Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

MERIA HÅNDBOG I UNDERSØGELSESBASERET MATEMATIKUNDERVISNING

(denne side er med vilje blank)

MERIA HÅNDBOG I UNDERSØGELSESBASERET MATEMATIKUNDERVISNING

HOVEDREDAKTØR
Carl Winsløw

TEKST SKREVET AF
Britta Jessen (afsnit 1 og 3), Michiel Doorman (afsnit 2), Rogier Bos (afsnit 4)

GENNEMLÆSNING OG REDAKTION
Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Paul Drijvers, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw

DESIGN OG LAYOUT
Irina Rinkovec

FIGURER
Rogier Bos, Matija Bašić, Ivan Kokan, Eva Špalj

OVERSÆTTELSE TIL DANSK
Easy Translate med justeringer af Jeanettte Axelsen, Niels Grønbæk og Carl Winsløw

Project MERIA, August 2017
www.meria-project.eu

(denne side er med vilje blank)

Indholdsfortegnelse

Indledning

Denne håndbog danner det teoretiske grundlag for MERIA-projektet, og dens formål er at understøtte udviklingen af scenarier og undervisningsmoduler samt analysen og evalueringen af effekten heraf.

Formålet med MERIA er at fremme brugen af relevante, interessante og anvendelige matematikaktiviteter i de ældste folkeskoleklasser og på gymnasieniveau. Projektets hovedhypotese er, at sådanne aktiviteter vil engagere eleverne i mere seriøst arbejde med matematikken end opgaveløsning med prædefinerede metoder. Faktisk kan "opgaveløsningsmetoderne", som anvendes mange steder i almindelig matematikundervisning (herunder endda på universitetsniveau), være hovedårsagen til mange elevers opfattelse af matematikken som uinteressant (kedeligt rutinearbejde), irrelevant (i hvert fald for dem), og ligegyldig (undtagen i forhold til at bestå en eksamen). Alternativet, som foreslås og undersøges i dette projekt, kan overordnet kaldes for *undersøgelsesbaseret matematikundervisning*, hvor opgaver erstattes af forskellige former for "undersøgelsesaktiviteter". Vores vigtigste opgaver er således at udvikle sådanne aktiviteter, afprøve dem i praksis og udbrede dem til lærere.

Projektet er baseret på seriøs og visionær forskning i, hvordan disse opgaver kan gennemføres. Vi har derfor i denne bog samlet en præsentation af interessante tilgange og idéer fra forskningslitteraturen. Bogen er opdelt i 4 kapitler:

- Kapitel 1 forklarer begrebet "undersøgelse" i matematikundervisningen, både fra et historisk perspektiv og hvordan man kan definere det i dag (generelt og i bred forstand).
- Kapitel 2 foreslår nogle overordnede strategier for, hvordan man kan indføre undersøgelse som en elevaktivitet i klasseværelset.
- Kapitel 3 og 4 præsenterer to konkrete - og veletablerede - forskningsprogrammer til udvikling af undersøgelsesbaseret matematikundervisning:
    - Teorien om didaktiske situationer i matematik, hvis formål er at sætte elever i "forskningssituationer" (ligesom matematikere), hvor forløbet består af: *aktivitet, formulering af hypotese og validering/bevisførelse*.
    - "Realistisk matematikundervisning", hvor de matematiske begreber er bygget op omkring elevernes arbejde med problemer fra sammenhænge, som er virkelighedsnære for dem gennem en "matematisering" af disse sammenhænge.

Der vil være referencer til litteraturen undervejs for dem, som måtte ønske at gå mere i dybden med et særligt emne. Der er en liste over det vigtigste kildemateriale for dette projekt i bilagene. Bag i bogen findes også en liste over de vigtigste fagtermer, som anvendes i denne tekst.

1. Hvad er undersøgelsesbaseret matematikundervisning?

Undersøgelse kan defineres som "undersøgelsen af et problem". Her ligger der i ordet "undersøgelse", at indsatsen, der skal til for at løse problemet, er forholdsvis selvstændig: ikke styret af andre og følger ikke en bestemt foruddefineret metode. Undersøgelsesbaseret matematikundervisning (IBMT, 'Inquiry Based Mathematics Teaching') er således en undervisningstilgang, som giver eleverne mulighed for at deltage i en aktivitet, som fører dem til at tilpasse deres eksisterende, eller skabe ny, matematisk viden. Denne form for undervisning skal skabe grundlaget for elevernes forståelse af betydningen og fundamentet for matematik i de ældste klasser i folkeskolen og på gymnasieniveau. Den er særlig frugtbar, når den udspringer af elevens egen aktivitet og indsats.

Dette kapitel beskriver IBMTs opståen og dens betydninger i detaljer. Faktisk har forskningen i matematikundervisning allerede produceret forskellige og også veletablerede begrebsliggørelser af ovenstående idé, dvs. metoder til undervisning i matematik, hvor elever stiller spørgsmål, udforsker, fremsætter hypoteser og argumenterer om matematiske idéer. Men begrebet IBMT er af nyere dato.

