat hierboven beschreven is als de cruciale rol van heuristiek in onderzoekende activiteiten.

Men kan ook algemener aanvoeren dat *wiskundige modelleeractiviteiten* de ontwikkeling van probleemoplossende vaardigheden en houdingen ondersteunt. Vanuit het perspectief van de Wiskundige Competentie Theorie kunnen wiskundige modelleeractiviteiten beschreven worden als cyclische bewegingen heen en weer in bepaalde fases van de modelleercyclus (Blomhøj, 2004; Blum & Leiss, 2006). De modelleercycli kunnen als begeleiding voor docenten dienen; door bewust te zijn van de fases die een onderdeel zijn van modelleeractiviteiten, kunnen docenten de verwezenlijking hiervan bij de leerlingen volgen in de lessituaties. Maar onderzoeken die de modelleercycli voor analyses van de modelleeractiviteiten van leerlingen toepassen tonen aan dat dit niet altijd het geval is. Modelleerproblemen die de potentie hebben om alle fases te realiseren, verwezenlijken mogelijk nog niet altijd deze potentie in de onderwijscontext (Blum & Borromero Ferri, 2007). Wiskundig modelleren vanuit het perspectief van de Wiskundige Competentie Theorie en de RME-benadering deelt het idee dat de onderzoeksprocessen “realistische” problemen als vertrekpunt nemen. Dit sluit ook aan bij Deweys idee over onderwijs aan het begin van de 20e eeuw. Er zijn ook andere modelleerbenaderingen, zoals activiteiten die aanleiding geven tot modelleren (Modelling Eliciting Activities, Doerr & Ärlebäck, 2015). Zij bepleiten open benaderingen van het onderzoeksproces en dat ze ondersteunt kunnen worden door de voorkennis van leerlingen in zowel binnen als buiten wiskundige domeinen.

Hetzelfde kan gezegd worden over de Antropologische Theorie van de Didactiek (Anthropological Theory of the Didactics- ATD). ATD biedt een algemeen model van wiskundige kennis gezien als een menselijke onderzoeksactiviteit van soorten problemen. Het is georganiseerd door wiskundige praktijken die bestaan uit vaardigheden (soorten problemen en technieken) en kennis (technologie en theorie). ATD ziet een docent als de regisseur van het didactische proces. Bij deze benadering begint het onderzoeksproces bij een open probleem uitgezet door een docent. De aard van dit probleem kan puur wiskundig of uit het echte leven gegrepen zijn. De expliciete formulering van de vraag door de leerlingen hoort het onderzoeksproces te leiden (Chevallard, 2015). Doceren en leren wordt echter niet als geïsoleerde elementen gezien, maar deze vinden plaats in een complex proces van didactische transpositie. Dit proces omvat ook een aantal didactische beperkingen uit verschillende betrokken instellingen (de samenleving, de wiskundige gemeenschap, het onderwijssysteem, de school en de klas) wat de autonomie van de docent beperkt. ATD stelt ook manieren voor om de voorwaarden en beperkingen van scholen en disciplines te transformeren. Deze ambitieuze vorm van IBMT zal echter niet verder behandeld worden in dit handboek.

In de Japanse traditie (Nohda, 2000) wordt een aanpak met een open einde met een grote variëteit aan strategieën en antwoorden van leerlingen voor hetzelfde probleem gezien als een kracht die zich richt op de aandacht van leerlingen (en docenten) in wiskundige argumentatie en communicatie. Verschillende strategieën ontwikkeld door leerlingen kunnen gedeeld worden met de klas zodat de leerlingen meer coherente kennis opbouwen bij het probleem.

In diverse theoretische benaderingen vinden we dus meerdere ideeën over hoe de problemen opgebouwd en gezocht kunnen worden, wat rijke onderzoeksprocessen onder leerlingen kan initiëren. Op het gebied van wiskundig modelleren worden de oorspronkelijke problemen vaak door docenten aangeboden en in de meeste gevallen richten zij zich op zaken uit levensechte scenario's. Maar een gemeenschappelijk kenmerk van IBMT, wat terug gaat tot Dewey, is het idee dat leerlingen leren van werken met één of meer problemen.

De ideeën tot dusver samenvattend kunnen we zeggen dat IBMT beschreven is als een onderwijsactiviteit die als doel heeft leerlingen te betrekken bij de onderzoeksprocessen van wiskunde - wat betekent dat zij concepten en begrippen construeren, onderzoeken en verkennen door te handelen of leren te handelen als een onderzoeker met een wiskundig probleem, en op die manier bepaalde wiskundige kennis te ontwikkelen.

Wat is er gedaan om IBMT te promoten?

Onderzoekers in wiskundeonderwijs proberen IBMT te promoten door nationale onderzoeksprojecten en projecten tussen landen. In veel landen is IBMT tot op zekere hoogte onderdeel van het wiskundecurriculum, hoewel verschillende formuleringen van de kenmerken gebruikt kunnen worden en diverse theoretische benaderingen opgenomen zijn. Projecten die gefinancierd worden door de Europese Unie ondersteunen en onderzoeken de implementatie van IBMT in de onderwijssystemen in lidstaten. In 2007 verscheen een EU-rapport over pedagogische trends in de Europese onderwijssystemen waarin geschreven werd over "de alarmerende daling in de interesse van jongeren voor belangrijke wetenschappelijke studies en wiskunde in Europa" (Rocard et al., 2007). In hetzelfde rapport werd voorgesteld dat "de kentering van de onderwijspedagogiek betreffende natuurwetenschappen vanuit voornamelijk deductief naar onderzoekende methodes de middelen biedt om de interesse in wetenschap te vergroten". In de VS benadrukt het document "Principles and standards for school mathematics" (principes en standaarden voor wiskunde op school) tegelijkertijd dat het doel binnen middelbaar wiskundeonderwijs is om "leerlingen te leren niet-routinematige problemen op te lossen door ze de mogelijkheden te bieden van het ontwikkelen van kennis en tools om dergelijke problemen op te lossen" (NCTM, 2000). Dit indiceert wereldwijde nationale interesses in het promoten van IBMT in alle klaslokalen. Nationale verslagen betreffende de promotie van IBMT wijzen echter nog op veel implementatieproblemen. Rapporten uit Frankrijk en Engeland stellen dat politici vele goede intenties hebben, maar zich mogelijk niet realiseren wat daadwerkelijk nodig is om de lespraktijk te veranderen, hoe het lesgeven om te buigen van kennisoverdracht naar IBMT (Burkhardt & Bell, 2007; Artigue & Houdement, 2007). Het EU-project PRIMAS onderzocht deze uitdagingen en beveelt aan dat docenten de kans moeten krijgen om onderzoekend wiskundeonderwijs in te voeren. Verder stelt het dat alle projecten en cursussen om IBMT te promoten aangepast dienen te worden aan de plaatselijke omstandigheden. Docenten hebben echter structuren nodig die hen ondersteunen en die onderlinge steun promoten bij de implementatie van nieuwe initiatieven (García, 2013). Het EU-project onderzocht daarnaast uitdagingen zoals hoe onderzoekend onderwijs te implementeren, en hoe wiskunde en natuurwetenschappelijk onderwijs verbonden kunnen worden met de arbeidsmarkt. Het promoot een holistische aanpak in het aanbieden van ondersteuning door “het uitvoeren van een hoeveelheid activiteiten, waaronder de ontwikkeling van hoogstaande, innovatieve materialen en het uitvoeren van professionele ontwikkelingscursussen” door IBL-opgeleide docenten als multiplicators.

We gaan nu over op de vraag van het realiseren van IBMT, inclusief de bijbehorende uitdagingen.

2. Hoe streven we IBMT na?

Inleiding

Onderzoekend Wiskundeonderwijs (Inquiry Based Mathematics Teaching - IBMT) is in verschillende EU-projecten gepromoot om leerlingen beter voor te bereiden op een dynamische en snel veranderende samenleving. Kennis van feiten en geïsoleerde basisvaardigheden zijn op zich niet voldoende voor de 21ste eeuw. Vaardigheden die steeds belangrijker worden zijn bijvoorbeeld het vermogen om met onvolledige informatie om te gaan, om wiskundig creatief te zijn in nieuwe kennisgebieden, om samen te werken bij probleem oplossen en om de (wiskundige) resultaten te bespreken en kritisch te evalueren. Wiskundeonderwijs heeft een verantwoordelijkheid in het ontwikkelen van 21ste-eeuwse vaardigheden (Rocard et al., 2007).

Aandacht voor deze 21ste-eeuwse vaardigheden is niet nieuw. Soortgelijke vaardigheden kunnen herkend worden in initiatieven die het wiskundig denken van leerlingen willen stimuleren. Wiskundig inzicht wordt door PISA als volgt omschreven:

> ... het vermogen van leerlingen om wiskunde te formuleren, toe te passen en te interpreteren in een hoeveelheid contexten. Het omvat wiskundig redeneren en het gebruik van wiskundige concepten, procedures, feiten en tools om fenomenen te beschrijven, verklaren en voorspellen. Het ondersteunt individuen in het herkennen van de rol die wiskunde speelt in de wereld en de beoordelingen en beslissingen die nodig zijn voor constructieve, betrokken en bedachtzame burgers. (OECD, 2016a, p. 25)

In de VS richten de huidige, algemene kernwaarden zich op vaardigheden die procesmatige beheersing overstijgen (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010). In deze waarden is nadrukkelijk aandacht besteed aan het belang van het ontwikkelen van vaardigheden als het oplossen van problemen, redeneren, communiceren en representeren.

Deze lijst van competenties delen met elkaar de behoefte naar meer flexibele vaardigheden. De vraag is hoe deze vaardigheden ontwikkeld kunnen worden in de wiskundeles. Een manier om deze vaardigheden aan te spreken is met IBMT. Binnen IBMT wordt de lespraktijk mede gevormd door processen als het opstellen van hypothesen, het plannen van onderzoek, het systematisch experimenteren en het evalueren van resultaten. Dit hoofdstuk zal de rol van taken en onderwijsstrategieën voor IBMT behandelen. Daarnaast zullen ervaringen met IBMT in diverse Europese landen beschreven en besproken worden.

Taken die IBMT stimuleren

Bij traditionele tekstboekopdrachten kan het lastig zijn om onderzoekende vaardigheden in te zetten. Deze opdrachten bieden vaak exact de benodigde informatie om de taak op te lossen en zijn meestal zo gestructureerd dat leerlingen nauwelijks na hoeven te denken over het oplossingsproces. In het streven naar IBMT is het belangrijk om een lespraktijk te ontwikkelen waarin onderzoeksgerelateerde processen aandacht kunnen krijgen. Niet alle processen hoeven bji elke opdracht aandacht te krijgen, maar de opdracht zou mogelijkheden moeten bieden om te leren over tenminste één van deze onderzoeksgerelateerde processen in wiskunde. Ongestructureerde opdrachten kunnen deze kansen bieden aan leerlingen om te exploreren, kritisch te reflecteren, samen te werken en te communiceren over de resultaten; in Figuur 1 wordt een voorbeeld getoond.

Gestructureerde versie

Een patiënt is ziek. Een dokter schrijft deze patiënt een medicijn voor en adviseert een dagelijkse dosis van 1500 mg te nemen. Na het nemen van de dosering, verlaat ongeveer 25% van het medicijn het lichaam gedurende de dag door uitscheiding. De rest van het medicijn blijft in het bloed van de patiënt.

- Hoeveel mg van het medicijn zit er na één dag nog in het bloed van de patiënt?
- Vul de tabel verder in.

Dag	Mg van medicijn in bloed
0	0
1	1125
2	
3	

- Leg uit hoe je de hoeveelheid medicijn voor de volgende dag uit kunt rekenen met de volgende formule: nieuwe_hoeveelheid = (oude_hoeveelheid + 1500) * 0,75
- Na hoeveel dagen heeft de patiënt meer dan 4 g van het medicijn in het bloed? En na hoeveel dagen 5 g?
- Wat is de maximale hoeveelheid van het medicijn dat gehaald kan worden?

Ongestructureerde versie

Een patiënt is ziek. Een dokter schrijft deze patiënt een medicijn voor en adviseert een dagelijkse dosis van 1500 mg te nemen. Na het nemen van de dosering, verlaat een gemiddelde van 25% van het medicijn het lichaam gedurende de dag door uitfscheiding. De rest van het medicijn blijft in het bloed van de patiënt.

Onderzoek
- Gebruik berekeningen om uit te zoeken hoe de hoeveelheid van het medicijn (in mg) verandert wanneer iemand het medicijn neemt met een dagelijkse dosering van 1500 mg bij bijvoorbeeld drie keer 500 mg.
- Zijn de gevolgen van het overslaan van een dag en/of het nemen van een dubbele dosering echt zo dramatisch?
- Kan elke hoeveelheid van het medicijn in het bloed bereikt worden? Licht je antwoord toe.

Product
Ontwerp een flyer voor patiënten met antwoorden op bovenstaande vragen. Voeg grafieken en/of tabellen toe

Figuur 1: Twee versies van een opdracht (Doorman, Jonker & Wijers, 2016, p. 25).

In het gebruik van de ongestructureerde versie van de opdracht in een wiskundeles is het de verantwoordelijkheid van de docent om de aandacht van leerlingen op de wiskundige aspecten van het probleem te richten (of in welke mate het toegestaan is om bijvoorbeeld ook meer biologische aspecten bij de opdracht te betrekken). Dit voorbeeld toont dat 'open' opdrachten wiskunde kunnen verbinden met andere wetenschappen en toont de toepasbaarheid van wiskunde, hoewel het 'opengooien van problemen' niet direct betekent dat wiskundige concepten in niet-wiskundige contexten worden geplaatst. Puur wiskundige taken kunnen ook ongestructureerd zijn en gebracht worden als een onderzoek. Een belangrijk doel van ongestructureerde problemen is om leerlingen een actieve rol te geven in het oplossingsproces en ze meer eigenaar te maken van dat proces.

In IBMT leren leerlingen aan de hand van open problemen die de ruimte geven aan strategieën en meerdere oplossingen. De strategieën van leerlingen, hun interpretaties van het probleem, hun aannames, berekeningen, representaties en samenwerking bieden mogelijkheden om te reflecteren op onderzoeksgerelateerde processen in de wiskunde. Docenten zijn tijdens dit proces proactief. Ze ondersteunen en stimuleren leerlingen met zorgvuldig gekozen strategische vragen. Ze waarderen de bijdragen van de leerlingen - inclusief fouten, en ondersteunen het leerproces door gebruik te maken van de redeneringen en ervaringen van leerlingen. Dit vraagt om een gezamenlijk doel in de les, oftewel het samen vormgeven van wiskunde.

Het is belangrijk om te onderstrepen dat in de dagelijkse lespraktijk niet alles aangepast hoeft te worden of aangepast kan worden aan onderzoekend leren. De rol van onderzoek is één van de ingrediënten van goed onderwijs. Het streven naar IBMT kan bevorderd worden door docenten te ondersteunen in het uitbreiden van hun onderwijsrepertoire richting het gebruik van onderzoeksprocessen in de dagelijkse praktijk, het ontwikkelen van bronnen voor IBMT, zich bewust zijn van manieren om concepten met behulp van IBMT te leren, ondersteunen van samenwerken en het evalueren van IBMT-competenties bij leerlingen.

Lesstrategieën voor IBMT

PRIMAS [1] was een EU-project met als doel om samen met docenten uit verschillende landen te ondersteunen hoe IBMT vorm gegeven kan worden. Daartoe zijn modules voor nascholing ontwikkeld en geimplementeerd. Deze modules omvatten activiteiten om onderzoekende leermethodes te koppelen aan bestaande werkwijzen, innovatieve lesactiviteiten, geïllustreerd met video's en voorbeeld-lesplannen. De modules zijn zo ontwikkeld dat ze lerarenopleiders en docenten in staat stellen om uitgedaagd te worden en op nieuwe manieren reflectief te handelen (Swan et al. 2013).

De beweging richting een IBMT-aanpak brengt vele pedagogische zaken naar voren voor docenten. Bijvoorbeeld: Hoe kan ik mijn leerlingen motiveren om vragen te stellen en deze zelf te beantwoorden? Hoe kan ik leerlingen helpen om op duurzame wijze in te gaan op deze vragen? Hoe kan ik leerlingen leren samen te werken en van elkaar te leren? Hoe kan ik al deze nieuwe activiteiten managen binnen de beperkingen van mijn dagelijkse verantwoordelijkheden? Deze vragen

[1] http://www.primas-project.eu/

leidden tot de volgende onderwerpen die werden uitgewerkt in de PRIMAS-modules om onderzoek in de dagelijkse lespraktijk te bevorderen:

1. Het organiseren van onderzoek door leerlingen;
2. Leerlingen helpen om ongestructureerde problemen aan te pakken;
3. Het stimuleren van begripsontwikkeling met onderzoekend leren;
4. Vragen stellen die redeneren stimuleren (en alle leerlingen betrekken);
5. Het ondersteunen van samenwerking;
6. (Peer)feedback.

Veranderingen aan een tekstboekopdracht

We lieten een aantal voorbeelden zien van alternatieven bij de tekstboekopdracht uit Figuur 1. De gestructureerde versie van de opdracht presenteert een context, stelt het probleem en de exacte informatie die nodig is om het op te kunnen lossen. De opdracht vraagt om het gebruik van een formule en de context kan genegeerd worden. De opdracht ondersteunt niet het toepassen of leren om wiskunde toe te passen buiten de wiskundeles om. De ongestructureerde versie lijkt mogelijkheden te bieden voor leerlingen om de situatie te onderzoeken, om wiskundig creatief zijn, om samen te werken, om kritisch op de bevindingen te reflecteren en de resultaten te bespreken. De ongestructureerde versie van de opdracht heeft ook het risico dat de leerlingen zich verloren voelen en niet weten wat ze moeten doen, of dat delen van de opdracht zoveel tijd vragen dat ze in de les niet een redelijk resultaat kunnen bereiken. Om dit te voorkomen, heeft de docent een rol in het structureren van de les. Hierdoor heeft de ongestructureerde versie van de opdracht een gestructureerd lesplan nodig om het onderzoek van de leerlingen te begeleiden (zie bijvoorbeeld figuur 2).

Les 1

10 minuten: vorm groepen & introduceer het probleem en het werkplan en deel de opdracht uit
10 minuten: leerlingen werken in groepen aan de opdracht
10 minuten: bespreek klassikaal of alle groepen weten hoe ze te werk zullen gaan. Wissel strategieën uit en controleer of iedereen een beeld heeft bij wat er verwacht wordt.
15 minuten: leerlingen werken aan de opdracht, ronden berekeningen af en bereiden de bouwstenen voor hun flyer voor.

Les 2

20 minuten: leerlingen maken hun flyer af
20 minuten: een aantal voorbeelden worden gepresenteerd
10 minuten: terugblik op de opdracht (en de plaatsing in verder werk)

Figuur 2: Een gestructureerd lesplan bij een ongestructureerde opdracht (zie Figuur 1).

Zo'n lesplan vraagt wel om pedagogische vaardigheden om het klassenproces te managen. De docent moet gedurende de les een paar keer schakelen tussen klassikale besprekingen en groepswerk.

Een andere optie om leerlingen te betrekken in het onderzoeksproces - met meer structuur - is om de opdracht op te delen. U zou alleen de inleidende tekst kunnen tonen en vragen: Wat is het hoofdprobleem? Is er nog meer informatie nodig om het probleem op te kunnen lossen? Welke strategie zou je toe kunnen passen om tot antwoorden te komen?

Een patiënt is ziek. Een dokter schrijft deze patiënt een medicijn voor en adviseert een dagelijkse dosis van 1500 mg te nemen. Na het nemen van de dosering, verlaat een gemiddelde van 25% van het medicijn het lichaam. De rest van het medicijn blijft in het bloed van de patiënt.

Figuur 3: De situatie van een opdracht. Wat zou het hoofdprobleem kunnen zijn?

Nadat leerlingen zelf het probleem geformuleerd hebben, kunnen ze de gestructureerde tekstboekversie uitgedeeld krijgen. De volgorde van de vragen is nu waarschijnlijk logischer voor ze aangezien ze de kans hebben gehad om na te denken over de situatie en mogelijke strategieën (Ainley et al., 2009).

De laatste optie die we als voorbeeld gebruiken bij wat er gedaan kan worden met tekstboekopdrachten is dat alle deelvragen eruit gehaald kunnen worden en in een andere volgorde aangeboden worden, of als delen van een puzzel, om dan de leerlingen te vragen de oorspronkelijke volgorde van het boek te vinden.

De opdracht uit Figuur 4 geeft de leerlingen de kans om te reflecteren op de structuur in hun tekstboeken. In veel gevallen hebben de opdrachten een soortgelijke structuur, wat een logische strategie geeft om het probleem te onderzoeken en het antwoord te vinden op de hoofdvraag, maar leerlingen wordt bijna nooit gevraagd te kijken naar deze strategie en om de kenmerken ervan te beschrijven (een berekening uitvoeren, systematisch meer gegevens verzamelen in een tabel, beschrijven van het rekenproces met een formule, een grafiek tekenen, en de grafiek en formule gebruiken om het hoofdprobleem op te lossen).

Een patiënt is ziek. Een dokter schrijft deze patiënt een medicijn voor en adviseert een dagelijkse dosis van 1500 mg te nemen. Na het nemen van de dosering, verlaat een gemiddelde van 25% van het medicijn het lichaam over de dag door uitscheiding. De rest van het medicijn blijft in het bloed van de patiënt.

- Wat is de maximale hoeveelheid van het medicijn dat gehaald kan worden?

- Leg uit hoe je de hoeveelheid medicijn voor de volgende dag uit kunt rekenen met de volgende formule: nieuwe_hoeveelheid = (oude_hoeveelheid + 1500) * 0,75

- Vul de tabel verder in.

Dag	Mg van medicijn in bloed
0	0
1	1125
2	
3	

- Na hoeveel dagen heeft de patiënt meer dan 4 g van het medicijn in het bloed? En na hoeveel dagen 5 g?
- Hoeveel mg van het medicijn zit er na één dag nog in het bloed van de patiënt?

Figuur 4: De volgorde van de vragen is aangepast. Wat was de oorspronkelijke volgorde in het boek?

Meer lesstrategieën voor IBMT

We hebben drie alternatieven gepresenteerd om een tekstboekopdracht te te veranderen om zo onderzoek in de wiskundeles vorm te geven. De alternatieven hebben met elkaar gemeen dat de docent in staat moet zijn om de klassikale bespreking te leiden en leerlingen denktijd te geven. Een andere lesstrategie om onderzoeksprocessen te bespreken met de hele klas en iedereen te betrekken is de denken-delen-uitwisselen strategie. Het idee hiervan is om de leerlingen 2 minuten zelfstandig na te laten denken over een probleem en op te schrijven wat ze denken, gevolgd door 2 minuten om hun gedachten te vergelijken met hun buren, en tenslotte 2 minuten om de resultaten te delen met de hele klas. Deze strategie biedt alle leerlingen denktijd en geeft de docent de kans om iedereen bij de bespreking te betrekken.

In aanvulling op de bovenstaande opdrachten, kan ook gedacht worden aan opdrachten die leerlingen uitnodigt om hypotheses op te stellen (bijv. Figuur 5). U kunt leerlingen een hoeveelheid stellingen geven die gerelateerd zijn aan het onderwerp waar u les in geeft en laat hen beslissen of deze stellingen altijd, soms of nooit waar zijn. Als ze denken dat een stelling *altijd* of *nooit* waar is, wordt er van ze verwacht dat ze uit kunnen leggen waarom ze zo zeker zijn. Als ze denken dat het *soms* waar is, moeten ze kunnen omschrijven wanneer het waar is en wanneer niet.

Loonsverhoging	**Rechte hoeken**
Max krijgt een loonsverhoging van 30%. Jim krijgt een loonsverhoging van 25%. Dus krijgt Max de hogere loonsverhoging.	Een vijfhoek heeft minder rechte hoeken dan een rechthoek.
Verjaardagen	**Grotere breuken**
In een klas met tien leerlingen, is de kans dat twee leerlingen op dezelfde dag van de week geboren zijn één.	Wanneer je hetzelfde getal optelt aan de boven- en onderkant van een breuk, wordt de breuk groter in waarde.

Figuur 5: Stellingen die altijd, soms of nooit waar zijn.

Deze opdracht vraagt leerlingen om de geldigheid van de stellingen te beoordelen. Waarschijnlijk leiden de verklaringen tot het geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden om de stellingen te onderbouwen of verwerpen. Daarnaast kunnen leerlingen gevraagd worden om voorwaarden toe te voegen of de stellingen aan te passen zodat ze 'altijd waar' worden. Een dergelijke activiteit is erg krachtig. De stellingen kunnen zo opgesteld worden dat leerlingen gestimuleerd worden om algemene misvattingen of fouten op te helderen en te bespreken. De taak van de docent is om de leerlingen aan te moedigen om verklaringen, voorbeelden en tegenvoorbeelden te geven. Deze opdracht biedt leerlingen kansen om de rol van voorbeelden in wiskundig onderzoek te ontdekken.

Deze opdrachten tonen het belang van zorgvuldig gekozen bronnen in het nastreven van IBMT in wiskundelessen.

Ervaringen met het implementeren van IBMT

Er is enig empirisch bewijs uit diverse onderzoeken naar de kwaliteit en effecten van IBMT. De effecten van IBMT omvatten de positieve kanten voor motivatie, voor de ontwikkeling van opvattingen over wiskunde en voor het besef van de relevantie van wiskunde voor het leven en de samenleving (Bruder & Prescott, 2013; Blanchard et al., 2010; Furtak et al., 2012; Hattie, 2009; Minner). Sommige experts waarschuwen echter dat deze vorm van instructie het leren alleen kan verbeteren als het zorgvuldig ontworpen en goed gestructureerd is (Hofstein & Lunetta, 2004; Woolnough, 1991).

Van begeleid onderzoek, in vergelijking met gestructureerd onderzoek en open onderzoek, is aangetoond dat het de meest effectieve methode is om onderzoek in de les te implementeren in combinatie met gesloten opdrachten die het leren van procedures en basisvaardigheden ondersteunen (Bruder & Prescott, 2013).

Hoe weten we wanneer onderwijs effectief is? Het antwoord op deze vraag hangt af van je definitie van effectief. Als we willen dat leerlingen wiskunde begrijpen, van wiskunde genieten en de mogelijkheid hebben om zich door problemen heen te werken en conclusies te trekken, dan kan IBMT met begeleiding als succesvol worden gezien. Als ons doel echter is om leerlingen hogere cijfers te laten halen op gestandaardiseerde kennistoetsen, dan is IBMT soms minder succesvol.

Resultaten van de interne evaluatie van PRIMAS geven een rijk beeld van uitdagingen en kansen van docenten wanneer ze experimenteren met IBMT (Maass, 2013). Vele PRIMAS-docenten zien IBMT als een leerling-gerichte aanpak waarbij het draait om zelfsturende maar begeleide leerprocessen, het stellen van vragen, ontdekken, en testen van veronderstellingen op zoek naar nieuw begrip.

> *In onderzoekend leren gaat het om het geven van prioriteit aan leerlingen om verklaringen te genereren en betrokken te zijn bij een kritische dialoog in plaats van dat denken overbodig is [...] tijdens het oplossen van complexe problemen. Leerlingen passen hun kennis toe op nieuwe realistische problemen, en zijn betrokken bij een kritische dialoog met anderen over modellen, oplossingen en documentatie.* (Docent uit Cyprus)

Het implementeren van oderzoekend leren in de lespraktijk wordt echter gezien als een uitdagende maar productieve kans om lessen op een andere manier vorm te geven. Docenten benadrukken de voordelen die onderzoekend leren heeft voor hun leerlingen.

> *Onze eigen ervaring leert ons de waarde van zelf iets ontdekken, in plaats van simpelweg een oplossing aangereikt krijgen. Bij het onderwijzen in onderzoekend leren, leren leerlingen echt een aanpak, zo hebben ze meer sleutels tot begrip.* (Docent uit Zwitserland)

De docenten benadrukken ook de positieve impact van onderzoekend leren op de redeneervaardigheden van leerlingen.

> *Ik realiseerde me dat er invloed was op het redeneren van leerlingen. Ik was onder de indruk van de vaardigheid van sommige leerlingen om conclusies te trekken, en ze te staven met wiskundig bewijs, in de vorm van modellen [...] de mondelinge participatie van leerlingen is drastisch verbeterd [...] vooral het gebruik van correcte wiskundige terminologie, iets wat op die leeftijd niet makkelijk is.* (Afdelingshoofd op Cyprus)

Docenten geven aan dat ze in hun eigen praktijk vaak concepten en procedures uitleggen. Zij houden daarvan - en dat geldt ook voor een aantal van hun leerlingen. Lessen waarin leerlingen worstelen met open vragen en probleemoplossende taken lijken echter ook effectief voor het bespreken van oplossingsstrategieën.

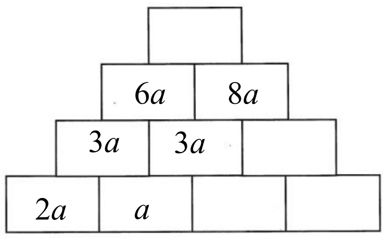
> *Ik had een voorkeur voor docentgericht onderwijs en ik denk dat leerlingen het nog steeds fijn vinden. Maar ze leren er niet zoveel van aangezien ze zelf geen probleem op hoeven te lossen.* (Docent uit Duitsland)

Docenten benadrukken ook het belang van het uitwisselen van ideeën en strategieën tussen leerlingen en hun klasgenoten.

Ik ontdekte hoe belangrijk het is dat de leerlingen zo'n kans (dialoog) grijpen om uit te vogelen wat ze weten en wat ze nog van anderen kunnen leren. En dan merken leerlingen misschien wel dat ze uitkomen op een antwoord waarvan ze dachten dat ze het niet konden vinden. (Docent uit Noorwegen)

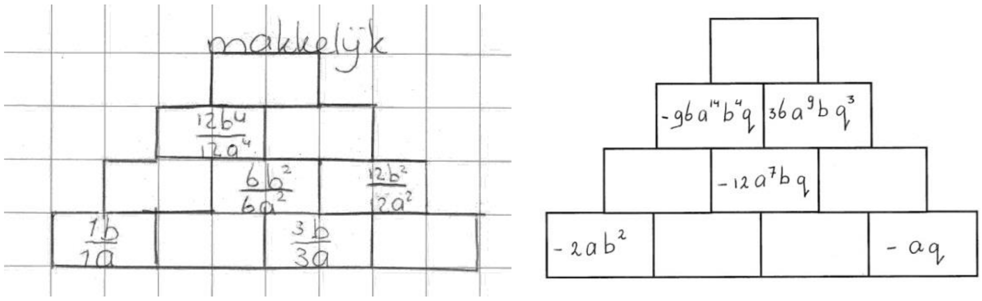
Een voorbeeld uit Nederland

In het werken met IBMT is er een verandering nodig in de rollen, zowel voor de docenten als de leerlingen. Docenten nemen de rol van een leer-facilitator op zich, en leerlingen krijgen een zeer actieve rol. Eén van de docenten nam bijvoorbeeld een opdracht uit een algebrahoofdstuk en maakte een ongestructureerde versie van de taak. De oorspronkelijke taak bestond uit een reeks piramides waarin leerlingen naastgelegen cellen moesten optellen of vermenigvuldigen om de inhoud van de bovengelegen cel te bepalen. In een aantal gevallen moesten ze 'achterwaarts' redeneren om de inhoud van lagergelegen cellen te ontdekken (zie Figuur 6). Met haar aanpassing van de opdracht wilde ze inzicht krijgen in wat leerlingen konden en wat ze te makkelijk of moeilijk vonden. Ze presenteerde eerst zo'n piramide en vroeg haar leerlingen om uit te vinden hoe deze piramide opgebouwd was en of ze de waarden van de lege cellen konden vinden.



Figuur 6. Piramide naar ontwerp van de docent.

Na vijf minuten en wat discussie gaf ze de opdracht om zelf soortgelijke piramides te maken als alternatief voor het oplossen van een reeks schoolboek-opdrachten. Ze mochten optellen en vermenigvuldigen, en moesten een makkelijk en moeilijk piramideprobleem ontwerpen. De leerlingen kwamen tot opmerkelijke resultaten (zie Figuur 7). Sommige leerlingen waren voorzichtig in hun pogingen en maakten piramides die nogal leken op het voorbeeld uit het boek, terwijl anderen op zoek gingen naar extremen. Deze producties van de leerlingen gaven de docent een overzicht van de algebraïsche expressies die binnen bereik van de klas lagen, van zeer eenvoudig tot zeer complex, waaronder, bijvoorbeeld, breuken, decimalen, en negatieve getallen.



Figuur 7. Een eenvoudige en moeilijke vermenigvuldigingspiramide ontworpen door leerlingen.

Tijdens de activiteit kwam één duo met het probleem van de minimale hoeveelheid informatie die gegeven moet worden voordat deze opgelost kan worden. Andere groepen pikten die vraag op en dit motiveerde ze om zelfs nog meer piramides te ontwerpen. De docent gaf aan dat het haar opviel dat haar leerlingen hun begrip van algebraïsche vaardigheden in deze speelse setting verbeterden. Vooral het moment waar de leerlingen de vraag formuleerden over de hoeveelheid benodigde informatie was tekenend, ze probeerden vele opties waarmee ze de reikwijdte van hun algebraïsche kennis toonden en ze tegelijkertijd aan het oefenen waren.

> *De leerlingen werden eigenaar van de wiskunde, ze waren gemotiveerd om wiskunde te doen, en ik kreeg inzicht in hun capaciteiten.* (Docent uit Nederland)

Normaliter oefenen leerlingen algebra met rijtjes gelijksoortige taken en generaliseren ze simpelweg patronen of werkwijzen zonder er diep over na te denken. Bij zulke taken is het veel moeilijker om te zien tegen welke problemen leerlingen aanlopen en of ze hun algebraïsche vaardigheden toe kunnen passen in nieuwe situaties. De docent was erg content met deze verandering in haar les, maar wees erop dat dit een uitdagend proces was. Ervaring op doen met nieuwe lesstrategieën die nodig zijn voor IBMT lijkt een proces dat tijd en aandacht vraagt.

Uitdagingen in het implementeren van IBMT

Docenten lopen tegen een aantal voorwaarden aan die de implementatie van IBMT in de dagelijkse lespraktijk beperken. Een voorname belemmerende factor is het schoolboek dat van A tot Z behandeld moeten worden, de beschikbare tijd om IBMT-activiteiten te plannen en te implementeren, de beschikbare bronnen, en het beoordelen van het werk van de leerlingen.

> *Ik denk dat het grootste probleem de tijd in de les is, en de tijd die benodigd is om te plannen. [...] als je kijkt naar het overladen curriculum, dan is het inpassen van onderzoekend leren best lastig. Je moet namelijk zoveel behandelen in zeer korte tijd.* (Docent uit het VK)

> *Zo'n IBMT lesontwerp vraagt veel van me. Ik moet aan vele variabelen denken en alles goed plannen als ik wil dat mijn leerlingen actief betrokken zijn bij onderzoek* (Docent uit Cyprus)

> *Natuurlijk neemt het veel tijd in beslag, maar het is niet iets extra's. Sterker nog, ik leerde om onderzoekend leren te gebruiken om te werken aan wiskundige inhoud. Leerlingen leren dingen op een veel diepere manier en begrijpen meer.* (Docent uit Spanje)

Een andere zorg van docenten is het beoordelen van het werk van de leerlingen. Een hoofdprioriteit voor docenten is leerlingen te ondersteunen zodat ze het goed doen in hun beoordelingen. Schooltoetsen richten zich vooral op de reproductieve vaardigheden van de leerling, vandaar dat docenten worstelen met een goede balans tussen examenvoorbereidingen en het implementeren van IBMT in de les.

> *Mijn voornaamste taak is om de leerlingen voor te bereiden op het volgende externe examen wat hen een certificaat oplevert dat ze in hun toekomst verder helpt. Dat is wat ze willen - en als ik meer zou doen, komen ze direct in opstand. De volgende stap zou zijn dat ouders me vertellen dat dit niet mijn taak is.* (Docent uit Duitsland)

Het is waar dat in veel landen, examens en toetsen leerlingen niet direct belonen voor hun vaardigheid om te onderzoeken en niet-triviale problemen op te lossen.

Een andere mogelijke hindernis voor de implementatie van onderzoekend leren is het gedrag van leerlingen, dit werd ook aangegeven door een aantal docenten aan het begin van hun deelname aan PRIMAS. Ze waren in eerste instantie bang dat werken met IBL in een klas met 30 leerlingen problematisch zou kunnen zijn wat betreft geluid en orde:

> *Ik dacht "het is onmogelijk om dat in mijn les te doen, want mijn leerlingen zullen niet aan de slag gaan met de opdracht, ze zullen hun tijd verspillen, ze zullen ergens anders over praten en het lawaai zal enorm zijn". Toen implementeerde ik de activiteit, en ik was verbaasd dat iedereen meedeed en betrokken was, zelfs wanneer ze in groepen werkten om tot een antwoord te komen.* (Docent uit Spanje)

Ondersteunende factoren voor het implementeren van IBMT

Een belangrijke taak voor de IBMT-docent is het begeleiden van het onderzoek van leerlingen met goed doordachte vragen (en andere instructies). Bij het begeleiden doelen we op het gebruik van ondersteuning die kenmerken hebben als 'responsiviteit' en 'vervaging'. Hier houdt responsiviteit in dat de ondersteuning aangepast is aan de behoeftes van de leerlingen en vervaging betekent dat de begeleiding geleidelijk vervaagt wanneer de leerlingen vooruitgaan in hun onderzoek. Het niveau van de ondersteuning moet aangepast worden aan het niveau van de leerlingen. De docent kan variëren om tegemoet te komen aan de behoeftes van de laag-scorende leerlingen of om de hoog-scorende leerlingen uit te dagen. In de geobserveerde lessen stelden docenten vragen als: 'Hoe kun je dit probleem vereenvoudigen? Welke aannames kunnen er gedaan worden?' Nadat de leerlingen het probleem geformuleerd hadden, vroegen een aantal docenten: 'Kun je een systematische aanpak bedenken? Wat is een zinvolle manier om je gegevens te noteren?' Terwijl de gegevens verzameld werden, vroegen anderen hun leerlingen 'herken je hier patronen in? Kun je uitleggen waarom deze opduiken?' Richting het einde lag de focus van de docenten op het communiceren van de bevindingen: 'Hoe kun je dit duidelijk en bondig uitleggen?'

Het stellen van deze vragen en het delen van antwoorden met de hele klas ondersteunt het onderzoeksproces.
Een ander belangrijk aspect dat duidelijk werd tijdens de observaties was dat docenten een klassenomgeving dienen te creëren waarin leerlingen zich veilig voelen om zich uit te spreken en fouten te maken. Leerlingen moeten zich niet alleen veilig voelen in het stellen van vragen, maken van fouten en het geven van hun mening, ze hebben ook duidelijke signalen nodig over welk gedrag gewenst is.

> *Bijvoorbeeld, ik maak ook fouten, leerlingen wijzen mij daarop en geven de juiste berekening bij de opdracht. Ik complimenteer ze hiermee en dat waarderen ze. Ik denk dat zoiets ook de communicatie ondersteunt. Ik toon leerlingen dat er niks mis is met het maken van fouten. Dus durven zij ook fouten te tonen en toe te geven.* (Docent uit Duitsland)

De meeste geïnterviewde docenten waren vooral onder de indruk van hoe IBMT hun leerlingen motiveerde tijdens de lessen. Docenten praten over hoe onderzoekend leren het leren weer leuk maakt:

> *In mijn visie kijken leerlingen uit naar de IBL-taken omdat ze het leuk vinden om te doen en ze anders zijn dan een reguliere les. Met IBL krijgen leerlingen de kans om te ontdekken, hun bevindingen te presenteren en hun zegje te mogen doen tijdens de wiskundeles terwijl eerder de docent alles in de les deed.* (Docent uit Malta)

Docenten benadrukten dat het belangrijk is om leerlingen de nieuwe verwachtingen uit te leggen: dat ze actief vragen moeten leren stellen, antwoorden zoeken, benaderingen vergelijken en hun eigen onderzoekslijn moeten volgen - zonder continu om hulp te vragen. Ze moeten ook weten hoe belangrijk het is om samen te leren werken, net als professionele wetenschappers en wiskundigen dat doen.

Conclusies

Dit hoofdstuk beschrijft manieren om IBMT na te streven en een aantal ervaringen van docenten met de implementatie van IBMT. De ervaringen van docenten belichten de behoefte aan gedeelde ideeën, overtuigingen en doelen van het wiskundeonderwijs. Wiskundeonderwijs moet niet alleen gericht zijn op het ondersteunen van het leren van algoritmes en procedures, maar zou ook aandacht moeten schenken aan competenties als creativiteit, omgaan met ontbrekende informatie, verbanden leggen, kritisch denken, samenwerken en communiceren. IBMT taken en lesstrategieën helpen deze competenties te ontwikkelen. De docenten onderstrepen verder het belang van ondersteuning op het niveau van school en landelijke examinering. De implementatie van IBMT vraagt om extra tijd om de lessen voor te bereiden en uit te voeren, en daar is steun van collega's en schoolleiding voor nodig.

De uitdagingen waar docenten en leerlingen mee geconfronteerd worden wanneer ze proberen te werken met IBMT kunnen niet overwonnen worden met enkele geïsoleerde en incidentele interventies. Om een onderwijs- en leercultuur aan te kunnen passen zodat het IBMT ondersteunt, is het belangrijk dat de interventies ook passen binnen de schoolcontext en aansluiten bij de eisen van het curriculum.

Een succesvolle implementatie van IBMT vraagt om:
1. De beschikbaarheid van IBMT-bronnen, niet als geïsoleerde taken maar als modules die tonen hoe wiskundige onderwerpen van het curriculum benaderd kunnen worden op een IBMT-rijke manier.
2. Faciliteiten van voorwaarden zoals beschikbare tijd, alternatieve toetsing en samenwerking met collega's.
3. Een leergemeenschap voor docenten (minstens één andere docent en bij voorkeur een ervaren facilitator) voor het uitvoeren van experimenten in de klas, het bespreken van ervaringen en het stimuleren van de professionele ontwikkeling is ook zeer wenselijk bij de implementatie van IBMT.

MERIA maakt gebruik van twee kaders die verband houden met IBMT, namelijk RME en TDS. Beide kaders zijn gevormd na jarenlang onderzoek, ontwikkeling en samenwerking met docenten. Ze worden behandeld in de volgende hoofdstukken.

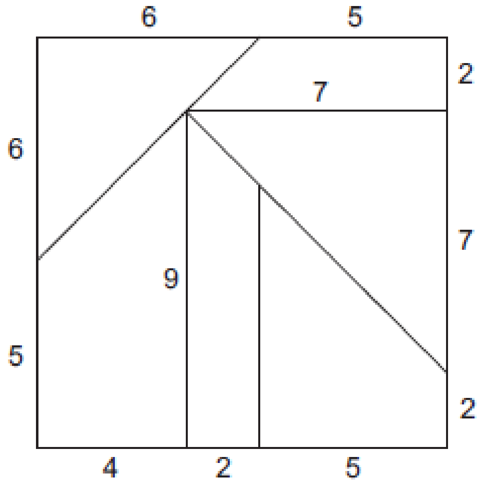
3. De Theorie van Didactische Situaties

Inleiding

Laten we een voorbeeld bekijken van hoe je een les kunt organiseren die leerlingen de kans geeft betrokken te zijn bij onderzoek en het zelfstandig construeren van nieuwe kennis. In de voorgestelde les ontdekken leerlingen een speciaal geval van het belangrijke wiskundige inzicht dat figuren met dezelfde “vorm” proportioneel corresponderende zijdes hebben (oftewel, er is een vaste “schaalfactor” die de mogelijkheid biedt om de zijdes van de tweede figuur te berekenen, wanneer je die van de eerste figuur weet). Hier wordt soms naar verwezen als de Stelling van Thales. Zie dat het begrip van hoeken niet vereist is, en mogelijkerwijs helemaal niet voorkomt, in onderstaande opdracht.

De leerlingen krijgen de volgende instructie:

Hier zijn een aantal puzzels (Voorbeeld: “tangram”, Figuur 8). Je gaat er een dezelfde puzzel maken maar dan groter volgens de volgende regel: het deel dat 4 cm meet in het model moet 7 cm zijn in je reproductie. Ik zal elke groep van vier of vijf leerlingen een puzzel geven. Elke leerling moet minstens één stukje doen of een groep van twee leerlingen doet twee stukjes. Wanneer je klaar bent, moet je in staat zijn om de puzzel te makenzoals in het kleinere origineel. (Brousseau, 1997, p. 177).



Figuur 8: De puzzel gebruikt in de puzzelsituatie.

Na het probleem ontvangen te hebben, gaan de leerlingen zonder hulp van de docent aan het werk. Het probleem wordt aan de leerlingenovergedragen. Zij zijn misschien gewend om de lengtes te vergroten door optellen. Wanneer de leerlingen 3 cm aan elke kant erbij optellen, kunnen ze de grotere puzzel niet maken door de stukjes aan elkaar te leggen aangezien ze niet meer passen. Leerlingen proberen het probleem op te lossen door eerder geleerde kennis toe te passen (vergroten door op tellen), maar de puzzelsituatie dwingt ze te beseffen dat de redenatie die ze eerder toegepast hebben in dit geval niet werkt, en dat ze nieuwe wiskundige kennis moeten ontwikkelen. Het obstakel kan overwonnen worden door de strategie te veranderen in een multiplicatieve methode om de zijdelengtes te vergroten. Het is belangrijk dat de leerlingen het idee van evenredigheid en schaalfactor zelf ontwikkelen, en vooral het multiplicatieve model zien als vereiste in deze situatie, en dat ze dat niet eenvoudigweg aangereikt krijgen door de docent.

In de volgende stap vraagt de docent alle groepen om hun bevindingen te formuleren en presenteren. Bijvoorbeeld, een aantal leerlingen kan gevraagd worden om te presenteren en uit te leggen wat ze gedaan hebben om hun deel van de puzzel te vergroten. Groepen rapporteren ook of hun vergrote delen aan elkaar passen of niet, en wat ze van plan zijn te doen.

Om de nieuwe puzzel correct in elkaar te zetten, moet elke leerling van een groep tot dezelfde hypothese komen dat de zijdelengtes van alle stukken vermenigvuldigd moeten worden met de factor 7/4. De docent weet zeker dat de leerlingen het gewenste doel om evenredigheid te begrijpen bereikt hebben wanneer ze hun strategie valideren door de nieuwe puzzel in elkaar te zetten.

Uiteindelijk kan de docent het idee van gelijkvormigheid tussen meetkundige figuren op een formele manier formuleren. Gebaseerd op de discussie tijdens de les en de eindreflectie op het probleem worden de persoonlijke ideeën van leerlingen gezamenlijke kennis die lijkt op wat er gevonden kan worden in diverse media zoals tekstboeken of online bronnen.

Het ontwerp van deze lessituatie is een klassiek product van de Theorie van Didactische Situaties. In de rest van het hoofdstuk zullen we basisbegrippen en uitgangspunten van de theorie presenteren met verdere voorbeelden en richtlijnen over hoe je deze aanpak toe kunt passen in de les.

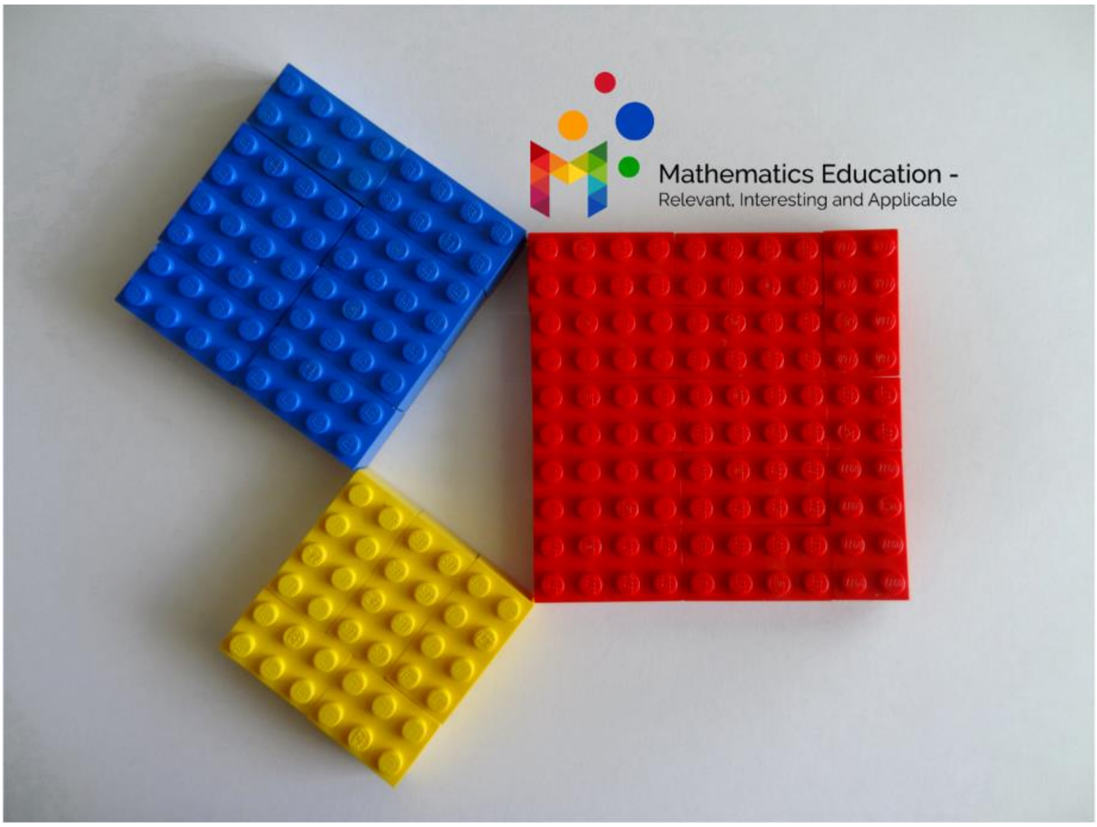
Persoonlijke en institutionele kennis

De Theorie van Didactische Situaties (TDS), die Guy Brousseau eind jaren '60 begon te ontwikkelen, heeft verschillende ideeën en resultaten geproduceerd die docenten kunnen helpen hun wiskundige kennis in te zetten en te ontwikkelen in het ontwerp en de organisatie van de lessen. TDS ondersteunt onderwijs waarin leerlingen onderzoeker en zelf wiskundige kennis opbouwen op een manier die de essentiële kenmerken van IBMT omvat.

Bij TDS is het zeer belangrijk om onderscheid te maken tussen twee soorten kennis:

Institutionele kennis is kennis die weergegeven wordt in tekstboeken, websites, vakbladen en andere gedeelde bronnen. Deze kennis staat voor een synthese van wiskundige activiteiten uitgevoerd door individuen maar vervolgens gevalideerd en gepubliceerd door anderen. In deze bronnen wordt de wiskundige kennis weergegeven in een bondige en exacte vorm terwijl het onderzoeksproces, wat geleid heeft tot deze ontwikkeling, meestal niet zichtbaar is. Deze deductieve manier van presenteren van wiskundige kennis wordt gedeeld en geëvalueerd door een gemeenschap van onderzoekers, docenten, en, van tijd tot tijd, het algemene publiek. Een eenvoudig voorbeeld wordt gegeven in de presentatie van de Stelling van Pythagoras als $a^2 + b^2 = c^2$, waarbij a en b de lengte van de rechthoekszijden zijn en c de lengte van de schuine zijde is van een rechthoekige driehoek. Tegenwoordig is deze formule de „institutionele kennis" die docenten hun leerlingen leren en die ze zich tot laat in hun leven herinneren, in plaats van een meetkundig idee of stelling erachter.

Persoonlijke kennis is de kennis die leerlingen (en anderen) opbouwen terwijl ze werken aan een wiskundig probleem. Deze ideeën of kennis zullen regelmatig impliciet gegeven worden en horen bij de context waarin ze ontwikkeld zijn. Leerlingen kunnen persoonlijke kennis ontwikkelen over de Stelling van Pythagoras door te spelen met driehoekige en vierkante tegels, zoals geïllustreerd in Figuur 9. Er is duidelijk meer nodig om de officiële vorm die hierboven beschreven is tot stand te brengen.



Figuur 9. De Stelling van Pythagoras geïllustreerd met LEGO.

In het puzzelvoorbeeld, waarbij leerlingen de persoonlijke kennis het eerst vormen, gaat het om het succes of falen van specifieke methodes om de stukken te vergroten. De officiële kennis waar het om gaat is dat wanneer twee figuren A en B gelijkvormig zijn, dan is de verhouding tussen corresponderende zijdes constant (a/b, waarbij a een zijde is in A, corresponderend met de zijde b in B). Er zullen waarschijnlijk meerdere situaties nodig zijn om de officiële kennis te bereiken die lijkt op dit algemene niveau. Aan het eind van de puzzelsituatie kan de groep het hooguit met elkaar eens worden dat alleen vermenigvuldiging met 7/4 lijkt te werken in dit specifieke geval.

Wanneer leerlingen aan het werk gaan met een wiskundig probleem en een persoonlijk antwoord ontwikkelen op de vraag in kwestie, breiden ze hun persoonlijke kennis uit. De persoonlijke kennis van de leerlingen is zeer waarschijnlijk een anders dan de institutionele kennis. Het zal verder ontwikkeld en geformaliseerd worden wanneer het met anderen gedeeld en besproken wordt. Vandaar dat de communicatie met klasgenoten of peers de eerste ideeën van de leerlingen verder zal ontwikkelen en formaliseren.

Het is essentieel dat de docent de persoonlijke kennis van zijn leerlingen uitdaagt door nieuwe problemen te geven waarbij kennis nodig is die ze nog niet volledig ontwikkeld hebben. Op deze manier wordt persoonlijke kennis gevalideerd. Het kan of gevalideerd worden door de docent, door de probleemsituatie, of in vergelijking met andere leerlingen, bijvoorbeeld door hun strategieën in het oplossen van een probleem te vergelijken. Zo wordt de persoonlijke kennis getransformeerd en meer geformaliseerd. Dit betekent dat de kennis dichter in de buurt komt van wat gezien kan worden als institutionele kennis.

Didactische en a-didactische situaties

Het onderscheid in TDS tussen persoonlijke en institutionele kennis stelt docenten in staat om lessen te organiseren aan de hand van onderzoekssituaties, oftewel de IBMT-aanpak. Een deel van het idee bij IBMT is dat onderwijs leerlingen de kans hoort te bieden om betrokken te zijn bij activiteiten die lijken op die van een onderzoeker.

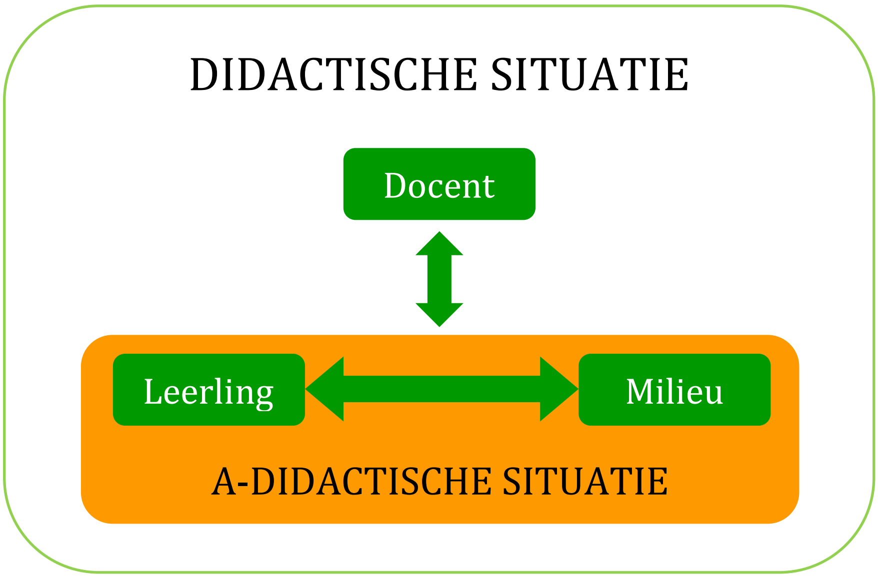
Een belangrijk deel in het ontwerpen van deze situaties is het idee van het *didactische milieu*. Het milieu is de omgeving waarmee de leerling werkt in het opdoen van nieuwe kennis. Het bestaat uit het probleem, de voorkennis van de leerlingen, en instrumenten zoals pen en papier, liniaal, rekenmachine, CAS-tool (Computer Algebra Systemen), een puzzel. In het voorbereiden van de les specificeert de docent de *doelkennis* en ontwerpt hij een geschikt milieu voor de ontwikkeling van die kennis bij de leerlingen. Milieus kunnen echter meer of minder geschikt zijn voor het ontwikkelen van bepaalde kennis. In de hiervoor beschreven puzzelsituatie bestaat het milieu uit de puzzel, nieuwe blaadjes papier, scharen, linialen, en de voorkennis van de leerlingen. Het obstakel waar de leerlingen tegenaan lopen komt voort uit de wiskundige aard van het probleem. Het milieu biedt de leerlingen dus veel mogelijkheden om de gewenste kennis te vergaren zonder de uitleg van de docent over de gelijkvormigheid van meetkundige figuren. Het milieu wekt bij de leerlingen de behoefte op om deze kennis te vergaren.

Het kan zijn dat niet alle leerlingen nadenken over de implicaties van de multiplicatieve strategie in het behoud van de hoeken. Dit is alleen wel noodzakelijk om de stukken in elkaar te laten passen in een nieuw, groot vierkant gelijk aan het origineel. Dus de correcte strategie leidt tot de ontwikkeling van de gewenste institutionele kennis. De TDS-aanpak in het lesgeven en leren wordt vaak beschreven in termen van een spel. Het ontwerp van de situatie en het milieu kan vergeleken worden met het uitzetten van een veld voor een sportwedstrijd, en het formuleren van de regels van dat spel. Wanneer de leerlingen het spel winnen, hebben ze de optimale strategie ontwikkeld voor het spel. Dus winnen correspondeert met leren en de optimale strategie betekent dat de leerlingen de gewenste kennis en methodes hebben ontwikkeld. Met andere woorden, het spel creëert de behoefte voor de ontwikkeling van de winnende strategie. En het ontwerpen van een "veld om op te spelen" (de situatie) zou zo gedaan moeten worden dat het de leerlingen de beste kans geeft op het vinden van deze strategie.

Wanneer het milieu goed ontworpen is, kunnen de leerlingen zelfstandig ermee aan de slag, zonder verdere begeleiding van de docent. *A-didactische situaties* zijn die situaties waarbij de leerlingen betrokken zijn bij het probleem en het milieu verkennen zonder de bemoeienis van de docent. In deze situaties ontwikkelen de leerlingen hun persoonlijke kennis door het aan te passen aan het probleem waar ze aan werken, door verdere onderzoeksactiviteiten en het testen van ideeën in het milieu, of door het formuleren van argumenten om de peers te proberen te overtuigen.

Didactische situaties zijn situaties waarin de docent nadrukkelijk bezig is met de leerlingen om zo hun kennis over iets specifieks verder te helpen. Inderdaad, *didactisch* refereert aan de *bewuste handeling van iemand om enige kennis te delen met iemand anders*. Een belangrijke functie in didactische situaties is om a-didactische situaties te starten, reguleren en modereren, en te garanderen dat de kennis die daar vergaard wordt gedeeld, gevalideerd en (voor de relevante elementen) herkend wordt als "correct". Figuur 10 laat zien dat dit betekent dat didactische situaties bestaan uit de interactie van de docent met a-didactische situaties. De a-didactische situaties kunnen natuurlijk meer of minder potentie hebben - van stilzwijgend luisteren naar de uitleg van de docent tot de actieve betrokkenheid in een rijke probleemsituatie. Het voornaamste leerpotentieel van de leerlingen ligt natuurlijk in a-didactische situaties aangezien die de leerlingen meer kansen bieden om hun persoonlijke kennis te ontwikkelen, wat gedeelde kennis kan worden door de aanvulling van didactische situaties. Met andere woorden, het leerpotentieel ligt in de dialectiek tussen a-didactische en didactische situaties of tussen persoonlijke en gedeelde kennis. Figuur 10 toont ook hoe didactische situaties als geheel bestaan uit een "dubbelspel": het spel van de leerlingen met het milieu (a-didactische situaties) en het spel van de docent met de a-didactische situaties (die hij plant, delegeert en reguleert). De figuur, in het bijzonder, toont dat een a-didactische situatie niet impliceert dat de docent afwezig of inactief is. Spontane zelfstudie is geen a-didactische situatie; het is niet-didactisch.

A-didactiek is een speciaal fenomeen *binnen* didactische situaties: de persoon die kennis wil delen kan zich *bewust* terugtrekken uit de interactie om de lerende zich te laten gedragen op nuttige of zelfs noodzakelijke wijze om zo de kennis te vergaren. Dit is een vrij algemeen fenomeen wat zeker geen uitvinding is van TDS; men observeert een element van a-didactiek in de meest didactische situatie. Natuurlijk hangt de kwaliteit van de zelfstandige handelingen van de leerlingen af van het milieu.



Figuur 10: Didactische situaties als een dubbel samenspel

De rol van de docent

Het is belangrijk om te verduidelijken hoe de rol van de docent in een TDS-ontwerp verschilt van wat veel docenten gewend zijn in hun normale lespraktijk.

In wiskundeonderwijs blijkt regelmatig dat de docent eerst een nieuw begrip, nieuwe methode of theorie introduceert. Dan toont hij voorbeelden waarin hij de nieuwe kennis gebruikt, en gaan de leerlingen de docent imiteren door soortgelijke oefeningen op te lossen. Ten slotte wordt het werk van de leerlingen beoordeeld door de docent. Bij deze aanpak start de docent door de institutionele kennis te institutionaliseren. Er is geen milieu voor de leerlingen om te verkennen - of het is hoogstens een zwak milieu zonder ruimte voor de onderzoeksprocessen van de leerlingen aangezien het overduidelijk is dat de winnende strategie is om de voorbeelden van de docent te imiteren. In het oplossen van de oefeningen zijn de leerlingen actief en formuleren ze waarschijnlijk antwoorden in hun schriften, maar dit is geen onderzoek aangezien ze de juiste methode weten (ervan uitgaande dat ze opgelet hebben). De validatie is volledig afhankelijk van de docent die de antwoorden van de leerling goed- of afkeurt. In deze setting is de docent de bron van alle ware kennis, de leerlingen absorberen alleen maar en volgen het juiste voorbeeld van de docent.

Deze aanpak heeft keerzijdes. Wanneer de institutionalisering aan het begin van het lesgeven geplaatst wordt, waarbij de leerlingen alle relevante officiële kennis krijgen en slechts gevraagd worden het “toe te passen” in specifieke gevallen, zullen de leerlingen mogelijk niet de juiste persoonlijke kennis vergaren. In sommige gevallen nemen zij slechts de officiële kennis over als een tactiek om bepaalde taken op te lossen die ze krijgen van de docent of terugvinden in een examen. Ze kunnen tegelijkertijd tegenstrijdige ideeën en overtuigingen, waaronder misvattingen, behouden. Dit ondermijnt de kansen van een rationeel proces van kennisconstructie, wat in de dialectiek geplaatst is tussen persoonlijke en institutionele kennis, zoals geïllustreerd in Figuur 11. Wanneer leerlingen denken, praten en schrijven over de oefeningen, proberen ze te doen wat de docent van hen verwacht en beloont, zelfs wanneer ze geen idee hebben wat het betekent of waarom het werkt. De leeropbrengst van het herhalen van de oplossingsstrategie is verrassend klein, aangezien het volledig afhankelijk is van oppervlakkige herkenning van de opdrachten waar het betrekking op heeft. De meeste docenten hebben absurde gevallen gezien van hoe leerlingen falen in zo'n benadering.

Wanneer de publieke of institutionele kennis duidelijk herkend wordt als consistent met de kennis die de leerlingen vergaard hebben, in het werken met een geschikte set problemen (in a-didactische situaties), lijkt de publieke kennis voor hen rationeel en gegrond en zullen ze het eerder overbrengen op nieuwe soorten problemen aangezien ze de onderbouwing erachter kennen. Maar om dit betere resultaat te bereiken zal de docent meer moeten doen dan slechts vertellen en onderwijzen. Dit vraagt veel meer van de wiskundedocent dan wat normaalgesproken verwacht wordt.

Volgens TDS is het juist de rol van de docent om situaties te ontwerpen of kiezen waarin de leerlingen persoonlijke kennis kunnen ontwikkelen die past bij de institutionele kennis, *waaronder* de onderbouwing hiervan. De docent moet ook de dialectiek uit Figuur 11 organiseren, wat cyclisch is: om nieuwe kennis aan te leren ontwerpt en delegeert de docent een wiskundige situatie waarin de leerlingen hun persoonlijke kennis kunnen ontwikkelen. De docent moet de leerlingen ook helpen om deze kennis te delen in het publieke domein van het klaslokaal, waar het eventueel gekoppeld kan worden aan de nieuwe kennis die de leerlingen moeten vergaren. Wat docenten moeten weten is niet slechts, of hoofdzakelijk, de institutionele kennis; het is *de situaties die leerlingen de kans geven deze kennis te vergaren.*

Figuur 11: Samenspel tussen persoonlijke en institutionele kennis in didactische situaties

Didactische contracten

Zelfs voor ervaren docenten kan het een uitdaging zijn om te navigeren in onderzoekende scenario's aangezien ze de leerlingen niet slechts officiële kennis dienen te voeren en hun verwerking ervan overzien, maar in plaats daarvan de leerlingen moeten begeleiden in hun eigen kennisvergaring. Wanneer de docent alle goede antwoorden weet en ziet dat de leerlingen het probleem fout of minder goed benaderen, is het een ware uitdaging om niet te corrigeren of de leerlingen in de richting te begeleiden van de beste strategie. Het is zeer belangrijk dat de docent weet welk deel van de kennis in a-didactische situaties door de leerlingen opgedaan moet worden (zonder de inmenging van de docent) en wat direct geïnstitutionaliseerd kan worden door de docent. In een onderwijssituatie hebben leerlingen en docenten wederzijdse verwachtingen over elkaars rollen en verantwoordelijkheden in de klas. De verzameling van deze verwachtingen wordt het *didactische contract* van de situatie genoemd. Het is geen contract in de algemene zin van een geschreven document, toch kunnen we het effect terug zien in de acties van de docenten en leerlingen. Bijvoorbeeld, wanneer leerlingen de docent vragen om te vertellen of hun oplossing op een lineaire vergelijking correct is, tonen zij de verwachting dat het (nog) niet hun verantwoordelijkheid is om de juistheid van deze berekening te controleren. De docent zal hier misschien naar handelen en zijn mening geven, of hij zal proberen dit deel van het contract aan te passen door een spel met de leerlingen op te pakken rond het nieuwe probleem (welke technieken zijn er om de juistheid van een voorgestelde oplossing op een lineaire vergelijking te controleren).

Als leerlingen van begin af aan gewend zijn dat een docent hen het juiste antwoord geeft, kan een zekere mate van frustratie opkomen wanneer zij open onderzoekende activiteiten krijgen. In deze situaties zullen leerlingen de docenten vaak vragen, meer of minder direct, om de verwachte strategie te vertellen. Het kan verleidelijk zijn voor de docent om de leerlingen uit te leggen wat ze moeten doen - het is duidelijk makkelijker voor iedereen. Echter, zoals eerder uitgelegd, verpest dit de leermogelijkheden van de onderwijssituatie. Om deze frustraties te vermijden kan het goed zijn om te beginnen aan de studenten uit te leggen dat het lesgeven zal veranderen en dat er van ze verwacht wordt om betrokken te zijn bij het oplossen van problemen zelfs als ze het idee hebben dat ze dat nog niet kunnen.

Wanneer de leerlingen beginnen te ervaren dat de institutionalisering van de docent uiteindelijk slechts een herformulering is van hun persoonlijke kennis, zullen ze het idee hebben dat wat ze eerder deden betekenisvol en belangrijk is, en zullen ze geleidelijk aan hun nieuwe rollen en verantwoordelijkheden accepteren. Er is voldoende bewijs dat leerlingen, na verloop van tijd, een positievere relatie zullen ontwikkelen met wiskunde in zijn geheel: in plaats van een nutteloze en eindeloze lijst van gegeven antwoorden zal wiskunde voor hen meer lijken op een rationele, uitdagende en bevredigende onderneming - net als het is voor succesvolle onderzoekers.

De fases van didactische situaties

Het idee van TDS is om situaties te creëren die een bekend obstakel van wiskundige kennis behandelen, wat bij de leerlingen leidt tot de behoefte om nieuwe wiskundige kennis te ontwikkelen of construeren. Het ontwerpen en kalibreren van deze situaties is een kernonderdeel van TDS en zijn “didactical engineering”.

Onderwijssituaties worden in vijf fases georganiseerd. We zullen elk ervan beschrijven aan de hand van opmerkingen over hun rol in het leren van leerlingen. De opeenvolging van fases ligt niet strak vast en later zal een overzicht gegeven worden. We zullen alle fases illustreren met twee voorbeelden. De eerste is de puzzelsituatie uit de inleiding, en de tweede is het bekende *Race tot 20:*

> De leerlingen mogen een spel spelen en de winnaar is de persoon die het eerst het getal 20 bereikt. Twee spelers spelen tegen elkaar. Eén speler start het spel door het getal 1 of 2 te kiezen. De andere speler telt 1 of 2 op bij het vorige getal waarbij ieder als eerst 20 wil zeggen.

Het doel van de Race tot 20 is om te leren hoe deling het antwoord geeft op een nieuw soort probleem waarbij de leerlingen vroeg kennismaken met bewijsvoering (om “winstrategieën” te verantwoorden). Concreet houdt dit in dat verwacht wordt dat leerlingen ontdekken en verantwoorden dat alle winnende getallen 20, 17, 14, ..., 2 zijn (getallen onder de 20 waarvan het restgetal na deling door 3 twee is). Experimenten met de situatie bevestigen dat leerlingen deze getallen ontdekken als gedeeltelijke winstrategieën en in die volgorde, en dus geleidelijk een uiteindelijke strategie opbouwen (restgetal gedeeld door 3). Ondertussen ontdekken ze ook een aantal basisobjecten en principes van modulaire rekenkunde, zoals wat (voor de wiskundige) een specifieke congruentieklasse is.

Overdrachtsfase

De eerste fase wordt de overdrachtsfase genoemd. Over het algemeen is overdracht een overdracht of afkomst van iets op een lager niveau. In TDS is de overdracht het startpunt. Het is de fase waarin de docent het probleem uitlegt en de regels om het op te lossen geeft. Oftewel, de docent geeft de studenten het milieu. Volgens spelterminologie biedt de docent het speelveld en de spelregels. Het is belangrijk om zeker te weten dat de leerlingen de regels begrijpen en betrokken kunnen zijn bij de gewenste activiteiten wanneer de overdrachtsfase afgerond is. In de puzzelsituatie is het duidelijk hoe het spel gespeeld moet worden in hoe de leerlingen de nieuwe stukken en de vergrote puzzel zouden moeten maken. In deze fase helpt de docent niet meer. In de overdrachtsfase van de Race tot 20 geeft de docent de regels maar is deze ook betrokken in één spel met een leerling, wat op het bord getoond wordt als demonstratie van hoe het spel gespeeld moet worden. Of de docent besluit het milieu aan te bieden door een voorbeeld van de activiteit of door simpelweg het milieu met alle regels en artefacten te presenteren is afhankelijk van het concrete probleem en de situatie.

Actiefase

In de actiefase gaan leerlingen zelfstandig met het probleem aan de slag. In de puzzelsituatie zullen veel leerlingen in eerste instantie hun eerdere ervaring met wiskundige problemen van het vergroten van de afmetingen toepassen door 3 op te tellen bij alle zijdes van de meetkundige figuur die gegeven wordt. Zo passen ze de eerder ontwikkelde kennis en ervaring toe in een natuurlijke eerste hypothese, ook al blijkt deze onjuist te zijn.

In het voorbeeld van de Race tot 20 wordt de leerlingen gevraagd om het spel te spelen samen met hun buurman of buurvrouw. Eerst is het werk van de studenten misschien vooral proefondervindelijk en zonder een uitgesproken strategie. Toch kan ervaring met het spel er geleidelijk op wijzen dat de persoon die 17 zegt het spel kan winnen ongeacht wat de andere speler optelt bij de 17.

Wat de twee voorbeelden met elkaar gemeen hebben is dat ze allebei een rijk milieu bieden om de ontwikkeling van persoonlijke kennis te ondersteunen in het probleem dat zij op proberen te lossen. In deze fase kan de kennis nogal impliciet en eenvoudig zijn, en het kan lastig zijn (indien het überhaupt mogelijk is) voor de leerlingen om aannames te formuleren die horen bij de handelingen die zij doen. De leerlingen maken gebruik van hun eerder ontwikkelde heuristische vaardigheden, maar ontwikkelen ze tegelijkertijd verder. Van deze fase wordt ook wel gezegd dat ze overeenkomsten heeft met de eerste fase van hoe onderzoekers een open probleem aanpakken. Ze kennen misschien de regels van hun spel of het milieu als de definities, lemma's, en theorieën van hun onderzoeksveld, en daarnaast de algemeen geaccepteerde wiskundetechnieken die geassocieerd worden met dit veld. Maar ze kunnen nog steeds spelen met veronderstellingen, en geen definitieve "theorie" hebben om het te bewijzen.

Formuleringsfase

In de formuleringsfase wordt er van leerlingen verwacht dat ze laten zien wat ze gedaan hebben in de actiefase: eerste gedachtegangen, een hypothese of simpelweg wat ze tot dusver hebben geprobeerd. Dit kan op verschillende manieren vormgegeven worden in de les, maar het is niet altijd genoeg om van de leerlingen te verlangen dat ze betrokken zijn in een klassendiscussie. Het zijn vaak dezelfde gedreven leerlingen die betrokken zijn in klassikale discussies. Dit is een probleem als we willen dat alle leerlingen meedoen aan onderzoekend leren. In IBMT moet communicatie en persoonlijke hypotheses gedeeld worden en er moet op gereageerd worden door peers om de persoonlijke kennis van elke leerling te formaliseren wat zich vormt in de hoofden van de leerlingen wanneer ze werken aan het probleem in het gegeven milieu. Dit betekent dat alle leerlingen hun persoonlijke ideeën zouden moeten formuleren en presenteren, net als in de formuleringsfase. Dit kan vaak in kleine groepen gedaan worden.

In de puzzelsituatie staat het verzamelen van de stukken voor de formuleringsfase waarbij elke leerling presenteert en uitlegt wat zijn of haar strategie zal zijn om een nieuw puzzelstuk te vormen. Er wordt van de leerlingen, als groep, verwacht dat ze er tegenaan zullen lopen dat de stukken niet passen. Dit zal er dus toe leiden dat de leerlingen bespreken welke strategieën ze al toegepast hebben en welke nieuwe ideeën over andere benaderingen ze mogelijk bedacht hebben. Zelfs als één leerling direct de juiste strategie vindt, moet deze persoon de rest van de groep overtuigen met wiskundige argumenten op een manier dat de rest van de groep het kan begrijpen en accepteren.

In het voorbeeld van de Race tot 20 wordt de formuleringsfase uitgevoerd als een nieuwe ronde spellen waarbij elk team van twee spelers speelt tegen een ander team. Om het samen eens te worden over een gedeelde strategie zullen de leerlingen hun persoonlijke kennis moeten delen en elkaar overtuigen van wat de optimale strategie van hun team kan zijn. Opnieuw, het verwoorden van ervaring en ideeën is een eerste stap richting het vormen van institutionele kennis. De formuleringsfase dient om een situatie te creëren waarin leerlingen door het milieu of de spelregels gedwongen worden de ervaring en opgedane ideeën te verwoorden en daarbij de van bouwstenen van wiskundige kennis formuleren.

Valideringsfase

In de valideringsfase testen de leerlingen hun strategieën of hypotheses binnen het milieu. Dit betekent dat het werk van de leerlingen gevalideerd kan worden zonder dat de docent ze vertelt of ze het goed of fout hebben. Het wiskundige probleem zal tot op zekere hoogte de leerlingen antwoorden geven over de haalbaarheid van hun antwoord of strategie als de situatie en het milieu daarvoor sterk genoeg zijn.

In het voorbeeld met de puzzel is het milieu zo ontworpen dat de puzzelstukken in elkaar passen en een vergroting van de eerste puzzel vormen, als de leerlingen een multiplicatieve methode gebruiken, of een gelijkwaardige methode. Vandaar dat, hoewel leerlingen eerst misschien een minder productieve strategie kiezen, de validatiefase zal tonen dat hun idee verkeerd was en dat ze een andere strategie nodig hebben, die later op dezelfde manier weer gevalideerd kan worden. Een productieve strategie moet binnen het bereik van de wiskundige vaardigheid van de leerlingen liggen. Wanneer de leerlingen "vast" zitten in een probleem met geen idee over hoe ze verder moeten, is dit natuurlijk contraproductief voor de ontwikkeling van wiskundige nieuwsgierigheid en een onderzoekende geest.

In de Race tot 20 is de validatie vooral een punt van de strategie hanteren die altijd werkt. Er wordt vanuit gegaan dat de winnaar de sterkste oplossingsstrategie heeft. Wanneer dit niet het geval is, kunnen beide teams de optimale strategie ontwikkelen. Of beide teams gaan door zonder echte strategie. Zelfs als de winnaar de beste strategie heeft van beide teams, heeft dat team misschien niet de beste strategie vanaf het begin van het spel. In zo'n geval kan de docent ervoor kiezen om de klas op te delen in twee grote groepen, ze vragen om optimale strategieën te ontwikkelen en uiteindelijk tegen elkaar te strijden. Dit kan gezien worden als een extra formuleringsfase waarin de leerlingen elkaar proberen te overtuigen van hun strategieën. Uiteindelijk kan de laatste wedstrijd plaatsvinden waarbij de strategie van de winnaar de sterkste zal blijken te zijn - zogezegd gevalideerd is.

Institutionaliseringsfase

De laatste fase is de institutionalisering en hier zal de persoonlijke kennis eindelijk de status van institutionele kennis bereiken. Deze fase zal meestal uitgevoerd worden door de docent die ideeën verzamelt, waarbij de belangrijkste punten van gedeelde strategieën samengevat worden en als één optimale strategie worden gepresenteerd. De geïnstitutionaliseerde kennis zal vaak gepresenteerd worden als een weergave van bondige en correcte wiskundige kennis als in de tekstboeken.

In de puzzelsituatie kan de docent een informeel idee aanbieden van figuren met een gelijke vorm, "één is een vergroting van de ander" (geen vergroting van "dezelfde vorm en afmeting"), waarbij een gesprek gevoerd wordt wat lijkt op de officiële richtlijnen of tekstboekmateriaal voor het lesgeven op een bepaald niveau. Het feit dat zijdes proportioneel zijn wordt voor het gemak uitgedrukt door de vermenigvuldiging met een gelijke factor (7/4) waarvan aangetoond is, door te experimenteren, dat het een vergrote puzzel produceert. Meer geavanceerde manieren om de relatie tussen de oorspronkelijke en de gemaakte figuren onder woorden te brengen met afbeeldingen kan te geavanceerd zijn voor 14-jarigen. Het belangrijkste punt is dat de wiskundige kennis vastgesteld wordt door ervaring en redenatie in plaats van dat het slechts verkondigd wordt als een dogma. Dit is in zekere mate zelfs lastiger te bereiken op een niveau waar formelere definities en stellingen nog buiten het bereik van de leerlingen liggen.

In het voorbeeld van de Race tot 20 wordt de winnende strategie geïnstitutionaliseerd. Dit kan beperkt worden tot de lijst met getallen die een speler wil bereiken om zo het spel te beheersen en uiteindelijk te winnen. Het is misschien redelijk eenvoudig voor leerlingen om nummer 17 als van belang aan te wijzen, zoals eerder genoemd. De winnende getallen of strategie kunnen uitgeschreven worden als de getallen $w=3n+2$, waarbij n het getal van een bepaalde ronde is waarin *w* het winnende getal is. Wanneer je begint met het getal 2 kun je het gehele spel in eigen hand houden. Om de leerlingen dat inzicht te laten krijgen kan het nodig zijn dat de docent de leerlingen steeds aanmoedigt om hun winnende strategie te verbeteren. Afhankelijk van het niveau kan men uiteindelijk het abstractere spel „Race tot *N*" met stapgrootte 1, 2, ..., *n* analyseren. En dan komt modulair rekenen om de hoek kijken.

De hoeveelheid wiskundig detail die de docent in deze fase geeft zou overeen moeten komen met de activiteiten die de leerlingen uitvoeren. Het zou een synthese moeten zijn van de opgebouwde kennis van de leerlingen zodat ze hun persoonlijke kennis kunnen herkennen en koppelen aan de kennis die ze moeten institutionaliseren en waarvan verwacht wordt dat de gedeelde kennis van de klas is.

Deze fase moet niet eindigen als een lezing waardoor de acties van de leerlingen nutteloos worden - de institutionalisering zou verder moeten gaan met de kennis van de leerlingen verworven bij het gegeven probleem. Als de docent de les gaat lezen en voorbij gaat aan het werk van de leerlingen, riskeert hij dat de leerlingen hun acties zien als een excuus van de docent om meer te vertellen over de onderwerpen waar het echt over gaat. In die gevallen is het onwaarschijnlijk dat de leerlingen het wiskundig onderzoek waarderen of betrokken zijn en zelfstandig kennis opbouwen, maar zullen ze de docent blijven imiteren in hun gebruik van wiskunde.

Over het belang van a-didactische situaties

In onderwijssituaties waarbij de leerlingen niet naar verwachting vooruitgaan kan de docent de neiging hebben door te gaan naar fases waarbij zij controle hebben over de situatie. Hoewel, zoals eerder aangegeven, dit meestal het leerpotentieel voor leerlingen beperkt. De overdracht en institutionalisering zijn didactische situaties. De actie is een a-didactische situatie, en de laatste twee kunnen er ergens tussenin liggen; maar er moet gestreefd worden naar het optimaliseren van de rol van de a-didactische onderdelen. Vooral de delen van a-didactische validatie - zonder de docent als scheidsrechter - zijn vaak cruciaal om er zeker van te zijn dat leerlingen een volledig rationele verhouding ontwikkelen met de doelkennis in plaats van een schietgrage aanpak waarbij de "treffer" alleen herkend wordt door de bevestiging van de docent. In het algemeen hebben we het over het *a-didactisch potentieel* in een didactische situatie - dat wil zeggen, het potentieel voor leerlingen om zelfstandig te werken aan een wiskundig probleem, en zo de doelkennis te halen. Het is voor docenten een belangrijk idee om het volledige potentieel van een a-didactische situatie na te streven - door de juiste keuzes in de fase van overdrach, en door zorgvuldig het overgedragen milieu aan te passen aan de vaardigheden van de leerlingen (natuurlijk, zonder het probleem te bagatelliseren).

Samenvatting van de fases

In Figuur 12 bieden we een overzicht van de vijf fases van didactische situaties.

	Rol van de docent	Rol van de leerlingen	Milieu	Situatie
Overdracht	Introduceert, deelt het milieu uit	Ontvangen, proberen het probleem aan te pakken	Wordt vastgesteld	Didactisch
Actie	Observeert en reflecteert	Doen en reflecteren	Probleem wordt verkend	A-didactisch
Formulering	Organiseert, start met vragen indien nodig	Formuleren zo specifiek mogelijk	Open discussie	A-didactisch of didactisch
Validatie	Luistert en evalueert indien nodig	Bespreken, proberen elkaars argumenten te volgen	Begeleide discussie	Vaak didactisch
Institutionalisering	Presenteert en legt uit	Luisteren en reflecteren	Institutionele kennis	Didactisch

Figuur 12: Een overzicht van de TDS-fases, hun functioneren en acties van de deelnemers in het lesgeven en leren (vertaald uit Winsløw, 2006, p. 140).

Zoals eerder al aangegeven werd, worden de fases niet slechts als ontwerptools gebruikt die puur toepasbaar zijn op TDS-onderwijs. De fases kunnen gebruikt worden om wiskundeonderwijs te analyseren (bijvoorbeeld om te kijken of bepaalde fases missen of onderontwikkeld zijn). Zelfs als het onderwijs erg anders is van wat we in dit hoofdstuk gepresenteerd hebben, zijn de fases nog steeds van toepassing op de analyse van het onderwijs - en voor de docenten, ze bieden een belangrijk instrument om onderscheid te maken tussen essentieel verschillende delen van hun onderwijs, met duidelijke rollen en effecten voor het leren van hun leerlingen.

Het dynamische gebruik van fases

In de twee gebruikte, eenvoudige voorbeelden in het overzicht van de fases is het duidelijk dat elk ervan zo ontworpen is dat het didactisch milieu de leerlingen ondersteunt in hun acties. Ze laat experimenteren en hypotheses formuleren (goed en slecht), en biedt omstandigheden die sterk genoeg zijn om deze hypotheses te valideren. De twee situaties bieden ook nogal strenge interpretaties van de fases en hoe ze met elkaar samenhangen. Wat gebeurt er als de docent een milieu met een probleem aanbiedt dat de leerlingen niet op kunnen lossen?
In het ontwerpen van wiskundeonderwijs is het natuurlijk belangrijk om enig inzicht te hebben of krijgen in welke kennis de leerlingen al hebben. De kennis die

de docenten hiervan hebben kan gebaseerd zijn op het curriculum van middelbaar wiskundeonderwijs, het eerder gebruikte tekstboek, of andere bronnen die aangeven welke uitkomsten er verwacht worden. Maar zelfs wanneer we ervan uitgaan dat leerlingen iets horen te weten, kan het een goed idee zijn om als onderdeel van de overdrachtsfase te "controleren" wat ze daadwerkelijk onthouden hebben van eerdere lessen.

Een directe manier om deze voorkennis te controleren is om het de leerlingen te vragen, bijv.: Ken je de Stelling van Pythagoras nog? Hoewel je dan het risico hebt dat de leerlingen onwillig of bang zijn om toe te geven dat ze de stelling niet meer kennen. Sommige leerlingen zullen dit doen voor de docent, anderen zullen bang zijn "voor schut te staan". Een effectievere manier om het te vragen kan zijn: Wat weet je over rechthoekige driehoeken? Wanneer ze niet de verwachte kennis noemen, is het misschien handig als de docent een nieuw probleem behandelt voordat het geplande probleem en milieu uitgedeeld worden. Dit nieuwe probleem zou de leerlingen de kans moeten geven om de kennis die ze vergeten zijn op te halen, door de kennis te herhalen waarvan werd uitgegaan dat ze die zouden moeten beheersen, zodat ze hetzelfde startpunt hebben.

Een soortgelijk probleem kan ervaren worden in de actiefase: de leerlingen kunnen de overdracht verkeerd begrijpen. In het puzzelvoorbeeld hebben ze geen idee van alternatieven voor de additieve vergroting van de zijdelengtes van de vormen. Hoe een dergelijke uitdaging in de lessituatie overwonnen kan worden, is afhankelijk van hoeveel leerlingen niet in staat zijn om aan het probleem te werken en van hun algemene wiskundige prestaties. In deze situaties moet de docent nagedacht hebben over hoe het milieu georganiseerd kan worden. Het risico is dat de doelkennis die de leerlingen moeten vergaren al weggegeven wordt. In de puzzelsituatie kan de docent een formuleringsfase starten waarin de leerlingen hun voorlopige ideeën delen, en dan een tabel maken met de zijlengtes van de gegeven puzzel in één rij en de vergrote zijlengtes in de andere. Een cruciale vraag die naar voren kan komen en besproken wordt: Wat gebeurt er met een zijlengte van 1? Wordt het echt 1+3=4 na vergroting? Ervan uitgaan dat een zijde met lengte 4 bestaat uit vier delen met lengte 1 kan een aanwijzing zijn; aangezien vier vergrotingen van 1 samen een lengte van 7 zouden moeten vormen. Met zulke overwegingen, die zoveel mogelijk vanuit de leerlingen moeten komen, kunnen zelfs de leerlingen die eerst geen idee hadden toch in staat zijn om een andere aanpak te vinden bij het gegeven probleem. Dit betekent dat de fases dynamisch gebruikt kunnen worden, op een gecontroleerde manier. Afhankelijk van de betrokkenheid van de leerlingen bij het probleem en het milieu kan het redelijk zijn om vooruit of achteruit te gaan in de fases om er zeker van te zijn dat iedereen enige persoonlijke kennis bij het besproken probleem kan toepassen en opbouwen. Het samenspel tussen persoonlijke en gedeelde kennis is een cruciale dynamiek die gecontroleerd kan worden door een systematisch en gepland gebruik van de fases.

Een uitgebreider voorbeeld voor de middelbare school

In dit deel presenteren we een voorbeeld van een TDS-onderwijsontwerp met het leerdoel “het concept en een aantal methodes van optimalisatie introduceren”. Het probleem waar de leerlingen mee aan de slag gaan is:

> Je krijgt een koord van 1m lang. Dit koord moet in twee delen verdeeld worden. Eén stuk wordt gebruikt om een vierkant te maken en de andere om een gelijkzijdige driehoek te vormen. De vraag is; waar moet het koord doorgeknipt worden zodat de twee meetkundige vormen de minimale oppervlakte samen bedekken?

Het is een optimalisatieprobleem dat met verschillende strategieën kan worden aangepakt, afhankelijk van de voorkennis van de leerling. Sommigen zullen dit probleem kunnen aanpakken met het opstellen van functie en differentiëren; anderen zullen misschien verschillende mogelijkheden in een grafiek zetten en daar zo goed mogelijk een curve doorheen proberen te maken, misschien zelfs met behulp van regressie.

Het milieu bestaat uit het probleem, echte koorden (bijv. 5 koorden per groep leerlingen), een liniaal, scharen en misschien een rekenmachine of een computer. De docent begint de overdrachtsfase door de klas te vragen: “Wat weten jullie over oppervlaktes van meetkundige vormen?” De leerlingen herinneren hopelijk formules zoals de oppervlakte van een vierkant of een driehoek:

$A_{vierkant} = s^2$ (s is de lengte van de zijde),
$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2}hb$ (h is de hoogte en b is de basis)
$A_{\text{driehoek}} = \frac{1}{2}ab\sin C$ (waarbij a en b de lengtes van de zijdes grenzend aan hoekpunt C).

Andere vormen kunnen ook uiteraard ook aan de orde komen. Na het delen van deze institutionele kennis over oppervlaktes, worden de leerlingen in groepen verdeeld. Elke groep krijgt vijf koorden, een schaar, en een liniaal; ze mogen rekenmachines of computers gebruiken als ze daar behoefte aan hebben. De groepen krijgen nu het probleem uitgedeeld. Deze hele fase is een didactische situatie waarbij de docent de gespreksleider is in het klassengesprek.

In de actiefase beginnen de leerlingen aan het probleem. Hier kunnen een aantal strategieën gekozen worden en we zullen er drie noemen. Een aantal leerlingen zal een “proefondervindelijke” strategie kiezen, oftewel: het knippen van een koord, de twee vormen maken, meten en de oppervlakte van het vierkant en de driehoek berekenen. Hetzelfde koord kan gebruikt worden om twee paren van vormen te maken. Dan wordt het volgende koord geknipt, gevolgd door nieuwe metingen, etc. Uiteindelijk krijgen de leerlingen waarschijnlijk het idee waar de optimale knip (ongeveer) gezet moet worden gebaseerd op hun ervaringen. Andere groepen kunnen het idee krijgen om zulke metingen als data te gebruiken voor een grafiek. Dit kan weergegeven worden in een computerprogramma, grafische rekenmachine of uitgetekend met pen en papier. Als de knippunten goed gekozen wordt in het opzicht dat het hele koord gebruikt wordt inclusief de oppervlakte van het minimale punt, zal dit leiden tot een parabool. Als de datapunten in een computerprogramma getekend worden, kunnen de leerlingen een regressie uitvoeren om een formule bij een functie te krijgen die de data beschrijft. Als de leerlingen de juiste regressie uitgevoerd hebben, krijgen ze een formule bij de vorm

$$A_{totaal}(x) = ax^2 + bx + c,$$

waarbij A_{totaal} de oppervlakte is en x de lengte van één deel van het koord.

Als leerlingen weten dat de grafiek van A_{totaal} een parabool is en ze daar meer kennis over hebben, dan kunnen ze wellicht berekenen dat in dit geval de minst totale oppervlakte te vinden is bij $x_{min} = -\frac{b}{2a}$ gegeven is door

$$A_{totaal}(x_{min}) = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Sommige leerlingen zullen via differentiëren dit minimum vinden.

Andere groepen bepalen de functie A_{totaal} niet via de grafiek, maar direct algebraïsch uit het plaatje. Wanneer het 1m koord gelijk is aan 4 zijdes van het vierkant, *4s*, en drie zijdes van de driehoek, *3t*, dan krijgen we de vergelijking $1 = 4s + 3t$. Vervolgens kunnen de leerlingen de totale oppervlakte uitdrukken als

$$A_{totaal} = A_{vierkant} + A_{driehoek}$$

Opnieuw vinden ze een tweedegraads veelterm waarbij de minste waarde op dezelfde manieren gevonden kan worden als hierboven beschreven.

Deze fase is a-didactisch. De docent weerhoudt zich van het mengen in groepswerk, maar kan indien nodig assisteren in hoe de CAS-tool of rekenmachine gebruikt moet worden of met andere meer praktische problemen. Tegelijkertijd krijgt de docent inzicht in welke groepen welke strategie gekozen hebben of welke soort uitdagingen de groepen tegenkomen tijdens hun onderzoek. Dit concrete voorbeeld omvat het idee van een benadering met een open einde waarbij de leerlingen een probleem krijgen met mogelijk een hoeveelheid aan oplossingsstrategieën die allemaal naar één antwoord leiden.

Na de eerste korte fase worden leerlingen gevraagd om hun strategie voor het oplossen van het probleem te presenteren. Het verwoorden van hun acties helpt de leerlingen om explicieter te zijn over hun soms wat vage ideeën en hypotheses uit het onderzoeksproces. Het groepswerk kan gezien worden als de eerste formuleringsfase aangezien de leerlingen in elke groep het eens moeten zijn over strategieën of hypotheses om samen te kunnen werken. Verder kan de actie in groepen ertoe leiden dat groepsleden ideeën verwerpen en andere ideeën na gaan streven. Dit proces kan ook elementen van validatie behandelen. Vanaf de eerste ervaringen met het knippen, meten en berekenen van oppervlaktes kan het zijn dat leerlingen denken dat ze nu weten waar ze het koord moeten knippen. Maar een derde berekening kan misschien zelfs tot een nog groter oppervlakte leiden dan de eerste twee berekeningen. De groep dient dan hun strategie te herzien. In groepswerk kan het dus zijn dat alle a-didactische of potentieel a-didactische situaties plaatsgevonden hebben voordat de strategieën gedeeld worden met de andere groepen.

Wanneer leerlingen een eerste antwoord op het probleem gevonden hebben, dienen de groepen hun werk te presenteren aan de rest van de klas. Als eerste presentatie kunnen de groepen simpelweg gevraagd worden om de lengte te geven van elk van de stukken koord om te zien of iedereen het eens is met waar er geknipt is. Als de groepen het er niet mee eens zijn, zijn er zelfs nog meer redenen om hun eigen werk te presenteren en te luisteren naar de strategieën van andere groepen. Waarschijnlijk zal een aantal leerlingen zich realiseren dat een “proefondervindelijke” strategie minder goed werkt wanneer je streeft naar een exact antwoord, maar ook zien dat hun werk tot dusver gebruikt kan worden wanneer ze het omzetten naar een regressiestrategie.

Hier kan de formuleringsfase een overlap hebben met de validatiefase. Alle voorstellen over waar het touw door te knippen kunnen getest worden in het milieu. Voor elke voorgestelde lengte kan de totale oppervlakte van het vierkant en de driehoek berekend worden. Op deze manier kan het milieu de validatie ondersteunen om te onderzoeken welke groep de knip heeft voorgesteld van de kleinste oppervlakte. De uitdaging is om de leerlingen ook te betrekken in het bespreken van hun gekozen strategie. Vandaar dat de docent kan vragen of we er zeker van kunnen zijn dat er geen betere keuze voor een knip is. Dit betekent dat wanneer de klas geaccepteerd heeft dat de opdracht “proefondervindelijk” opgelost is, ze nu ook met exactere argumenten moeten komen.

Een uitdaging voor de leerlingen die regressie kiezen is om uit te vinden welke soort functie de situatie daadwerkelijk het best beschrijft. Als ze alleen gegevens hebben van boven of onder het maximale punt, verwachten ze misschien dat de relatie bijvoorbeeld lineair of exponentieel is. Om dit soort situaties te vermijden dient de leerlingen gevraagd te worden in welke mate deze relaties echt logisch zijn. Dit kan gezien worden als nieuwe overdracht van een iets ander probleem binnen hetzelfde milieu.

De optimale strategie kan niet gevalideerd worden door het te testen tegen het beschikbare milieu. Vandaar dat de docent een actievere rol speelt in dit deel van de validatie, maar het is nog steeds belangrijk dat de rest van de klas ook overtuigd is van de gepresenteerde strategie.

In de institutionaliseringsfase is het belangrijk dat de docent de ideeën en hun onderlinge verband benoemt. Bijvoorbeeld, leerlingen die eerst de proefondervindelijke methode kozen, deden hetzelfde als zij die een dataset produceerden. En zij die de data produceerden, vonden daadwerkelijk punten die in theorie zouden moeten liggen op de grafiek die de oppervlaktefunctie weergeeft. Wat de strategieën gemeen hebben is hoe de exacte waarde van de minste oppervlakte te vinden - het optimalisatieprobleem. In alle gevallen zijn de berekeningen niet eenvoudig, maar wel te doen. Dit creëert de behoefte om te praten over andere methodes voor optimalisatieproblemen, vooral in gevallen met hogere orde veeltermen.

Verdere voorbeelden van het toepassen van deze ideeën en andere principes om IBMT-modules te ontwerpen worden gegeven in andere MERIA-projectpublicaties (zie http://www.meria-project.eu/).

4. Realistisch Wiskundeonderwijs

Inleiding

We noemden het al in eerdere hoofdstukken, Artigue en Blomhøj (2013) tonen hoe een aantal gerenommeerde onderzoeksprogramma's in wiskundeonderwijs methodes en ideeën ontwikkeld hebben voor wat nu IBMT genoemd wordt. Realistisch Wiskundeonderwijs (Realistic Mathematics Education - RME) is één van de meest prominente, samen met TDS.

RME bestaat uit ideeën en principes voor het vormgeven van het leerproces. Dit hoofdstuk geeft een overzicht van de belangrijkste ideeën in RME, gericht op docenten en onderwijsontwerpers. Deze ideeën worden geïllustreerd met behulp van voorbeeldopdrachten. In deze tekst wordt de theorie van RME opgebouwd vanuit twee centrale principes.

(1) Wiskunde is een menselijke activiteit.

(2) Betekenisvolle wiskunde wordt opgebouwd uit rijke contexten.

In het laatste deel van de tekst beschrijven we het verband tussen RME-principes en Inquiry Based Mathematics Teaching (IBMT) en bespreken we RME-ideeën die kunnen helpen in het ontwerpen van IBMT-scenario’s.

Het structureren van wiskunde

Wiskundige *kennis* kan in hoge mate gestructureerd worden. RME beweert daarentegen dat het wiskundig *leerproces* een minder formele aanpak nodig heeft. In de formele aanpak begint men vanuit axioma’s, postulaten en definities, en daaruit worden lemma’s en stellingen afgeleid. Bewijzen stellen de waarheid van deze uitspraken vast binnen het axiomatisch kader. De traditie van het organiseren en presenteren van wiskundige resultaten op deze formele wijze loopt van Euclides (300 AD) tot het hedendaags wiskundeonderzoek. Wiskunde, gezien als gebouw waar axioma’s de fundering zijn en logica het cement, is indrukwekkend en effectief. De formele presentatie van de resultaten maakt ondubbelzinnige academische communicatie mogelijk. Geen wonder dat sommigen wiskundeonderwijs hierop gebaseerd hebben. In veel landen werd tot de jaren '50 meetkunde onderwezen vanuit De Elementen van Euclides. In de jaren '50 en '60 introduceerde de Nieuwe Wiskunde-beweging verzamelingenleer als een basis voor wiskunde in het middelbaar onderwijs.

Wiskunde als een menselijke activiteit

Zou dit zeer gestructureerde bouwwerk van wiskundige kennis de voornaamste inspiratie zijn voor hoe we wiskundeonderwijs vormgeven? RME heeft een ander perspectief. De leidende inspiratie is dat wiskunde *een menselijke activiteit* is. Het georganiseerde bouwwerk van wiskundige kennis is een product van deze activiteit. Een goede definitie van een wiskundig object is bijvoorbeeld vaak het resultaat van een lang proces van wiskundige gedachten, ideeën en pogingen. RME onderstreept het belang van deze processen die leiden tot de gepolijste versie van een wiskundig object of resultaat.

Men kan, in het eerste begin van een hoofdstuk over logaritmes, de logaritmische functie vaststellen als de inversie van de exponentiele functie. Een RME-aanpak zou eerder beginnen met een opdracht die de behoefte voor het concept toont. De oefening zou leerlingen de ruimte moeten geven om deze noodzaak voor een logaritmische functie zelf te ervaren. Hier is een basisidee.

Rogier stort 100 euro op de bank. De rente is 2%. Vul de tabel in.

Hoeveelheid (A)	100	$\approx 108{,}24$	$\approx 129{,}36$	$\approx 199{,}99$	$\approx 507{,}24$
Verstreken jaren (t)	0				

Ken je een functie om t uit A te berekenen?

Natuurlijk is het antwoord op de laatste vraag waarschijnlijk "nee", maar het is belangrijk voor leerlingen om deze vraag te stellen en zich te realiseren dat er behoefte is aan een nieuwe functie. Leerlingen zijn niet gewend aan dit soort vragen. Om deze reden kan de vraag misschien beter gesteld worden in een klassengesprek dat geleid wordt door de docent. Leerlingen kunnen onder andere komen op wortelfuncties en hebben hulp nodig om te ontdekken waarom dat niet juist is.

Anti-didactische inversie

Wiskunde presenteren aan een leerling in zijn zeer gestructureerde (op een axiomatisch systeem gebaseerde) versie is een *inversie*. De leerling wordt geconfronteerd met het resultaat van een (meestal) lang en lastig wiskundeproces. Als de leerling op deze manier wiskunde moet leren, dan is een leerproces een inversie van het proces dat leidde tot de wiskunde. Hij zal hard moeten werken (of wachten) om uit te vinden welke vragen geleid hebben tot deze wiskunde en welke problemen erdoor opgelost werden. De docent kan bewust gekozen hebben voor deze aanpak, maar RME stelt dat het geen didactische is: het is een *anti-didactische inversie* (Freudenthal, 1991).

Over het algemeen is een formele presentatie van wiskunde nogal ontoegankelijk voor beginnende leerlingen. Er zijn veel didactische argumenten tegen het confronteren van een leerling met wiskunde in zijn zeer gestructureerde, gepolijste vorm aan het begin van het leerproces:

- Het natuurlijke proces (geleid door vragen, problemen, nieuwsgierigheid, ...) van hoe er tot de wiskunde gekomen wordt, wordt niet getoond. Betekenis en motivatie worden van de leerling weggenomen.
- Intuïtie die tot de theorie leidt, staat ver van het leerproces.
- Het is niet duidelijk wat er opgelost, gemodelleerd of gevangen wordt in het systeem (en wat niet).

- De heuristieken die nodig waren om de wiskunde op die manier te organiseren worden genegeerd.
- De presentatie kan te compact of juist te uitgebreid zijn. Sommige aspecten van de te leren wiskundestof kunnen wellicht erg lastig te begrijpen zijn, maar toch slechts weinig nadruk krijgen in een formele presentatie.

Veel wiskundigen, waaronder wiskundedocenten, zullen zich herinneren dat ze geconfronteerd werden met de ε, δ-definitie van limieten in het eerste jaar van hun opleiding, of zelfs al op de middelbare school. Waarom was dit zo ontoegankelijk? Het is niet logisch voor een leerling als hij geen kennis heeft van problemen met grondige bewijsvoering die hun oorsprong hebben in de Analyse aan het begin van de 19e eeuw. Welk probleem lost het op? Waarom zoveel moeite om iets overduidelijks te bewijzen? Waarom werken andere definities niet?

Net als dat het zomaar behandelen van de distributieve wet “$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$” in middelbaar onderwijs, gevolgd door oefeningen zoals “Werk de haakjes weg: $5 \cdot (a + 2)$", formeel gezien een correcte volgorde is maar geen betekenis overbrengt op de leerling. Het beantwoordt ook niet de vraag waarom dit een nuttige regel of vaardigheid is.

De rol van het realisme in leerprocessen

Uiteraard is de (formele) betekenis van wiskundige objecten en procedures zorgvuldig en exact omschreven in formele wiskundige teksten en boeken. Aangezien teksten en boeken nogal ontoegankelijk kunnen zijn en niet didactisch voor een beginnend leerling, hoe kan er dan toch voor gezorgd worden dat deze wiskundige kennis betekenisvol overgedragen wordt?

Een leerproces wordt gevormd door een geheel aan leeractiviteiten. Eén van de belangrijkste ideeën van RME is dat de situaties waarop de activiteiten gebaseerd zijn *realistisch* moeten zijn. De betekenis van wiskundige concepten en procedures wordt opgebouwd uit wat al betekenis heeft voor de leerling, uit wat al reëel is voor de leerling.

Wat wordt er binnen RME bedoeld met “realistisch”? Iets is realistisch voor een leerling als het duidelijke betekenis voor hem heeft, als hij het kan bevatten. Iets is realistisch voor een groep leerlingen als het klinkt als gezond verstand voor ze. “realistisch” betekent niet (noodzakelijkerwijs) “gebaseerd op de werkelijkheid”, bijvoorbeeld gevormd op situaties uit andere disciplines, zoals natuurkunde of economie. Ook houdt een "realistische leersituatie” niet direct in dat het gebaseerd is op een ervaring uit het leven van alledag. En “realistisch” wordt zeker niet gezien als ontologisch: wat wel en wat niet bestaat. Eigenlijk is “betekenisvolle wiskunde” mogelijk een betere uitdrukking dan “realistische wiskunde”, maar het laatste is het gebruikte label zoals het in de vorige eeuw ontstond. Betekenisvolle wiskunde wordt geleerd door te starten vanuit wat al betekenisvol is voor de lerende, in het bijzonder vanuit betekenisvolle contexten.

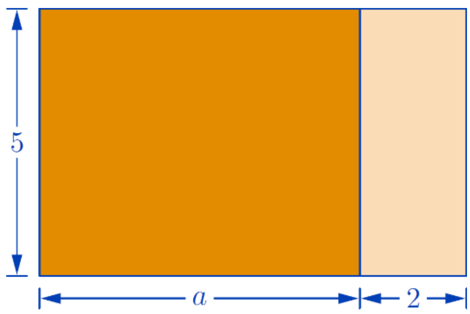
Zoals Freudenthal het zegt:

> *Hoe echt [de] concepten zijn, hangt af van de ontvanger, en onder bepaalde omstandigheden kan het cognitieve begrip sterker zijn dan het manuele en zintuigelijke begrip, wat in feite altijd verward wordt met kennis " en " (Wat echt is, is) wederzijds verbonden met werkelijke, verzonnen en symbolische relaties (...) wat uitgebreid kan worden van de kern van ervaringen uit het dagelijkse leven tot de verre grenzen van wiskundig onderzoek, afhankelijk van de betrokkenheid van de betrokkenen* (Freudenthal, 1991, p.30).

De distributieve wetten kunnen geïntroduceerd worden in een realistische, meetkundige context:
Bereken de oppervlakte van de gehele rechthoek op twee manieren:

(1) Eerst de donkere, dan de lichte rechthoek en tel dan beide bij elkaar op.
(2) Bereken eerst de gehele breedte en vermenigvuldig dan met de hoogte

(gebaseerd op *Van den Broek et al., n.d.*)



Waarom is dit een realistische(re) benadering? Er wordt vanuit gegaan dat de lerende bekend is met het berekenen van oppervlaktes. De betekenis van de gelijkheid komt op een natuurlijke manier naar voren doordat de uitkomsten van de twee berekeningen gelijk moeten zijn. Betekenis komt alleen door de opdracht naar voren. Het is aan de docent om de opdracht te introduceren, de leerlingen te begeleiden en klassikaal op de opdracht te reflecteren. Hij of zij moet de opgave op een juiste manier integreren in een leerproces. Later in deze tekst volgt meer over RME-visies hierop.

Rijke structuren en rijke contexten

Volgens RME komt nieuwe wiskundebetekenis voor een leerling niet voort uit het formele wiskundige bouwwerk, maar vooral uit wat betekenisvol is voor de leerling. De didactische situatie zou ruimte moeten bieden aan de ontwikkeling van nieuwe kennis uit wat al betekenis heeft. Dit betekent dat het rijk moet zijn aan niet-wiskundige contexten en in wiskundige structuren. Hier zijn mogelijke manieren waarop een wiskundige structuur of context rijk kan zijn:

(1) Het verbindt verschillende aspecten van het gezond verstand van de leerling - des te meer verbindingen, des te rijker de structuur;
(2) het gebruik ervan draagt wiskundig verder dan de situatie waarin het geïntroduceerd is;
(3) het geeft ruimte aan diverse benaderingen of oplossingen op meerdere niveaus.

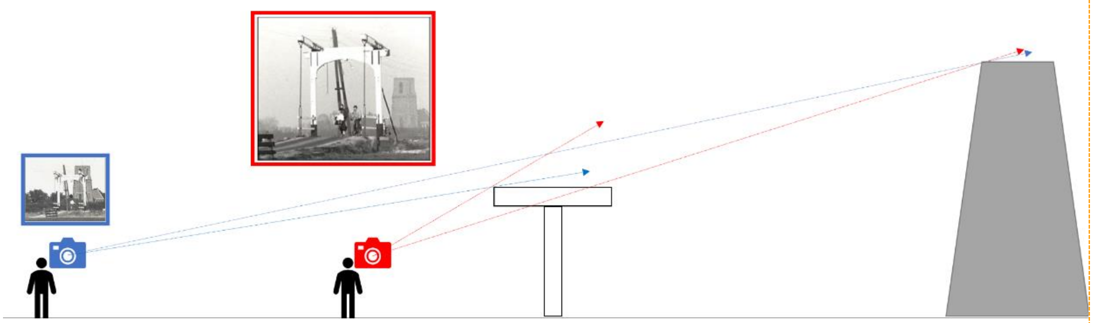
We zullen dit nu verder illustreren met concrete voorbeelden.

Punt (1) wordt geïllustreerd door de volgende 'De toren en de brug'-opdracht. Het werd gebruikt in een experiment als introductie van schaal en meetkundig redeneren in een 3D-context (Goddijn, 1979).

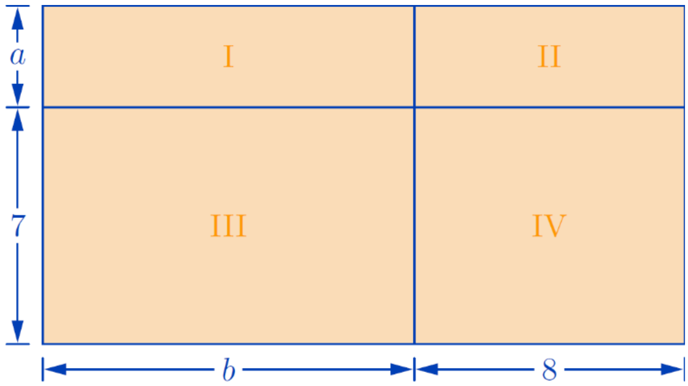
Hieronder zie je twee foto's van hetzelfde mooie Nederlandse landschap met een toren en een brug vanuit verschillende gezichtspunten. Wat is hoger: de toren of de brug?

Nederlandse schoolkinderen gaan overal heen op de fiets, zoals naar school. Ze zullen vast bruggen en torens als deze hebben gezien in relatieve posities. Met hun smartphones maken (en bewerken) ze dagelijks foto's. Bovendien heeft iedereen een aangeboren vaardigheid om zich taferelen vanuit meerdere perspectieven in te kunnen beelden. Dus deze situatie is op vele manieren realistisch te noemen. En nu wordt er van ze verlangd dat ze er op een wiskundige manier over na gaan denken. Ze zullen begrippen als gezichtspunten, projecties, zichtlijnen en schaal introduceren om de situatie te bespreken, wat het doel is van de opdracht.

Onderstaand Figuur vat een aantal van de wiskundige aspecten van het probleem samen. De foto's worden afgebeeld op een wat correctere relatieve schaal.



Punt (2) wordt weer geïllustreerd door het eerdergenoemde probleem van de rechthoek. Het is makkelijk te herschrijven voor opdrachten als: werk de haakjes uit bij $3 \cdot (x + y + 3)$, waarbij de rechthoek opgedeeld is in drie in plaats van twee. Het is ook van toepassing op $(a + 7)(b + 8)$, waar de rechthoek in vieren gedeeld wordt.



Dit wordt, in tegenstelling, soms uitgelegd aan de hand van een ander model dat niet tegemoet komt aan punt (2). Dat tweede model wordt een "papegaaienbek" genoemd en wordt zo weergegeven:

$$(a + 7)(b + 8) = a\,b + 8a + 7b + 56$$

Zodra je twee termen met elkaar vermenigvuldigt, trek je een lijn ertussen. Als je het goed doet, ontstaat de papegaaienbek. Dit model is een ezelsbruggetje en biedt geen begrip van wat er gebeurt. Het voldoet niet aan (2) aangezien je alleen een papegaaienbek krijgt bij het uitwerken van $(a + c)(b + d)$, niet met $(a + c)(b + d + e)$, of complexere uitdrukkingen.

Als de nadruk ligt op de formele weergave van wiskunde als een inspiratie voor onderwijs, dan is het een natuurlijke keuze om te beginnen met de wiskundige objecten met de minste structuur. Op deze manier bouw je wiskundige kennis op vanaf de fundamentele begrippen. Geometrie zou beginnen met axioma's op punten en lijnen. Analyse zou beginnen met reeksen, natuurlijke getallen tot reële getallen, dan functies, et cetera. Een dergelijke aanpak werd gebruikt tijdens de Nieuwe Wiskunde in de jaren '60, maar dit is een andere belichaming van de anti-didactische inversie. Het merendeel van deze structuren zijn het eindpunt van een abstractieproces, "verarming" en reorganisatie van wiskundige kennis. Volgens RME is het leerzamer voor de leerlingen om zelf dit proces te doorlopen.

Punt (3) kan door de volgende oefening geïllustreerd worden. Direct nadat substitutie (van getallen) voor variabelen geïntroduceerd is, kan men verder gaan met het oplossen van vergelijkingen.
Vind oplossingen voor:

$$2x = 8$$
$$7 + x = 15$$
$$x^2 = 25$$
$$x + 8 = 2x + 2$$
$$(x + 2)^2 = 16$$

Deze lijst zou veel langer moeten zijn; des te meer variatie in de vergelijkingen, des te rijker de opdracht. Zonder eerder oplossingsmethodes geleerd te hebben, zal het succes van de leerlingen variëren. Ze zullen ook meerdere soorten redenatie toepassen. Met deze oefening kan de docent ontdekken wat een natuurlijke aanpak is voor de leerlingen en dit in een later stadium gebruiken, wanneer formele oplossingen besproken worden. De docenten leren hierdoor meer over de verschillen tussen de leerlingen.

Mathematiseren

RME stimuleert wiskunde als een menselijke activiteit. Freudenthal noemt één van de belangrijkste onderdelen van deze activiteit *mathematiseren*:

> *Mathematiseren is de gehele organiserende activiteit van de wiskundige, of het nou de wiskundige inhoud en uitdrukking betreft, of eenvoudiger, intuïtief, zogezegd levenservaring, uitgedrukt in alledaags taalgebruik... (Het doel is) het bieden van niet-wiskundige, rijke structuren om de leerling bekend te maken met het ontdekken van structuur, structureren, verarmen van structuren en mathematiseren. Op deze manier ontdekt hij misschien de krachtige, arme structuren in de context van de rijke, in de hoop dat ze met deze aanpak ook zo werken in andere (wiskundige en niet-wiskundige) contexten. Beginnen met arme wiskundige structuren kan betekenen dat iemand nooit de rijke niet-wiskundige structuren bereikt die eigenlijk het uiteindelijke doel zijn.* (Freudenthal, 1991, p.31 en p.41)

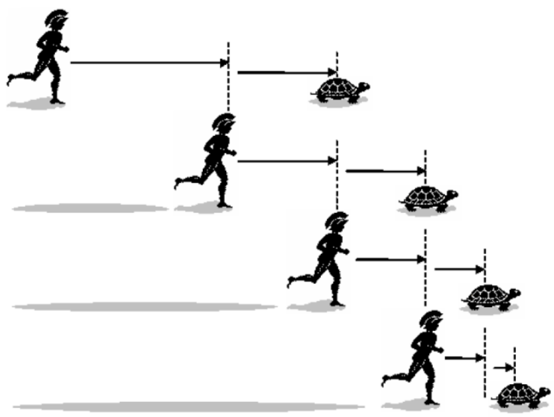
Mathematiseren omvat: axiomatiseren (het creëren van een axiomatisch wiskundig systeem), formaliseren (de transitie van een intuïtief naar een formele aanpak), schematiseren (het vormen van betekenisvolle netwerken van concepten en processen), algorithmiseren (de transitie van het oplossen van een probleem door hard te werken tot het oplossen op routine), modelleren (bouwen van schema’s die representeren, idealiseren, andere schema's vereenvoudigen), et cetera.

Er kan een onderscheid gemaakt worden tussen twee richtingen in mathematiseren; horizontaal en verticaal (Treffers,1987). Horizontale mathematiseren is de transitie/vertaling van een probleem of situatie naar een wiskundige discours. Het geeft ruimte aan de *wiskundige* behandeling of discussie van de situatie. Verticale mathematiseren is mathematiseren binnen een wiskundig discours.

Zodra men vragen stelt (en beantwoordt) over een situatie in termen van kwantiteit, afstanden, vorm, symmetrie, volgorde, waarschijnlijkheid of andere soorten structuur bestudeerd met wiskunde, vindt horizontale mathematiseren plaats. Leerlingen zouden beide soorten mathematiseren moeten beoefenen. Als het horizontale deel verwaarloosd is, dan verliest de leerling de connectie tussen wiskundige kennis en de situatie waarin het toegepast wordt. Als het verticale proces verwaarloosd wordt, mist de leerling de kans om de diepe connecties binnen wiskunde te vormen, het formele systeem te bouwen en meer inzicht te krijgen.

Deze taak is onderdeel van lesmateriaal over discrete modellen voor 16/17-jarigen. Het doel van deze taak is om de modelleervaardigheden te trainen met reeksen, om somreeksen te oefenen, en meetkundige series te introduceren. Het begint bij het introduceren van de beroemde paradox van Achilles en de schildpad. Veel leerlingen zijn hier bekend mee, maar ze kunnen eenvoudig in de problemen komen wanneer ze het proberen de paradox te ontrafelen of ontkrachten (bijv. in een klassengesprek).

Achilles en de schildpad hebben een hardloopwedstrijd. Aangezien Achilles sneller is, krijgt de schildpad een voorsprong. Elke keer dat Achilles echter de plek bereikt waar de schildpad een moment eerder nog was, is de schildpad alweer een beetje verder gelopen. Op deze manier kan Achilles de schildpad nooit inhalen en wint de schildpad de race. Waar gaat het mis in deze redenatie? Hoe kunnen we de paradox oplossen met wiskundige redenatie?



De leerlingen worden dan uitgedaagd de situatie vorm te geven (als een wiskundige reeks). Dit leidt natuurlijk tot vragen over de rol van tijd en afstand als variabelen.

Een mogelijk antwoord begint met een aantal aannames, zoals: de voorsprong is 1, de snelheid van Achilles is 1 en de snelheid van de schildpad is 1/2. Dan wordt de afstand tussen de momenten dat Achilles de vorige positie van de schildpad bereikt nagebootst met een reeks.

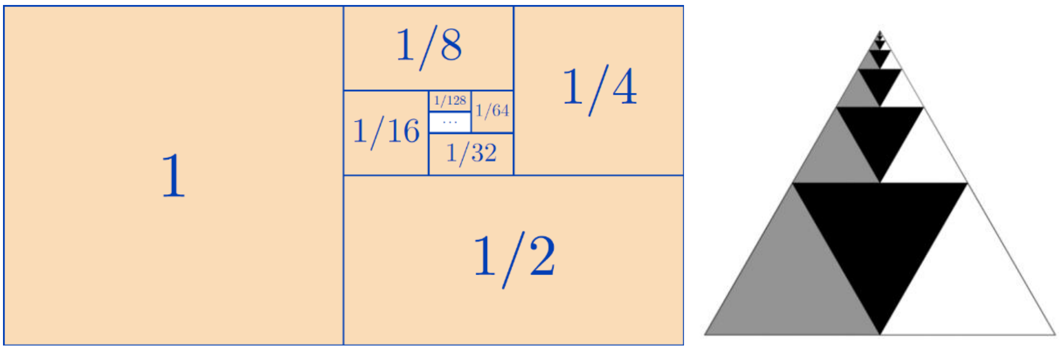
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

De totale afstand afgelegd door Achilles en de hoeveelheid verstreken tijd op elk van die momenten worden vormgegeven met een reeks.

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \dots$$

Maar hoe gaan we om met oneindige reeksen? Als je een oneindig aantal cijfers optelt, is de uitkomst dan niet oneindig? Dit is de kern van de paradox! Het antwoord ligt in de meetkundige reeks, wat een belangrijk leerdoel is van de opdracht.

In een vervolgopdracht bestuderen de leerlingen de afbeelding:



Informele redenatie bij deze afbeelding geeft de leerling de kans om de meetkundige reeks te berekenen om de paradox op te lossen.

Dan volgt een proces van verticaal mathematiseren, de leerling wordt uitgedaagd om eenzelfde resultaat te vinden voor de rechterafbeelding en dan te formaliseren en generaliseren wat er visueel getoond wordt in deze afbeeldingen

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Het vinden van de uitdrukking $\frac{1}{1-x}$ is een grote uitdaging.

Na het toepassen van dit resultaat op andere intrigerende situaties, zoals $0{,}9999 \ldots = 1$ (een mooi voorbeeld van een wiskundige context), zou het belang voor leerlingen in het vinden van bewijs gestimuleerd moeten worden. In het bewijs worden pseudo-formele technieken gebruikt.

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots - x - x^2 - x^3 + \cdots = 1.$$

Later kan dit in notatie verder geformaliseerd worden door grenzen en $\sum$-notatie aan te geven.

Deze schets van een leerscenario toont voorbeelden van modelleren en formaliseren beginnend vanuit de rijke context van een beroemde paradox en toegankelijke afbeeldingen. Let op de volgorde van de activiteiten; de leerling wordt geleid naar het formelere resultaat door het bestuderen van concrete contexten.

Horizontale verwiskundiging vanuit rijke contexten om verbanden te leggen met de realiteit

RME vindt de banden van wiskunde met de realiteit zeer belangrijk. Zoals Freudenthal (1991, p. 81) het stelt:

> *De wereld is lawaaiig; de mathematisering van de wereld betekent het zoeken naar hoofdzaken, het aanvoelen van de boodschap in het geluid.* Dit dient ook geleerd te worden, dat is, opnieuw uitgevonden te worden door de leerling, en des te eerder, des te beter; zodra de leerling volledig geïndoctrineerd is door kant-en-klare schema's en algoritmes, kan het te laat zijn.

Naast "wiskunde als een menselijke activiteit", is "banden met de realiteit" één van de belangrijkste aandachtspunten van RME. Om deze banden te stimuleren zouden leeractiviteiten een voldoende (niet-wiskundige) rijke context moeten bevatten. Eerder in dit hoofdstuk hebben we rijke contexten besproken. Laten we hier verder op ingaan met een paar voorstellen. Elke suggestie zou natuurlijk moeten voldoen aan de eerdergenoemde criteria voor rijkdom.

a) Een locatie, bijvoorbeeld een voorraadruimte of een muziekfestival
b) Een verhaal, zoals de hierboven beschreven paradox van Achilles en de schildpad.
c) Een menselijke activiteit, bijvoorbeeld het ontwerpen van een huis, of het besturen van een vliegtuig.
d) Nieuws of een historische gebeurtenis, bijvoorbeeld statistische beweringen in een krant.

De volgende oefening komt uit *De Wageningse Methode (Van den Broek et al., n.d).* Het is onderdeel van een hoofdstuk over matrices. Een groot deel van het hoofdstuk draait rond de rijke context van een autoverkoopbedrijf. Het heeft een hoofdkantoor en een filiaal. Het verkoopt auto's van type A, B en C. De autovoorraad is weergegeven in een matrix S

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{r} Hoofdkantoor \\ Filiaal \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

In vorige oefeningen hebben leerlingen matrices toegevoegd om de voorraad aan te passen. Nu wordt een waarde-matrix V geïntroduceerd (in duizenden euro's).

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccc} verkoop & kosten & winst \end{array} \\ \begin{array}{r} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 30 & 28 & 2 \\ 20 & 17 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

De totale verkoopwaarde van de auto's in het hoofdkwartier is

$$15 \cdot 12 + 13 \cdot 30 + 7 \cdot 20 = 710 \text{ (duizend euro)}.$$

a) Bereken de totale verkoopwaarde van de auto's in het filiaal.
b) Bereken de totale kosten van de auto's in het hoofdkwartier. En in het filiaal.
c) Bereken de totale winst van de auto's in het hoofdkwartier. En in het filiaal.

d) Gebruik de totalen die je gevonden hebt in a), b) en c) om een matrix met de totalen in te vullen T

$$\begin{array}{ccc} & verkoop & kosten & winst \\ Hoofdkwartier & \left(\cdot \right. & \cdot & \left. \cdot \right) \\ Filiaal & \left(\cdot \right. & \cdot & \left. \cdot \right) \end{array}$$

Dan volgt een verklaring dat wat men gedaan heeft eigenlijk een soort multiplicatieve methode is voor matrices $S \cdot V = T$, en T wordt omschreven als de productmatrix. Het voordeel van deze aanpak is dat de handelingen die uitgevoerd worden voor matrixvermenigvuldiging natuurlijk komen en op een betekenisvolle manier; dankzij een goed gekozen context.

Emergente modellen

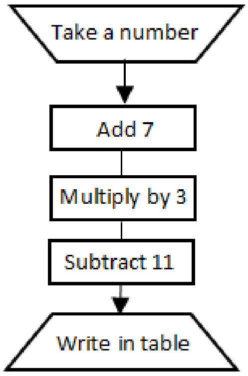
Dus hoe ontwikkeld een leerling formelere wiskundige kennis volgens RME? In werk van Streefland (1985), Treffers (1987) en, later, Gravemeijer (1994) wordt een speciale rol toebedeeld aan *modellen,* en hoe die opkomen in het gedachteproces van leerlingen. In hun werk zijn modellen mentale schema's van concepten en processen die verband houden met een situatie. Uit horizontale mathematiseren komt een model *van* een situatie naar voren (dit noemen we "emergentie"). Dit model vertegenwoordigt de informele wiskundige activiteit van de lerende met betrekking tot de situatie. Het geeft betekenis aan de situatie. Vanuit hier kan een proces van verticaal mathematiseren plaatsvinden, het bouwen van een (abstracter) wiskundig object uit een concept, of een algoritme van een proces. Het nieuwe model is een formelere. Na één of meer van zulke stappen is het niet een model *van* een specifieke situatie, maar een model *voor* een klasse van situaties die een wiskundige activiteit in staat stelt zonder referentie aan de situatie die leidde tot dit model. Wanneer nodig kan er wel betekenis gegeven worden aan het abstracte model door het via de tussenliggende modellen te koppelen aan het originele model. Dit is één van de redenen waarom RME het liefst werkt met modellen die verder dragen dan de situatie waarin ze opkomen (zie punt (2) over rijke oefeningen).

De geleidelijke emergentie van een formeel model kan zich uitbreiden over een lange periode van onderwijs. Laten we naar het voorbeeld kijken van de opkomst van het concept van een *functie* (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon & Reed, 2012). Als startpunt nemen we dat de leerling bekend is met het concept van een variabele, waaronder substitutie van een waarde voor een variabele. Oefening voor 12-jarigen (aangepast uit *De Wageningse Methode,* zie Van den Broek et al., n.d.):

Kijk naar het schema rechts.
Zet de tabel op met de getallen 1, 2, 3, 4, 5 en 10.

Sam komt op een uitkomst van 10. Wat was zijn startgetal?

En bij 343?



Deze informele activiteit zal later uitgroeien tot het gebruik van formules om het pijlenschema vorm te geven. Leerlingen zullen werken met dergelijke rekenkundige schema's en formules en deze zullen geleidelijk aan een realiteit vormen voor de lerende.

Op een bepaald punt worden nieuwe basisfuncties toegevoegd: de sinus, cosinus en tangens, gemarkeerd $\sin(x)$, etc. Leerlingen leren niet hoe de berekening hiervan iutgevoerd wordt (dat doet de rekenmachine), maar slechts wat hun meetkundige betekenis is. Dit is een belangrijke verschuiving in perspectief. De volgende stap is dat in analogie een nieuwe notatie erbij komt: $f(x)$, waarbij f een computationeel schema weergeeft. Op dit punt wordt het computationele schema zelf een object. Leerlingen zullen de eigenschappen van het object moeten bestuderen, zoals het domein of de afgeleide. Maar het concept van functie wordt geïntroduceerd gebaseerd op een transformatie van modellen: een model *voor* het concept van functie, gebaseerd op modellen van functies, en niet gebaseerd op een definitie. Een werkelijk formele definitie van een functie wordt bereikt volgens een compleet ander pad: verzamelingenleer!

Begeleide heruitvinding (guided reinvention)

Een horizontaal mathematiseren-activiteit stelt een situatie, of een klasse van situaties, open voor een wiskundige verhandeling. Door verticaal mathematiseren worden modellen van informele wiskundige activiteit geleidelijk getransformeerd in modellen die formele wiskundige kennis vertegenwoordigen. Je kunt zeggen dat op deze manier de formele wiskunde *opnieuw uitgevonden* wordt door de lerende. Dit proces kan in vele gevallen niet hetzelfde zijn als de oorspronkelijke uitvinding. De manier waarop een professionele wiskundige tot een resultaat komt, maakt gebruik van motivatie en kennis die niet beschikbaar is voor een leerling. De uitdaging voor de RME-docent is om een proces te faciliteren dat geschikt is voor de leerling. Het proces moet *begeleid* worden. Zoals beschreven staat in Freudenthal (1991) "Uitvindingen, zoals deze, zijn stappen in leerprocessen die verklaard worden door de "her" in heruitvinding, terwijl naar de instructieomgeving van het leerproces verwezen wordt door het bijvoeglijke naamwoord "begeleide". In aanvulling op eerder genoemde punten kunnen de volgende argumenten toegevoegd worden ten gunste van begeleide heruitvinding (Freudental, 1991):

1. Kennis en vaardigheid, wanneer verkregen door iemands eigen activiteit, blijven beter hangen en zijn sneller beschikbaar dan wanneer het opgelegd is door anderen.
2. De ontdekkingstocht kan aangenaam zijn en zo kan leren door dingen opnieuw uit te vinden motiverend werken.
3. Het koestert de ervaring van wiskunde als een menselijke activiteit.
4. Het verzekert dat de wiskundige aanpak past bij het niveau van de leerling.

Het principe van de heruitvinding zou in het perspectief geplaatst moeten worden van de belangrijkste bewering van RME waarmee we deze discussie begonnen: dat wiskundeonderwijs niet slechts gaat over de kern van wiskundige kennis, maar ook over het leren mathematiseren. Daarom wordt het proces van het opnieuw uitvinden net zo gewaardeerd als de uitkomst.

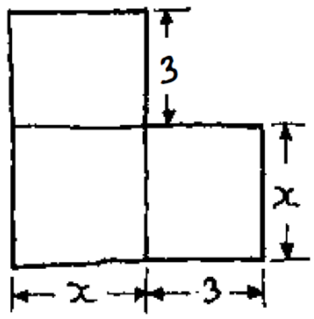
Het begeleiden naar uitvindingen

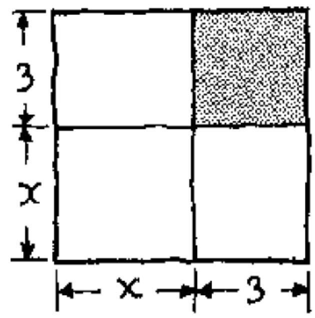
Hoe kun je leerlingen het beste begeleiden naar hun heruitvinding? “Begeleiden betekent een delicate balans vinden tussen de kracht van het lesgeven en de vrijheid van leren” (Freudenthal, 1991). De begeleide activiteiten zouden het horizontaal en verticaal mathematiseren moeten stimuleren. Het doel moet zijn dat de leerlingen zelf oplossingen produceren bij de problemen, en misschien zelfs nieuwe problemen produceren.

De instructie van de docent zou gesprekken tussen de leerlingen onderling moeten stimuleren, net als tussen de leerlingen en de docent. Gesprekken tussen leerlingen bieden hen de mogelijkheid om ideeën te testen, focussen en herformuleren zonder dat een docent ze naar een gewenste uitkomst leidt. Niet alle leerlingen zullen op hetzelfde tempo mathematiseren en uitvinden. Discussies helpen leerlingen om hun ideeën onderling uit te lijnen.

Als de docent betrokken is in de discussie, dan hebben leerlingen baat bij zijn pogingen om in hun redenatie mee te gaan om hen te helpen in te zien waar het misschien toe kan leiden. De reden hiervoor is dat de eigen benaderingen van de leerlingen gebaseerd zijn op wat betekenisvol is voor hen. Als de docent deze methodes kan begeleiden naar een aanvaardbare oplossing, dan vergroot dat de kans dat de leerling de oplossing begrijpt.

Deze aangepaste oefening uit *De Wageningse Methode* (Van den Broek et al., n.d.) richt zich op een heruitvinding van de methode *voltooien van het vierkant.* In de rechterafbeelding is de L-vorm voltooid tot een vierkant.





a) Schrijf een uitdrukking in x voor de oppervlakte van de L-vorm in de linkerafbeelding.
b) Wat is de oppervlakte van het grijze vierkant?
c) Wat is de lengte van de zijde van het grote vierkant?
d) Leg uit hoe (a) en (b) leiden tot de gelijkheid $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
e) Controleer de gelijkheid door de haakjes in de juiste uitdrukking uit te breiden.
f) Schets een L-vorm met oppervlakte $x^2 + 10x$.
g) Welke gelijkheid kun je afleiden van deze L-vorm?

Deze oefening wordt herhaald met verschillende getallen (wat ook fracties introduceert), maar laat de keuze van het tekenen van een L-vorm aan de leerling. De belangrijke observatie hier is dat de heruitvinding van het algoritme aan de leerling wordt gelaten. Het is de bedoeling dat de leerling het algoritme berekent.

De eigen uitvinding van een leerling (zoals een concept, algoritme, model, of een manier om een probleem op te lossen) is misschien niet de meest efficiënte of mooie. Het kan verschillen van dat wat de docent in gedachten had als een gewenste leeropbrengst. Aan het eind van een activiteit met heruitvinding zou de docent kunnen proberen een gezamenlijke uitkomst te formuleren in een klassendiscussie. De docent zou erop moeten letten dat de uitkomst gekoppeld wordt aan de bijdragen van de leerlingen.

RME en IBMT

Wat is de gemeenschappelijke factor tussen RME en IBMT? Het belangrijkste concept van IBMT is *onderzoek*: een proces zoals wiskundigen en wetenschappers werken wanneer ze geconfronteerd worden met een nieuw fenomeen.

> *Vele alledaagse fenomenen kunnen worden beschreven, onderzocht en begrepen met behulp van wiskunde in combinatie met wetenschap of gezond verstand, en zijn vandaar een rijke bron voor IBMT*[2]*...(*Artigue & Blomhøj, 2013*)*

[2]In dit boekwerk gebruiken we de term IBMT, waar Artigue en Blomhøj IBME gebruiken.

RME en IBMT hebben een aantal uitgangspunten gemeen. Beide theorieën beschrijven hoe alledaagse situaties een rijke bron voor leren vormen. Ze bepleiten kennisconstructie met methodes die geïnspireerd zijn door wetenschap en kennisconstructie: onderzoek, ontdekken of (her)uitvinding. Zowel IBMT als RME beschrijft deze processen als sociaal: leerlingen werken samen om kennis te herontdekken en reconstrueren. RME benadrukt dat herontdekking anders zal zijn dan uitvinding, aangezien de startkennis voor een gespecialiseerde onderzoeker en voor een beginnende leerling zeer verschillend zijn.
In aanvulling op traditionele rollen verwerft de docent een nieuwe rol in RME en IBMT, hij is een facilitator en een gids van onderzoek en mathematisering. De leerlingen en hun ideeën spelen een centrale rol. De docent helpt om de informele benaderingen van de leerlingen te formaliseren, zoals eerder besproken.
RME en IBMT zien de bekwaamheid in onderzoek en mathematiseren als *leerdoelen*, in aanvulling op domeinkennis. Dit is een belangrijke verschuiving van benaderingen die puur op domeinkennis gericht zijn.

RME-structuur voor IBMT-modules

We hebben diverse aspecten van RME besproken, met verschillende voorbeeldopdrachten. Als afsluiting schetsen we een overzicht van hoe taken samengeweven kunnen worden in een leertraject, bijvoorbeeld een module.

1. Een inleiding: geef een context met een relatief open probleem (kan aan de leerlingen gelaten worden om te ontdekken of formuleren). Dit probleem zal overkoepelend zijn voor de hele module. Het zal op verschillende wiskundige manieren behandeld worden.
2. Een fase van horizontaal mathematiseren: wiskundige taal wordt geïntroduceerd om de situatie te kunnen bespreken. De leerlingen vormen een eerste informele situatieschets.
3. Een fase van verticaal mathematiseren: de wiskunde bij het probleem wordt verder ontwikkeld. Het model wordt abstracter gemaakt, algemener.
4. Conclusie en reflectie: de leerling reflecteert op het gehele proces, integreert ideeën, verduidelijkt opgedane metacognitieve vaardigheden. De leerlingen delen hun bevindingen, de docent begeleidt en legt de nadruk op belangrijke leerpunten.

In elke fase zijn er onderzoekselementen: de ontdekking en/of formulering van het probleem, het vormen van een eerste informeel model, abstraheren, delen van bevindingen. De uitdagingen in het toepassen van deze ideeën en andere principes om IBMT-modules te ontwerpen worden besproken in andere MERIA-projectpublicaties (zie http://www.meria-project.eu).

Bibliografie

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38. http://dx.doi.org/10.1080/01411920500401971 .

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08*, pp. 7-16. Kopenhagen, Denemarken.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. uit http://www.fibonacci-project.eu

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, pp. 797-810.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39, 365–382

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education*, chap. 8, pp. 249-272. Springer International Publishing.

Bass, J. E., Contant, T. L., & Carin, A. A. (2009). Teaching Science for Understanding: The 5-E Model of Instruction. *Teaching science as inquiry*, chap. 4, pp. 87-95. Allyn & Bacon/Pearson.

Blanchard, S., V. Freiman & N. Lirrete-Pitre (2010). Strategies used by elementary schoolchildren solving robotics-based complex tasks: Innovative potential of technology. *Procedia-Social and Behavioral Sciences 2*(2). 2851-2857. http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.427 .

Blomhøj, M. (2004), Mathematical modeling – a theory for practice. In B. Clarke, D. Clark, D. Lambdin, F. Lester, G Emanuelsson, B. Johansson, A. Walbym & K. Walby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics*, pp. 145-160. Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Blum, V. & Borremero Ferri, R. (2007). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, pp. 45-58.

Blum, W. / Leiß, D. (2006). „Filling up" – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In: Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol

Bosch, M. & Winsløw, C. (2016) Linking problem solving and learning contents: the challenges of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35 (3), pp. 333-374.

Brousseau G. (1981a) Problemes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1) 37–127

Brousseau G. (1981b) *Le cas de Gaël*. Bordeaux: IREM de Bordeaux

Brousseau G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de le IIIe école d'été de didactiques des mathématiques* (pp. 99–108). Grenoble: IMAG.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970 – 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45(6), 811-822.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 39, 395–403.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 173-187. Springer International Publishing.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.

Doerr, H., & Ärlebäck, J. B. (2015, februari). Fostering students' independence in modelling activities. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Praag, Tsjechische Republiek. pp. 855-861.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0

Doorman, M., Jonker, V. & Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. University of Education Freiburg.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 837-849.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 1, pp. 87-101.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Furtak, E.M., Seidel, T., Iverson, H., & Briggs, D.C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching a meta-analysis. *Review of*

Educational Research 82(3). 300-329. http://dx.doi.org/10.3102/0034654312457206.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.

Goddijn, A. (1979). De weerbarstigheid van klein en groot [The stubbornness of small and large]. *Wiskrant, 17*, 1-4.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., & Contreras, J.M. (2015) Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Praag, Tsjechische Republiek. pp. 2642-2648.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of 800+ Meta-analyses on Achievement*. Routledge, Abingdon. http://dx.doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8.

Hattie, J. & H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research 77*(1). 81-112. http://dx.doi.org/10.3102/003465430298487 .

Hiebert, J, Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., & Murray, H. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, (25), 4, pp. 12-21.

Hofstein, A. & Lunetta, V.N. (2004). The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century. *Science Education 88*(1). 28-54. http://dx.doi.org/10.1002/sce.10106 .

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. In *Proceedings of PME XI*, Montreal.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (19082008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272

Maaß, K. & Artigue, M. (2013) Implementation of iquiry-based learning in day-today teaching: a synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45 , pp. 779-795.

Maaß, K. & Doorman, L.M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45 (6), 887-89.

Maaß, K. (2013). PRIMAS report on the results of the internal evaluation. http://www.primas-project.eu/artikel/en/1247/Reports+and+deliverables/

Minner, D.D., Levy, A.J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching 47*(4). 474-496. http://dx.doi.org/10.1002/tea.20347.

Miyakawa,T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), pp. 199–218.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, Washington D.C.

http://www.k12.wa.us/CoreStandards/Mathematics/pubdocs/CCSSI_MathStandards.pdf

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T, Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T, Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M & Nissen, K. (2002). Competencies and mathematical learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Kopenhagen: Ministerie van Onderwijs. Uit http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ_MN_KOM_in_english.pdf.

OECD (2016a). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2016b). *PISA 2015 Results (Volume II): Policies and Practices for Successful Schools*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264267510-en .

OECD (2016c), *Ten Questions for Mathematics Teachers ... and how PISA can help answer them*. PISA, OECD Publishing, Parijs. http://dx.doi.org/10.1787/9789264265387-en .

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007) L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherché, Science, économie et société.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussel: Europese Commissie.

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S. & Köller, O. (2016). A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE. (Resources for Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education, ASSISTME). Uit http://assistme.ku.dk/pdf-uploads/D2.5.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* pp. 334–370. New York: MacMillan Publishing Company.

Singer, F.M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics,* 83, 1, pp. 17.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as a source]. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant), 5*(1), 60-67.

Swan, M., Pead, D., Doorman, L.M. & Mooldijk, A.H. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry based learning. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* 45 (7), 945-957.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Van den Broek, L., Van den Hombergh, D., Van Smaalen, D., Van Haandel, M., Geurtz, T., & Reuling, H. (n.d.). *De Wageningse Methode*. In Nederlands. Uit https://www.wageningse-methode.nl

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* [Didactical elements – an introduction to the didactics of mathematics and science]. Kopenhagen: Biofolia.

Woolnough, B. E. (1991). Setting the scene. In: B. E. Woolnough (ed.). *Practical Science*. Open University Press, Milton Keynes, pp. 3-9.

Bijlage. Een overzicht van belangrijke referenties: suggesties voor verdere literatuur bij het MERIA-project.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45,* (6), pp. 797-810.
Het werk beargumenteert hoe IBE/IBME leerlingen uitnodigt om "op dezelfde manier te werk te gaan als wiskundigen en wetenschappers". Ze beginnen door Dewey voor te stellen als een filosoof die ernaar streeft om het onderscheid tussen weten en doen te overbruggen door menselijk gedrag te zien als reflectief onderzoek. Ze beschrijven verder door wie Dewey geïnspireerd werd. Ze geven elementen van de onderzoekspraktijk die cruciaal lijken: reflectief onderzoek combineert inductie en deductie, processen die te maken hebben met het alledaagse leven en wetenschappelijke activiteit, praktijkgerichte activiteiten en dat IBE de gewoontes in het gedachtenproces van leerlingen zou moeten ontwikkelen in de richting van die onderliggende onderzoeksprocessen. De beschrijvingen van onderzoek uit de PRIMAS- en Fibonacci-projecten worden bediscussieerd en hoe zij verband houden met het idee van progressieve ontwikkeling van "grote ideeën". De migratie van IBE naar wiskundeonderwijs wordt besproken in relatie tot Polya's "How to solve it" en recentere theorieën en benaderingen van wiskundeonderwijs. Hierna worden deze theorieën en benaderingen kort weergegeven en hoe zij verband houden tot IBE. De besproken benaderingen zijn: de probleemoplossende traditie, de Theorie van Didactische Situaties, Realistisch Wiskundeonderwijs, Modelleerperspectieven (uit Wiskundige Competentieleer), de Antropologische Leer van Didactiek en de Dialogische en kritische benaderingen. Gedurende de opsomming beargumenteren de auteurs dat docenten ervaring moeten hebben en zelf onderzoek uit moeten voeren in wiskunde om onderzoekend les te kunnen geven en het wordt geopperd om te variëren tussen "onderzoek door de docent en onderzoek in onderwijs" en bij dat laatste lijkt een behoorlijke samenwerking tussen docenten onderling nodig te zijn voordat IBME in de les gerealiseerd kan worden. Als slotopmerking noemen de auteurs tien zorgen, die meegenomen zouden moeten worden in het werken met IBME en die besproken worden met een ander gewicht voor elke zorg wanneer het onderwijs ontworpen is gebaseerd op de bestaande benaderingen binnen wiskundeonderwijs wat eerder in dit werk weergegeven is.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education, *Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*. Uit http://www.fibonacci-project.eu
Dit deel van het boek uit het Fibonacci-project beschrijft eerdere en huidige pogingen om wiskunde te onderwijzen gebaseerd op onderzoekend leren. Het Fibonacci-project gaat verder op een aantal van de ideeën van het Duitse SINUS, wat kenmerken onderscheidde die betrokken zijn bij onderzoeksprocessen in

wiskundeonderwijs. Het eerste deel van de sectie in het boek legt uit welke uit de literatuur bekende benaderingen in wiskundeonderwijs IBME-kenmerken bevatten. Wetenschappelijk onderzoek gaat vaak verder op al aangevoelde ervaringen, welke verder bestudeerd kunnen worden in cyclische processen die niet van toepassing zijn op wiskunde. Hier is de cumulatieve aard van de discipline een uitdaging. Vandaar dat de ontwerptaak anders is als we ervoor willen zorgen dat leerlingen een bepaald leerdoel behalen, wat opnieuw gekoppeld is aan al ontwikkelde kennis in de leerlingen en de basis vormt voor de formelere bewijsvoering van de concrete ideeën die ontwikkeld worden tijdens de onderzoeksactiviteit. In deze context bieden ICT of CAS-tools speciale kansen en uitdagingen in het ontwerpen van IBME-activiteiten - voorbeelden van verschillende ICT-ontwerpen worden gegeven. In de eerste helft worden kort de elementen besproken: Modelleren, RME, ATD, TDS, kritieke benaderingen, en het oplossen van problemen kunnen IBME bieden. Maar ook de obstakels die tegengekomen kunnen worden tijdens het implementeren in schoolsystemen worden besproken in dit onderdeel van het werk.
In het tweede deel wordt een wat praktischer (docent)perspectief op IBME gegeven. Vanuit een karakterisatie van standaard onderwijs wordt aangegeven hoe het lesgeven aangepast zou moeten worden: wat zou de docent meer of minder moeten doen? Welke acties zouden de leerlingen moeten ondernemen en hoe zorgen docenten dat ze dat ook doen? Er wordt aangegeven hoe deze acties de ontwikkeling van probleemoplossende en metacognitieve vaardigheden bij leerlingen ondersteunen. Ten slotte worden voorbeelden gegeven bij IBME-opdrachten met en zonder computers.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W., & Léna, P. (2012). Learning through inquiry, *Re-sources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*. Uit http://www.fibonacci-project.eu/resources
Wat algemener over de ideeën van het Fibonacci-project, niet beperkt tot wiskunde.

Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39*, 365–382
Het werk geeft een overzicht van hoe het oplossen van problemen gezien en benaderd kan worden vanuit het perspectief van TDS, ATD en “theoretische domeinen”. Er worden een aantal voorbeelden gegeven van hoe het oplossen van problemen behandeld wordt in curricula op verschillende niveaus van wiskunde. Het merendeel van de resultaten die getoond worden houdt verband met het verschuiven van de aandacht wat betreft het oplossen van problemen in curriculumvernieuwingen van 1945 tot 2002. Veranderingen in het curriculum tonen de veranderde rol van het basisonderwijs. Het wordt beschreven aan de hand van voorbeelden hoe didactisch onderzoek de curriculaire veranderingen beïnvloed heeft bij het oplossen van problemen met ontwerpcentra als IREM, die de ondersteuning bieden van docenten in dienst om de gewenste veranderingen te bereiken. Er zijn echter nog steeds problemen in het bestuderen van het gerealiseerde curriculum in de les waar docenten definities van een probleem

vaag vinden en ze moeite hebben te navigeren in open processen en de neiging hebben om gelijke waarde te schenken aan verschillende antwoorden van variërende kwaliteit. Er wordt voorgesteld dat sterkere verbanden tussen onderzoek en de praktijk en de docentenopleiding de verwezenlijking van het curriculum zullen verbeteren.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Het boek presenteert het grootste deel van de Theorie van Didactische Situaties, ontwikkelt door Guy Brousseau, en verder uitgewerkt met zijn onderzoeksgroep. TDS wordt geïntroduceerd met het voorbeeld van de "Race tot 20". De analogie tussen leren en het winnen van een spel wordt duidelijk in de inleiding en een eerste presentatie wordt gegeven van de fases van actie, formulering en validatie. Hoofdstuk 1 begint met een presentatie van wat *didactique* is in Frans onderzoek, bij de objecten en fenomenen die bestudeerd worden. Onder de fenomenen bevinden zich een aantal onbedoelde effecten van het lesgeven: Topaze effect, Jourdain effect, metacognitieve verschuivingen en onjuist gebruik van analogieën. Verder worden de begrippen didactische situatie, a-didactische situatie en het didactisch contract gepresenteerd. Voorbeelden worden gegeven over overdracht van een a-didactische situatie en verdere paradoxen bij het didactisch contract worden besproken. De paradoxen houden verband tot de mogelijkheid van leerlingen om zich aan te passen aan situaties en de leerpotenties om dat te doen. In het laatste deel wordt de nadruk gelegd op hoe de fases en situaties gemodelleerd kunnen worden door het ontwerp van het milieu wat leidt tot de formulering van het gewenste leren als de leerlingen zich aanpassen aan het milieu van de situatie.
Hoofdstuk 2 gaat verder op het ontwerpelement door het begrip *epistemologische obstakels*, het probleem, en *didactical engineering* uit te leggen vanuit het oogpunt van TDS. Het hoofdstuk gaat over probleemsituaties en Brousseau's studie naar het lesgeven in decimalen. Verder wordt er een onderscheid gemaakt tussen welke obstakels in de les behandeld kunnen worden en welke obstakels buiten de les vallen.
Hoofdstuk 3 geeft een analyse van de mogelijke uitkomsten van het lesgeven in decimalen in Franse basisscholen van de jaren '60 en '70 gebaseerd op eerdere curricula en benaderingen van onderwijs. Dit gaat verder in hoofdstuk 4 waar conclusies worden getrokken op de wiskundige, epistemologische en didactische analyse. Gebaseerd op deze ontwerpvoorbeelden worden andere voorbeelden gepresenteerd en besproken: de pantograaf en het schalen van ontwerpen, de puzzelopdracht bewegend van een additief naar een multiplicatief domein, decimale getallen en rationele getallen. Vervolgens wordt de analyse van een situatie gegeven, wat het ontwerp van een situatie behandeld waar de dikte van een vel papier vastgesteld wordt en de analogie van een leersituatie met een (didactisch) spel.
Hoofdstuk 5 gaat in op het begrip didactisch contract zowel in relatie tot ontwerpzaken en tot de effecten op het leren van leerlingen. Hierbij gaat het om

de fasen van het didactische spel met een nadruk op de kennis die onderwezen moet worden in de ontworpen situatie.
Hoofdstuk 6, het laatste hoofdstuk, behandelt de relevantie van TDS-onderzoek voor de praktijk van de docent waaronder technieken voor docenten en hoe onderzoekskennis realiteit kan worden in de lespraktijk.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 39*, 395–403.
Het werk geeft een historisch overzicht van politieke beslissingen tijdens de laatste 100 jaar in wiskundeonderwijs. Het wordt geproblematiseerd dat in recente jaren beleidsmakers lijken te handelen op basis van hun eigen ervaringen over wat wiskundeonderwijs is en zich liever zouden moeten baseren op onderzoekskennis. Vandaar dat onderzoekende benaderingen in wiskundeonderwijs niet benadrukt of ondersteund worden in het Britse schoolsysteem.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer International Publishing.
Dit is een onderzoeksverslag wat de elementen van de Antropologische Theorie van de Didactiek (ATD) introduceert, nog een Franse theorie over didactiek. Algemeen onderwijs dat procedures of formules presenteert en verklaart wordt gekarakteriseerd als het paradigma van het bezoeken van werkzaamheden. Het werk stelt dat wiskundeonderwijs zou moeten verschuiven naar een nieuw (tegengesteld) model: Het onderzoeken van de wereld. Er wordt gezegd dat lesgeven gebaseerd zou moeten zijn op het stellen van open vragen die leerlingen beantwoorden door betrokken te zijn bij het bestuderen van bestaande bronnen, en nieuw verkregen en bestaande kennis toe te passen om de open vragen te kunnen beantwoorden. In dit proces wordt er van leerlingen verwacht dat ze nieuwe vragen kunnen afleiden van de gegeven vraag. De ontwerptool voor dit soort onderwijs wordt Studie en Onderzoekspaden (Study and Research Paths - SRP) genoemd en wordt door andere onderzoekers (waaronder in werk uit deze lijst) aangewezen als een veelbelovend model voor IBME.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. American *Educational Research Journal*, 29 (3), 573–604.
De auteurs analyseren twee voorbeelden van de noodzaak van nummering in groep 2 en 3 in de Verenigde Staten. Ze introduceren een aantal begrippen uit literatuur over Amerikaans wiskundeonderwijs om de twee lessituaties te analyseren. Ze identificeren de situaties respectievelijk als schoolwiskunde en onderzoekswiskunde. Ze benadrukken de verschillende rollen in de instructie en de verificatie van de antwoorden van de leerlingen. Ze noemen het werk en een aantal begrippen van Brousseaus TDS, hoewel ze de twee lessituaties niet willen analyseren volgens didactische situaties. Ze concluderen; "In aanvulling stellen we dat cognitieve modellen die de constructie van de toenemende geavanceerde

wiskundige objecten van leerlingen documenteren essentieel zijn voor analyses van hun activiteit waar zij deelnemen in de interactieve vorming van een onderzoekende traditie in wiskunde." Het werk toont een poging om te conceptualiseren hoe onderzoek zoals wiskundeonderwijs geanalyseerd en vergeleken kan worden met traditionele benaderingen. Het merendeel van de bevindingen kan gekoppeld worden aan het begrip van didactisch contract uit TDS, maar dat wordt in dit werk niet gedaan.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.
Hij bespreekt hoe educatieve systemen in logische structuren opgebouwd zijn. Hoewel de logica vaak door de volwassenen geproduceerd wordt en het product is van jarenlang werken met de kennis die onderwezen moet worden. Dit kan leiden tot uitdagingen voor het kind en zijn leren aangezien het misschien niet aansluit bij zijn ervaringen. In tegendeel, onderwijs zou moeten draaien rond de acties van de leerlingen en er wordt geconcludeerd: "Actie is reactie; het is aanpassing, afstemming. Er is niet zoiets als louter zelfactiviteit mogelijk - want alle activiteit vindt plaats in een medium, in een situatie, en met betrekking tot zijn omstandigheden".

Dewey,J. (1929). *The Sources of a science of education*
Hoofdstuk 1: Education as a science. Hij stelt dat de behoefte er is om onderwijs als wetenschap te zien, waar we kennis op een wetenschappelijke manier delen. Sommige docenten hebben een talent voor het lesgeven, maar als we niet studeren, waar dit talent uit bestaat, kunnen we niet de praktijk of ideeën over lesgeven delen. Maar er is een gevaar dat kennis met de visie van onderwijs als wetenschap, als snelle oplossing misbruikt zal worden door personen in onderwijskundige systemen.
Hoofdstuk 2: Borrowed techniques insufficient. Er wordt gesteld dat technieken niet van natuurwetenschappen geleend kunnen worden en op dit punt in de geschiedenis is het onduidelijk wat en hoe de objecten op het gebied van onderwijswetenschappen gemeten moeten worden.
Hoofdstuk 3: Laws vs. Rules.
Bespreekt hoe schoolsystemen en kennis georganiseerd zijn en waarom dit mogelijk faalt in het lesgeven en leren voor iedereen en het vrije gedachtenspel, waar het laatste essentieel kan zijn voor het leren.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.
Het boek bespreekt onderzoek vanuit verschillende perspectieven: gezond verstand en wetenschappelijk onderzoek, de structuur van onderzoek en de constructie van kennis, werkhypotheses, etc. De nadruk ligt vooral op onderzoek in wetenschap. Er wordt een hoofdstuk gewijd aan de wiskundige verhandelingen van onderzoek waar wordt geconcludeerd dat: "De overwegingen hier aangevoerd hebben een duidelijke invloed op de aard van testen en verificatie (zie Ante, p. 157). Ze bewijzen dat in de onderzoekspraktijk verificatie van een idee of theorie geen geval is van het vinden van een bestaan wat voldoet aan de eisen van

het idee of de theorie, maar het is een geval van systematische ordening van een complex geheel aan gegevens door het idee of de theorie als instrumentaliteit. Dus is het de algemeenheid, die geleerd kan worden uit het concrete experiment of de ervaring, die interessant is. Verschillende begrippen en concepten uit wiskunde (bijvoorbeeld isomorf, een verband) worden besproken in de context van onderzoek en binnen wiskunde en tot op welke hoogte ze hetzelfde betekenen.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(6).
Het essay bespreekt de condities en beperkingen die een grootschalige implementatie van onderzoekende wiskunde en natuurwetenschappelijk onderwijs mogelijk bevoordelen, of in tegendeel hinderen, op basis van ons werk met het PRIMAS-project in 12 Europese landen. Het model van het onderwijssysteem wat geboden wordt door Chevallards Antropologische Theorie van Didactiek (ATD) als een systematisch institutioneel perspectief hielp in het structureren van de analyse van voorwaarden en beperkingen van de systemen in deze landen. Het is een aanvulling op de benadering door de analyse van de overtuigingen en werkwijzen van docenten (Engeln et al. in ZDM Int J Math Educ 45(6), 2013). In deze benadering zijn de docenten actoren van instituties, sommige disciplines vertegenwoordigend, verankerd in een schoolsysteem, sommige algemene pedagogische zaken delend, worden beschouwd in relatie tot de samenleving. De analyse is georganiseerd volgens vier niveaus van institutionele organisatie die mede inhoud en didactische aspecten in het lesgeven in wiskunde en natuurwetenschappen bepalen: de samenleving, school, pedagogiek en disciplinair.

Drobnič Vidic, A. (2011). Impact of Problem-based Statistics Course in Engineering on Students' Problem Solving. *International Journal of Engineering Education* 27(4): 885-896.
Uittreksel. In dit vergelijkend onderzoek hebben we het niveau van basis vakkennis en probleemoplossende vaardigheden in problem-based learning (PBL) opgenomen in een traditioneel curriculum in een inleidende cursus statistiek. Geleidelijk minder gestructureerd, minder bekend en meer open problemen werden gepresenteerd aan techniekleerlingen. Bouwtechnische problemen brachten het leren van nieuwe statistische inhoud teweeg en activeerden het oplossen van problemen in kleine groepen. Leerlingen stelden als een groep de leerdoelen vast, zochten individueel naar informatie, en analyseerden samen de verzamelde informatie. Zo'n probleemoplossend proces met echte problemen wordt vaak gezien als ongestructureerd en tijdrovend. Er werd een experiment uitgevoerd om te ontdekken of deze aanpak toereikende basis-statistische kennis oplevert en het oplossen van problemen verbetert. Twee gerandomiseerde groepen leerlingen uit hetzelfde bouwprogramma werden vergeleken: één groep gebruikte PBL en de andere volgde de traditionele instructiemethode. De resultaten van de statistische analyse toonden dat bouwkundige leerlingen met de PBL-aanpak voldoende basis-statistische kennis op hadden gedaan en beter in staat waren om statistische problemen op het

gebied van bouwkunde op te lossen dan de leerlingen die de traditionele manier van instructie hadden gevolgd. Een aantal kenmerken van de implementatie van de cursus worden besproken, net als wat beperkingen van het onderzoek.

Drobnič Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (5), pp. 1161–1187.
Uittreksel: Wiskunde-gerelateerde overtuigingen spelen een belangrijke rol in de bereidheid om deel te nemen in academische activiteiten in wiskundeonderwijs. Deze overtuigingen zijn misschien niet verenigbaar met de overtuigingen van leerlingen over contextproblemen die vragen om voldoende wiskundige kennis en de toepassing van die kennis in diverse werkelijke situaties. Dit onderzoek is opgezet om de verschillen te onderzoeken tussen de wiskunde-gerelateerde overtuigingen van leerlingen en overtuigingen over contextproblemen. De variaties in deze overtuigingen kunnen verklaren waarom leerlingen verschillende mate van inspanning stoppen in het oplossen van contextproblemen aan de ene kant en het oplossen van typisch wiskundige taken aan de andere. Het onderzoek omvatte 261 eerstejaars leerlingen: leerlingen in één groep waren ingeschreven in academisch uitdagendere studieprogramma's (n = 162), waar de leerlingen in de andere groep (n = 99) ingeschreven waren in minder veeleisende studieprogramma's. De resultaten toonden significante verschillen in overtuigingen tussen de twee groepen. Een gedetailleerde analyse toont de factoren die benadrukt moeten worden in het ontwerpen van op problemen gebaseerd wiskundeonderwijs om succesvol het oplossen van contextproblemen te stimuleren.

Drobnič Vidic, A. (2016). Using a Problem-Based Leaning Approach to Incorporate Safety Engineering into Fundamental Subjects. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*. 142 (2).
Uittreksel. Veiligheid wordt gezien als een belangrijk onderdeel van bouwtechnische opleidingen, maar het wordt regelmatig onvoldoende belicht in het curriculum van bouwopleidingen. Inhoud van veiligheidstechniek is toegevoegd in een inleidende cursus statistiek aan de hand van een problem-based learning (PBL)-aanpak. Beginners leerden statistische content via PBL-problemen uit het vakgebied van veiligheidstechniek. Ze werden ingedeeld in twee groepen, volgens de gedeeltelijke beoordelingsoptie kozen ze: de groep met klassikale beoordeling en de groep met beoordeling van een onafhankelijk PBL bouwtechnisch probleem dat ontworpen was volgens de campagne gecoördineerd door het Europees agentschap voor de veiligheid en de gezondheid op het werk. In het probleem analyseerden de leerlingen de kwaliteit en het onderhoud van de installatie van brandblussers in meer dan 200 gebouwen. Het doel van ons onderzoek was om uit te zoeken of de beoordeling van dit probleem gebruikt kan worden om de holistische statistische kennis van leerlingen te beoordelen, als leerlingen nieuwe inzichten kunnen krijgen op het gebied van veiligheidstechniek, en of een dergelijke beoordeling aansluit bij de ABET-criteria. De vragenlijst van de leerlingen gaf ons ook informatie over de

perceptie van de leerlingen over de moeilijkheid van de PBL-benadering in beide beoordelingsopties.

Drobnič Vidic, A. (2017). Teachers' Beliefs about STEM Education Based on Realisation of the "Energy as a Value" Project in the Slovenian School System. *International journal of engineering education* (in press).
Uittreksel. Het beschreven vakoverstijgende project Energie als een waarde betrof bijna alle vakken in alle leerjaren van het zogenoemde technisch gymnasium. Het werd het kader voor effectief onderwijs in Natuurwetenschappen, Technologie, Bouwtechniek en Wiskunde (STEM). Hoewel het project een interdisciplinaire connectie bood tussen alle STEM-vakken, probleemoplossend leren promootte, en wees op de toepassingen van de content van de vakken voor bouwtechnische beroepen, was het uiteindelijk niet succesvol. De tevredenheid van de docenten aan het eind van de vierjarige periode van het project was dubieus. De docenten waren geen initiatiefnemers voor een nieuw project. Het Engineering Education Beliefs and Expectations Instrument voor STEM-onderwijs is gebruikt om de redenen te achterhalen waarom zo'n ambitieus project niet herhaald wordt. Het instrument documenteert de overtuigingen en verwachtingen van de docenten over engineeringinstructie op de middelbare school, de voorbereiding op vervolgonderwijs, en carrièresucces in engineering, en vergelijkt dan de visies van de docenten. Het is ingevuld door de docenten van de technische gymnasia in Slovenië die STEM-vakken geven om uit te vinden of er verschillen zijn tussen overtuigingen van docenten die het Energie als een waarde-project uitgevoerd hebben en docenten van andere technische gymnasia, net als verschillen tussen overtuigingen van wiskunde-/natuurwetenschappelijke docenten en engineering/op technologie-gerichte docenten. De resultaten van de statistische analyses geven antwoord op vragen over obstakels waar docenten die het ambitieuze STEM-onderwijs in een specifiek schoolsysteem hebben uitgevoerd tegenaan konden lopen.
Kernwoorden: STEM-onderwijs; overtuigingen van docenten; schoolcurriculum; vakoverstijgend engineeringproject; project-gebaseerd leren.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.
Dit werk rapporteert over een onderzoek met een groot aantal leerlingen uit de bovenbouw en hun betrokkenheid bij problemen in het concept van grenzen, waar er van leerlingen verwacht werd dat ze vrij konden verschuiven van het algebraïsche naar het meetkundige domein en weer terug. In welke mate leerlingen succesvol waren in niet-routinematige problemen waarbij een verandering van vakgebied nodig was, was afhankelijk van de mate waarin de leerlingen gebonden waren door een traditioneel didactisch contract.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. Educational Studies in Mathematics, 83, 1, pp. 87-101.
Het essay begint met argumentatie over het belang van in staat zijn de inhoud kritisch te bekijken, wat je dient te leren, en bestaande kennis kritisch te kunnen bekijken vraagt om creativiteit en verbeelding, en dat is hoe vooruitgang geboekt wordt in wetenschap. Vandaar dat dit gestimuleerd dient te worden in het onderwijs. Het werk schetst een aantal designs ontworpen door voorbereidend lager onderwijs docenten die lesactiviteiten ontworpen hebben waarbij de leerlingen betrokken worden door het plaatsen van problemen.

Engeln, K., Euler, M., & Maaß, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. Advance online publication. http://link.springer.com/journal/11858
Het werk toont een aantal resultaten van een vragenlijst die beantwoord zijn door de docenten die betrokken waren bij het PRIMAS-project. Het geeft aan dat docenten in het algemeen een positieve houding hebben tegenover IBL, maar ook dat ze een gebrek aan middelen als een groot obstakel zien om IBL te implementeren. Ook nationale beperkingen in het onderwijssysteem worden benoemd als uitdaging. Daarentegen wordt klassenmanagement door de docenten niet als een groot probleem gezien.

Euler, M. (2011). *PRIMAS survey report on inquiry-based learning and teaching in Europe*
Het PRIMAS-project toont dat in de meeste EU-landen minstens een aantal docenten wiskunde en natuurwetenschappen ervaring hebben met Inquiry Based Learning (IBL), maar er zijn verschillen in de interpretatie van het begrip. Vandaar dat een IBL-les zeer verschillend kan lijken in het ene land of het andere. Er wordt gesteld dat initiatieven die de implementatie van IBL ondersteunen opgebouwd dienen te worden rond docenten die al wat ervaring hebben en een interesse hebben in pedagogische of didactische zaken. Het project identificeerde drie belangrijke factoren die de implementatie van IBL bemoeilijkten: klassenmanagement, bronnen en beperkingen uit het onderwijssysteem in verschillende landen.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.
Het rapport geeft een lijst van concrete initiatieven over hoe de docenten bij te scholen in het gebruik van IBL, de theoretische benaderingen omvatten modelleren, lesstudie, en het inpassen van IBL binnen de plaatselijke voorwaarden aan loopbaanontwikkeling voor docenten. De modules voor de PRIMAS loopbaanontwikkeling voor docenten besloeg de volgende onderwerpen: leerling-geleid onderzoek, het aanpakken van ongestructureerde problemen, het leren van concepten aan de hand van onderzoek, het stellen van vragen om IBL te stimuleren, leerlingen die samenwerken, voortbordurend op wat leerlingen al weten, zelf- en peerbeoordeling.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). ***Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*****, 2015, Praag, Tsjechische Republiek. pp. 2642-2648.**
Het werk beschrijft verschillende theorieën die er vanuit gaan dat het leren van wiskunde gebaseerd zou moeten zijn op constructivistische methodes waarbij leerlingen probleemsituaties onderzoeken en een facilitatorrol toebedelen aan de docent (RME, TDS), en ze vergelijken deze met de theorieën die een centralere rol voor de docent bepleiten waaronder uitdrukkelijke kennisoverdracht en de actieve ontvangst van leerlingen. De auteurs geloven dat het optimaliseren van wiskundeonderwijs vraagt om het aannemen van een gemiddelde positie tussen deze twee extreme modellen.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. ***Journal of Curriculum Studies, 32*****, 6, pp. 777-796.**
De auteurs geven een verslag van de belangrijkste bijdragen aan wiskundeonderwijs door Hans Freudenthal die wiskunde zag als menselijke activiteit. Hij ging verder met het idee van begeleide heruitvinding (ook bekend uit Deweys werk) wat destijds vraagtekens zette bij de totstandkoming van curricula. Hij wilde het idee promoten dat een centraal element van wat de leerlingen zouden moeten leren eerder zou gaan over processen dan vastgestelde inhoudelijke onderdelen. Als gevolg zou wiskundeonderwijs gebaseerd moeten zijn op modelleerproblemen waar leerlingen zaken uit de realiteit verwiskundigen, maar zonder duidelijke intra en extra wiskundige realiteit. Later werd een verschil tussen verticale en horizontale verwiskundiging geïntroduceerd. Freudenthal bekritiseerde de rol van algemene theorieën over pedagogiek of leertheorieën in onderzoek naar wiskundeonderwijs. Hij stelde daarentegen de benadering van Realistisch Wiskundeonderwijs (RME) voor, wat een fenomenologische benadering op wiskundeonderwijs is.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. ***ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*** **(3), p. 399–411.**
Een voorbeeld van hoe loopbaanontwikkeling voor docenten kan ondersteunen in het ontwerpen of de ontwikkeling van onderzoekend leren door een dynamisch meetkundig computerprogramma toe te passen (ICT-gebaseerd IBME). De docenten in deze studie geven les in de bovenbouw en de theoretische benadering is de zeer recente theorie van de totstandkoming van documentatie.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. ***Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Universiteit van Utrecht.***
Dit is een onderzoeksverslag wat de belangrijkste concepten en begrippen van RME en de Nederlandse onderwijstraditie introduceert beginnend met bijdragen

van Hans Freudenthal tot recentere ontwikkelingen. Drie voorbeelden van basisscholen worden gegeven in de tekst.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics, 59(13)*, 113–151.
Het verslag presenteert een aantal uitdagingen wanneer onderwijs ontworpen is om leerlingen een grotere mate van initiatief te bieden in de les en hoe dat groeit met de onzekerheid van de docent. Bij het toepassen van de begrippen van TDS analyseren de auteurs twee casussen van lesgeven, waar de auteurs geen invloed hadden op het onderwijsontwerp of het verloop van het lesgeven. Gebaseerd hierop bespreken de auteurs de uitdagingen en mogelijkheden voor het brengen van constructivistische benaderingen op lesgeven.

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272. Springer publishing.
De tekst geeft een kort overzicht van hoe het onderzoeksveld van wiskundeonderwijs zich ontwikkeld heeft, en dat dit veel later gebeurde dan de totstandkoming van de praktijk. Een korte bespreking van wie het initiatief nam om instellingen op te richten (zoals ERME, ICMI, IREM en andere) waar wiskundigen en onderwijskundigen konden samenkomen en zaken bespreken. De ideeën van Felix Klein en het verband tussen het onderzoek naar de praktijk van wiskundigen en het lesgeven en leren in wiskunde worden behandeld. Andere recentere problemen in het domein worden beschreven, zoals de werkelijke en potentiele rollen van technologie in wiskundeonderwijs. De tekst geeft een overzicht van onderzoek naar wiskundeonderwijs, en vandaar dat het geen specifiek onderzoek in detail bespreekt.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39
Eerst wordt er een historisch overzicht geboden met de start van commissies voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs, waarin Felix Klein een belangrijk figuur was. Hij introduceerde een vernieuwingsprogramma gebaseerd op een samenwerking tussen docenten, wetenschappers en ingenieurs. Het idee was om docentenopleidingen te veranderen om zo het onderwijs te wijzigen in de richting van het stimuleren van praktische instructies en de ontwikkeling van ruimtelijk gevoel. Er wordt besproken wat wiskunde is (wat voor wiskundigen niet eenvoudig te definiëren is) en wat onderwijs is. Verschillende benaderingen worden gepresenteerd zoals de Scandinavische pedagogische traditie en de Franstalige traditie van didactiek. Er wordt gesteld dat wiskunde als een onderzoeksveld en ook als praktijk draait rond lesgeven. Het wordt door lesgeven gestimuleerd en gevormd. Dit leidt tot de vraag (ook door anderen gesteld) wat de relatie tussen wiskunde als onderzoeksveld en als discipline is en zou moeten zijn om gegeven te kunnen worden in verschillende schoolsituaties.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In Holton, D. (ED.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 127-135). Springer Nederland.
Er wordt gesteld dat deelnemen in een wiskundecursus niet hetzelfde is als dat leerlingen wiskundigen worden, hoewel er misschien wel van ze verwacht wordt dat ze doen alsof ze wiskundigen zijn en de klas een wetenschappelijke gemeenschap vormt in het bespreken van de wiskunde. Vandaar dat het verslag voorstelt het onderwijs vorm te geven als een wetenschappelijk debat. Het debat kon begonnen worden als een "ongepland" debat gebaseerd op een vraag van een leerling, een geplande situatie met de intentie om een nieuw concept te introduceren of een epistemologisch obstakel te nemen, of een concept of theorie te verdiepen. Voorbeelden van zulke starters worden gegeven uit het eerste jaar van universitair wiskundeonderwijs (waaronder multidisciplinaire voorbeelden), maar verschillende voorbeelden kunnen ook relevant zijn voor het middelbaar onderwijs.
Om het wetenschappelijk debat te laten slagen is het belangrijk dat de docent de leerlingen genoeg tijd geeft om hun argumenten individueel voor te bereiden, dat hij/zij alle argumenten zonder oordeel op het bord schrijft en de docent zou ernaar moeten streven om het aantal leerlingen wat mee doet en actief op zoek gaat naar een rationele oplossing voor het probleem of het vermoeden te maximaliseren. De verantwoordelijkheid van de leerlingen is om te geloven in het vermoeden waar hij of zij voor staat, rationele argumenten hierbij te ontwikkelen en uiteindelijk de argumenten zo overtuigend te formuleren dat zowel de klasgenoten als de docent overtuigd zijn. Op deze manier wordt het didactische contract van wiskundeonderwijs expliciet gewijzigd in één, waar de verantwoordelijkheid van de leerlingen naar voren komt in diegene die de wiskundige antwoorden geeft, formuleert en valideert. Het verslag gaat in op concepten van TDS.

Legrand, M. (n.d.) *Les deux ateliers proposés par Marc Legrand reposent sur: Le "Débat scientifique" en cours de mathématiques*. Uit: http://kordonnier.fr/IMG/pdf/legrand.pdf
De tekst geeft verdere argumenten voor hoe het wetenschappelijke debat het didactische contract in het onderwijs verandert en hoe wiskundige activiteit (van wiskundigen) resoneert met het wiskundige debat. Er worden overige opmerkingen van leerlingen geboden. Een aantal vindt het lastig om zich voor te stellen dat een wetenschappelijk debat op de basisschool gevoerd kan worden, ondanks dat ze het onderwijs verhelderend en goed vonden. Veel studenten vinden de debatten tijdrovend in die zin dat ze zich afvragen of een wetenschappelijk debat wel alle stof uit het curriculum zal behandelen.

Margolinas, C. & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 47*(6).
Het verslag bespreekt het concept van onderwijsontwikkeling wat hedendaags onderzoek in wiskundeonderwijs in Frankrijk beïnvloed en gekarakteriseerd heeft. In het werk wordt het volgende behandeld vanuit het perspectief van een

ingewijde en een buitenstaander: (1) de manier waarop dit begrip theoretisch onderbouwd is, (2) de soorten werkwijzen voor ontwerponderzoeken waar dit toe geleid heeft en nog toe leidt, en (3) de manier waarop het verband houdt tot het paradigma van ontwerponderzoek. Het werk vergelijkt de Nederlandse kijk op realistisch wiskundeonderwijs en de kenmerken van onderwijsontwikkeling in Frankrijk.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of iquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education, 45,* pp. 779-795

Uittreksel: Deze synthese is ontworpen om inzicht te geven in de belangrijkste zaken in een grootschalige implementatie van IBL. We zullen eerst kijken naar IBL door te reflecteren op (1) de definitie van IBL en (2) de huidige staat van de kunst van de implementatie te onderzoeken. Nadien zullen we verder gaan op de implementatie van IBL en kijken naar de verspreiding door bronnen, professionele ontwikkeling, en de betrokkenheid van de context. Gebaseerd op deze theoretische reflecties zullen we een conceptueel kader ontwikkelen voor de analyse van verspreidingsactiviteiten voordat kort vier voorbeeldprojecten geanalyseerd worden. Het doel van onze analyse is om te reflecteren op de verschillende implementatiestrategieën en aandacht vragen voor de verschillende manieren waarop ze gebruikt en gecombineerd worden. Deze synthese eindigt met overwegingen over het kader en conclusies over benodigde toekomstige acties.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), 199–218.

Het verslag analyseert en vergelijkt twee didactische ontwerpen in evenredige onderbouwing. Het ene ontwerp is de vergroting van een puzzel en komt uit de literatuur over TDS. Het andere ontwerp is gebaseerd op de Japanse traditie van Lesstudie en de Benadering met een Open Einde. Beide benaderingen bevatten een element van onderzoek en beide delen het idee dat leerlingen leren van mogelijke fouten.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., & Threlfall, J. (2009). Open-Start Mathematics Problems: An Approach to Assessing Problem Solving. *Teaching Mathematics and its Applications, 28* (1), 21–31

Het werk geeft een inleiding in het oplossen van problemen en wat een probleem met een Open Begin definieert, wat gekenmerkt wordt door meerdere startpunten, maar slechts één antwoord. Het verslag stelt hoe deze latere problemen gebruikt kunnen worden voor beoordelingsdoeleinden, en door de beoordeling aan te passen wordt er voorgesteld dat lesactiviteiten ook meer onderzoeksgerelateerd zullen zijn.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.

Het verslag bespreekt een aantal fundamentele vragen voor onderzoek in wiskundeonderwijs: welke uitdagingen komt het onderwijssysteem tegen, en waarom zou het wiskundeonderwijs van belang zijn voor onderzoekswiskundigen. In het verslag wordt geformuleerd wat bedoeld wordt met een theorie, wat wiskundeonderwijs is als een ontwerponderzoek en wat dit onderzoek oplevert. Verschillende bevindingen worden besproken zoals perspectieven op leren, bekende obstakels, de rol van ICT. De conclusies wijzen richting de behoefte van leerlingen om meer heuristische competenties op te bouwen door niet-routinematige wiskundige problemen op te lossen, wat gezien kan worden als meer onderzoekende benaderingen.

Nohda, N. (1995). Teaching and Evaluating Using "Open-Ended Problems" in Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27 (2), 57–61.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (1), 39–53
Er wordt een inleiding gegeven bij een aanpak met een open einde: gebaseerd op een aanvankelijk probleem, hypotheses van leerlingen en eerste antwoorden die leiden tot het formuleren van nieuwe vragen voor verder onderzoek. Er worden voorbeelden gegeven van verschillende problemen, en er wordt besproken hoe de docent omgaat met de verscheidenheid aan antwoorden van leerlingen. De lessituaties worden geschetst met een nadruk op de communicatie tussen leerling en docent. Aan het eind wordt geopperd dat de connectie tussen een open einde-aanpak en modelleren verder onderzocht zou moeten worden, en hoe dit soort onderwijs de houding van leerlingen ten opzichte van wiskunde beïnvloedt.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.
Dit boek wordt als cruciaal gezien door andere onderzoekers in het oplossen van problemen en IBME als het startpunt voor onderzoekend leren als aanpak binnen het lesgeven in en leren van wiskunde. Polya beschrijft de processen die voorbij komen in het oplossen van problemen als de kernactiviteit van een wiskundige. Hij benadrukt de creativiteit en houding tegenover wiskundigen die nodig is om bezig te zijn met probleemoplossende activiteiten. Hij introduceert het begrip van heuristiek in het proces van het oplossen van problemen.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.
Een uitwerking en uitbreiding van de ideeën van Polya. Een gedetailleerde inleiding in wat probleemoplossen is, welke bronnen leerlingen horen te gebruiken en welke houdingen richting wiskundige problemen nodig zijn.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and*

***Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). New York: MacMillan Publishing Company.**
Het hoofdstuk uit het boek geeft een inleiding in het oplossen van problemen waarbij Piaget en het constructivisme, de impact van de epistemologische, ontologische en pedagogische visie op wiskunde aangehaald worden. Hij bespreekt Polya's ideeën over heuristiek en de relatie ervan met metacognitie. Het verslag bevat algemene ideeën over hoe studenten te begeleiden of assisteren (universiteitsniveau) in het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden en competenties. Hoewel het nog steeds (in 1992 althans) een uitdaging is hoe les te geven in het oplossen van problemen aangezien een soort consensus bereikt lijkt te zijn over de definitie van wat het is.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Volume 45, Issue 6, pp. 901–909.
Een discussie over de uitdagingen waar implementatie van IBMT in de Verenigde Staten tegenaan gelopen zou kunnen worden, waarbij factoren als het huidige curriculum, de capaciteit van wiskundedocenten, en maatschappelijke vraag en overtuigingen van wiskunde op school de revue passeren.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1, pp. 1-7.
Dit is een overzichtsverslag wat de huidige staat introduceert van onderzoek naar het werken met problemen in wiskundeonderwijs. Het verslag begint door te beargumenteren hoe het plaatsen van problemen de ontwikkeling van heuristische vaardigheden bij leerlingen ondersteunt en hoe dit verband houdt tot het nastreven van iemands eigen vragen. Het is een inleiding in een speciale uitgave van ESM en het biedt een overzicht van de benaderingen om leerlingen te voeden vragen te stellen bij wiskundige inhoud, wat gevonden kan worden in deze speciale uitgave.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking & Learning*, 10, pp. 313–340.
Het werk biedt een literair overzicht van klassenbesprekingen, wat leidt tot de weergave van het auteursmodel, waaronder: anticiperen, monitoren, selecteren, opvolgen en verbinden. Er wordt geconcludeerd: "Dus de vijf werkvormen geven geen directe oplossing voor wiskunde-instructie. Daarentegen bieden ze iets veel belangrijkers: een betrouwbaar proces waar docenten op kunnen bouwen om geleidelijk hun klassenbespreking te verbeteren".

Ulm, V. (2012). Inquiry-based mathematics education in primary school: Overview and examples from Bavaria/Germany. In P. Baptist & D. Raab (Eds.), ***Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School. Implementing Inquiry in Mathematics Education*** **(pp. 65–81). Uit http://www.fibonacci-project.eu/resources**
Een voorbeeld of model van hoe onderzoekend leeromgevingen ontworpen kunnen worden, gevolgd door een aantal Duitse voorbeelden van basisscholen over stamnummertheorie.

Woordenlijst van speciale termen gebruikt in dit boek

Een aantal van de gebruikte artikelen zijn gebaseerd op formuleringen die gevonden zijn op het internet, wat in het algemeen een goede bron is voor het krijgen van een eerste indruk van wat een term betekent. Ze worden hier weergegeven voor het gemak van de lezer en het is niet de bedoeling dat ze de noodzakelijke verdiepende studie van het materiaal uit de bibliografie vervangen.

Filosofie van leren en kennis

Epistemologie - in de strikte zin, een tak van filosofie die zich bezig houdt met de theorie van kennis, de aard van kennis, de verantwoording ervan, en de rationaliteit van overtuigingen. In wiskundeonderwijs zijn epistemologische aspecten breder betrokken bij de specifieke structurele onderdelen van wiskunde en de obstakels en problemen die het brengt voor leerlingen, als consequentie van deze structuur.

Constructivisme - een filosofisch perspectief over de manieren waarop mensen leren. De formalisatie van het constructivisme wordt over het algemeen toebedeeld aan Jean Piaget (1896-1980), een beroemde Zwitserse psycholoog die delen van zijn carrière besteed heeft aan het uitvoeren van klinische studies naar hoe leerlingen onder andere basiswiskunde leren. Hij modelleerde menselijke kennis als opgebouwd uit mentale schema's van verschillende types, en veronderstelde dat constructie van deze schema's (leren) mogelijk plaatsvindt door wat hij assimilatie en accommodatie noemt van bestaande schema's voor de ervaring van de lerende. Constructivistisch onderwijs is gebaseerd op de overtuiging dat leren plaatsvindt als leerlingen actief betrokken zijn bij een proces van betekenis en kennisconstructie, in tegenstelling tot passief informatie ontvangen. Leerlingen zijn de makers van betekenis en kennis.

Algemene vorming (waaronder zowel jargon als vage termen)

Benadering in onderwijs - een set principes voor het onderwijs en, in bredere zin, een vorm van interactie met leerlingen dat hun leren faciliteert. Het kan beschreven worden in termen van een vastgestelde theorie in wiskundeonderwijs, of informeler door principes te noemen gebaseerd op overtuigingen over de aard van wiskundekennis en het leren ervan.

Lesmethode - omvat de principes en methodes gebruikt voor instructie, om geïmplementeerd te worden door docenten om de gewenste leeropbrengst te bereiken bij leerlingen. Deze methodes zijn deels vastgesteld door de vakinhoud die geleerd moet worden (bijv. vierkantsvergelijkingen), en deels door wat aangenomen wordt of bekend is over de leerling (bijv. bekendheid met vierkantswortel, interesse in het onderwerp, zich kunnen concentreren en zelfstandig kunnen werken). Lesmethodes waaronder colleges, begeleiding, en het organiseren van het werk van leerlingen (met klassenbesprekingen, groepsprojecten, werken in duo's, etc.).

Leeropbrengst - een verwachting van de kennis of vaardigheden van de leerling opgedaan na het leren. Dergelijke verwachtingen zijn vaak nogal impliciet. We zien dat docenten *leeropbrengst* alleen gebruiken als ze er expliciet over zijn - bijvoorbeeld in de voorbereiding, lesoverdracht en beoordeling.

Traditioneel onderwijs - een term (niet een aanpak!) die refereert aan lang vastgestelde gebruiken die langdurig in school gebruikt werden, vaak zonder ze expliciet te benoemen. Een aantal vormen van onderwijsvernieuwing stimuleren de aanname van alternatieve onderwijspraktijken, bijvoorbeeld het promoten van een toegenomen focus op de behoeftes en zelfbeheersing van leerlingen. Vele hervormers beweren dat zij tegenstander zijn van traditionele docentgerichte methodes die zich richten op automatiseren en memoriseren. Sterker nog, “traditioneel” wordt vaak met weinig precisie gebruikt.

Passief leren - een leer- of instructiemethode waarbij leerlingen informatie ontvangen van de docent en dat zich eigen maken, vaak door een vorm van memoriseren of automatiseren, vaak zonder feedback van de docent aan de lerende.

Automatiseren - memorisatietechnieken gebaseerd op repetitie. Het idee is dat iemand in staat is om snel methodes of feiten te herinneren des te meer het herhaald wordt. Automatiseren wordt vaak gepresenteerd als onvoldoende en in tegenstelling tot alternatieven met aantrekkelijke namen als betekenisvol leren, associatief leren, en actief leren.

Actief leren - leren wat gebaseerd is op de eigen acties en initiatief van leerlingen, waaronder een deelname in de organisatie en evaluatie van hun leren.

Studentgericht leren (leerlinggericht onderwijs) - wat bereikt dient te worden door lesmethodes die de focus van instructie verschuiven van de docent naar de leerling. Het idee is om de leerling autonomie en onafhankelijkheid te laten ontwikkelen door meer verantwoordelijkheid voor het leerplan bij de leerlingen te laten.

Onderzoekend leren - een vorm van actief leren die naar voren komt uit het beantwoorden of stellen van vragen, problemen of scenario’s - in plaats van simpelweg vastgestelde feiten over te nemen of een vertrouwd pad tot kennis na te jagen. Het proces wordt vaak bijgestaan door een facilitator. Onderzoekers zullen problemen en vragen identificeren en onderzoeken om hun kennis of oplossingen te ontwikkelen. Onderzoekend leren omvat probleemgericht leren, en wordt over het algemeen gebruikt in kleinschalige onderzoeken en projecten, alsook in research.

Ontdekkend leren - een techniek van onderzoekend leren, soms gepresenteerd als een constructivistische benadering van onderwijs. Ontdekkend leren vindt plaats in probleemoplossende situaties waar de leerling verder gaat op zijn eigen ervaring en voorkennis en is een instructiemethode waarin leerlingen samenwerken met hun omgeving door objecten te verkennen en manipuleren, worstelen met vragen en tegenstellingen, of experimenten uitvoeren.

Scaffolding (instructie-scaffolding) - steun gegeven tijdens het leerproces wat afgestemd is op de behoeftes van de leerling met de intentie de leerling te helpen zijn/haar leerdoelen te bereiken. Het combineert het verlenen van ondersteuning (bronnen, uitdagende taken, en richtlijnen), het geven van advies en bieden van coaching. Als in de constructie van gebouwen, de steun (de steiger of scaffold) wordt geleidelijk verwijderd naarmate de leerlingen autonome leerstrategieën ontwikkelen.

Heuristiek - een aanpak voor het oplossen van problemen, leren, of ontdekken die een praktische methode toepast die niet gegarandeerd optimaal of perfect is, maar voldoende is voor de directe doelen.

Inzicht - begrip van oorzaak en gevolg binnen een specifieke context of een plotselinge ontdekking van de juiste oplossing volgend op onjuiste pogingen gebaseerd op proefondervindelijk onderzoek. Oplossingen geassocieerd met inzicht zouden meer solide zijn dan oplossingen zonder inzicht.

Aha! moment (Eureka-effect) - refereert aan de veelvoorkomende menselijke ervaring van plotseling een eerder onbegrijpelijk probleem of concept begrijpen. In een aantal gevallen hebben intuïtie en geheugen invloed op zulke effecten, welke echter vaak nogal onverklaarbaar zijn.

Begrip - relatie tussen de kenner en een object van begrip. Over het algemeen is begrip een handige maar nogal vage term; voor een docent, “rekenen begrijpen” kan gebruikt worden als een snelle manier om een prestatie die meer expliciete criteria nodig heeft te karakteriseren, en over het algemeen is het preciezer zijn over “begrip” een belangrijk doel van theoretische kaders over onderwijs en leren.

Oplossen van problemen - het behalen van een doel in een situatie wanneer het juiste pad of een oplossing niet automatisch herkend wordt door de lerende. Sommige vragen kunnen een probleem zijn voor de ene leerling (die niet direct een oplossingsmethode weet) maar niet voor een ander (die wel zo’n methode kent). Met andere woorden, het oplossen van problemen kan afhangen van bepaalde omstandigheden van de leerling.

Probleemgericht leren (PBL) - een leerlinggerichte pedagogiek waarin leerlingen leren over een onderwerp door de ervaring van het oplossen van een probleem.

Theorie van didactische situaties

Institutionele kennis (soms *publieke, gedeelde* of *officiële kennis* genoemd) - kennis gepresenteerd in tekstboeken, vakbladen en bronnen, wat een synthese of het resultaat biedt van verschillende wiskundige activiteiten. Makkelijk te observeren aangezien het expliciet is. Sommige talen hebben een specifieke term voor institutionele kennis - bijvoorbeeld, in het Frans wordt het *savoir* genoemd.

Persoonlijke kennis (soms *individuele kennis* genoemd) - kennis die leerlingen vergaren terwijl ze werken aan een wiskundig probleem (milieu). Vaak lastig te deduceren uit observaties aangezien het impliciet kan zijn, vooral in het geval van individueel werk. Sommige talen hebben een specifieke term voor persoonlijke kennis - bijvoorbeeld, in het Frans wordt het *connaissances* genoemd.

Didactische situatie - een onderwijs- en leersituatie waarin de docent expliciet de moderator is.

Didactisch milieu - de omgeving waarmee de leerling werkt om nieuwe kennis te vergaren. Het bestaat uit een probleem, artefacten zoals pen en papier, liniaal, rekenmachine, CAS-tool (Computer Algebra Systemen), een puzzel etc.; in didactische situaties betreft het ook input van de docent en andere leerlingen. Leren wordt gemodelleerd als de aanpassing, door leerlingen, van hun persoonlijke kennis aan het didactische milieu.

A-didactische situatie - interactie van de leerlingen met het milieu (een wiskundig probleem) zonder de inmenging van de docent.

Doelkennis - een wiskundige stelling, methode of begrip dat de docent stelt als het leerdoel voor haar leerlingen, in een didactische situatie. (Een didactische situatie is altijd een situatie *voor* iets - namelijk, een doelkennis, bekend bij de docent, maar, in eerste instantie, niet bij de leerlingen.

Overdrachtsfase - fase waarin de docent het milieu uitdeelt aan de leerlingen. Overdracht refereert aan de overdracht van verantwoordelijkheid naar leerlingen voor het oplossen van het probleem, of minstens een poging daartoe. Soms zijn er meerdere overdrachten nodig om de doelkennis te bereiken; hoewel dit zou moeten gebeuren op een gecontroleerde manier om onnodig fragmenteren of bagatelliseren van het probleem te voorkomen aangezien dit kan leiden tot minder bereiken dan de doelkennis (zie ook *Didactisch contract*).

Actiefase - fase waarin leerlingen autonoom deelnemen aan een probleem.

Formuleringsfase - fase waarin de leerlingen expliciet de uitkomsten van de actiefase formuleren (eerste ideeën, hypotheses of strategieën om het probleem op te lossen, meer of minder generieke oplossingen).

Validatiefase - fase waarin de leerlingen hun strategieën of hypotheses testen tegen het milieu, om de validiteit van hun methodes en oplossingen vast te stellen.

Institutionaliseringsfase - fase waarin de docent direct de institutionele kennis geeft. In sommige vormen van onderwijs, zoals bij colleges, kan het helemaal vanzelf gaan. In andere vormen, zoals de ontwerpen binnen TDS vaak ontwikkeld worden, hangt het nauw samen met voorgaande fases zodat de persoonlijke kennis bereikt door de leerlingen slechts geherformuleerd wordt in deze fase, en expliciet herkend als consistent met officiële kennis, gegrond in de (school)instelling.

Didactisch contract - de reeks van wederzijdse verwachtingen tussen docenten en leerlingen, wat betreft hun respectievelijke verantwoordelijkheden in een concrete didactische situatie (of een deel daarvan). Het contract is meestal impliciet en we kunnen die effecten alleen observeren in de acties van de docenten en leerlingen. Sommige van deze effecten zijn nogal algemeen en frequent in wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld de volharding van leerlingen dat docenten de antwoorden moeten bieden als ze deze niet direct vinden, of de neiging van docenten om te voldoen aan deze vraag in meer of mindere bedekte manieren, bijvoorbeeld door het geven van "hints" of door de originele opdracht te beperken. TDS benoemt en onderzoekt een aantal van de meest voorkomende effecten, en het is van groot belang voor de docenten en onderzoekers om bekend te zijn met deze classificatie; geïnteresseerde lezers worden verwezen naar Brousseau (1997), hoofdstuk 1 en 5.

Didactisch engineering - een onderzoeksmethodologie gebaseerd op het gecontroleerde ontwerp en experimenteren met onderwijsreeksen en aannemen van een interne valideringswijze gebaseerd op de vergelijking tussen de *a priori* en een *a posteriori* analyses hiervan. Echter, sinds de opkomst hiervan in de vroege jaren '80, wordt de uitdrukking didactisch engineering ook gebruikt voor het aanduiden van ontwikkelingsactiviteiten verwijzend naar het ontwerp van educatieve bronnen gebaseerd op onderzoeksresultaten of -constructies en op het werk van didactische ingenieurs. (Bron: Encyclopedie van Wiskundeonderwijs).

Realistisch Wiskundeonderwijs

Realistische situatie - refereert aan een situatie die "echt" is voor de leerling, in het opzicht dat het objecten, begrippen etc. betreft die bekend zijn voor de leerling. De situatie is logisch voor de leerlingen en zorgt dat ze zich op hun gemak voelen om te denken aangezien het voortborduurt op hun voorkennis. Het kan verband houden met het alledaagse (werkelijke) leven, maar dat is niet noodzakelijk.

Rijke (structuur of context) - geeft de ruimte aan verschillende benaderingen of oplossingen, verbanden leggend met diverse aspecten van de kennis van de leerling, breder bruikbaar dan de situatie waarin het geïntroduceerd is.

Mathematiseren - gehele organisatieactiviteit van een wiskundige waaronder het creëren van axiomatische systemen, formuleren, vormen van betekenisvolle netwerken van concepten en processen, construeren van algoritmes, representeren en vereenvoudigen, etc.

Anti-didactische inversie - het eindpunt van het werk van een wiskundige nemen als een startpunt voor het lesgeven in wiskunde.

Emergente modellen - opbouw van mentale schema's bij concepten en processen in de gedachten van een leerling gerelateerd aan een probleemsituatie. Modellen van informele wiskundige activiteit ontwikkelen in modellen voor wiskundig beredeneren.

Begeleide heruitvinding - het proces waarin leerlingen een wiskundig concept in een probleemsituatie opnieuw construeren en ontwikkelen met de hulp (begeleiding) van boeken, peers of een docent.

Horizontaal mathematiseren - overdracht van een probleem uit de werkelijkheid naar een wiskundige discours.

Verticaal mathematiseren - ontwikkeling van een wiskundige methode of theorie voor het oplossen van een wiskundig probleem.

Didactische fenomenologie - de kunst van het vinden van fenomenen, contexten of probleemsituaties die erom vragen om georganiseerd te worden met wiskundige middelen en leerlingen uitnodigen om beoogde wiskundige concepten te ontwikkelen.