For at kunne skelne mellem IBMT og andre former for matematikundervisning, må vi frem for alt definere, hvad der menes med ordet "problem", hvordan det er forskelligt fra "opgave" eller "øvelse", og hvorfor det at løse et problem ikke er det samme som at løse en opgave. Endelig vil vi diskutere betydningen af, at eleven stiller spørgsmål til problemet og relateret faglig viden. Forskningen viser, at det er afgørende, at eleverne arbejder med problemet eller situationen selv, da dette kan få dem til at formulere hypoteser, udforske og eksperimentere med deres viden samt at formulere løsninger baseret på deres handlinger.

Før vi vender tilbage til at beskrive delelementerne i IBMT, vil vi kort fortælle, hvordan og hvorfor IBMT er blevet den altoverskyggende tilgang til udvikling af matematikundervisning i nyere tid. Det skal naturligvis nævnes, at MERIA ikke er det første europæiske initiativ til fremme af IBMT. I løbet af det seneste årti har EU finansieret flere større projekter med det formål at udvikle, implementere og evaluere "undersøgelsesbaseret undervisning i naturfag" på forskellige niveauer i uddannelsessystemet (Artigue & Baptist, 2012; Mass & Artigue, 2013; Ropohl, Rönnebeck, Bernholt, & Köller, 2016). De fleste af disse projekter inkluderede også matematikundervisningen. Begrebet "undersøgelsesbaseret undervisning" er dog mere naturligt og udbredt inden for undervisning i naturfag end i matematikundervisningen. I matematikundervisningen, er der blevet udviklet lignende idéer og tilgange under betegnelser som f.eks. problemløsning, matematisk eksperimenteren eller matematiske modeller. Men i undervisningen i naturfag og matematikundervisningen er der forskellige tilgange til, hvordan denne type undervisning bør udvikles. Denne håndbog dækker to af disse tilgange til matematikundervisning i detaljer (kapitel 3 og 4). Ifølge Fibonacci-projektet trækker undersøgelser i naturfag ofte på sansemæssige erfaringer (Artigue et al., 2012, p. 9). Der er mange naturvidenskabelige begreber, som relaterer til sansemæssige erfaringer såsom hastighed, tid, lys, kraft, pH værdi, skiftende sæsoner, osv. Disse erfaringer kan studeres yderligere i cykliske processer, f.eks. den såkaldte 5E-model. 5E-modellen henviser til faserne i den undersøgelsesbaserede undervisning, som eleverne skal gennemgå i forhold til den viden eller de idéer, som skal udfolde sig under en undersøgelsesproces: Fang, Forsk, Forklar, Forlæng og Feedback (Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate) (Bass, Contant & Carin, 2009, p 91). I 5E-modellen kan sansemæssige erfaringer som kraft eller tid, økosystemer eller kemiske reaktioner fra dagligdagen være udløseren til, at eleverne bliver interesseret i en mere systematisk undersøgelse af et fænomen eller årsagsbestemte relationer. Disse undersøgelsesprocesser kan føre til, at eleverne opbygger viden om naturvidenskabelige love.

Omvendt kan man indvende, at matematisk viden oftest opstår fra et mere teoretisk fundament. Det er klart, at der i mange tilfælde kan opsættes induktive ræsonnementer baseret på "eksperimenter" som f.eks. for talmønstre eller specifikke eksempler på et mere overordnet princip. Men som det fremføres af Artigue og Baptist (2012), så udgør matematikkens kumulative natur en udfordring i forhold til at overføre begrebet undersøgelse direkte fra den naturvidenskabelige undervisning (Artigue & Baptist, 2012). I den naturvidenskabelige verden, bliver en hypotese (fremsat af en forsker eller en elev) valideret gennem eksperimenter, mens det for matematikkens vedkommende gælder, at valideringen kræver et bevis, som er baseret på deduktiv argumentation.

I denne bog vil vi præsentere to forskellige tilgange til Undersøgelsesbaseret matematikundervisning (IBMT). En af dem giver eksempler på, hvordan elevers egne oplevelser kan være et afsæt for en undersøgelsesproces. Den kaldes "Realistisk Matematikundervisning" (RME), og blev oprindeligt udviklet af Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991). Den anden tilgang er Teorien om Didaktiske Situationer (TDS), som oprindeligt blevet udviklet af Guy Brousseau (Brousseau, 1997). TDS er baseret på idéen om, at elever skaber ny viden, når de løser et problem, mens de tilpasser sig et såkaldt didaktisk miljø. Vi vil komme nærmere ind på RME og TDS i kapitel 3 og 4. I dette kapitel vil vi præsentere nogle kernebegreber i IBMT for at belyse dens oprindelse, berettigelse (*hvorfor* det er vigtigt at beskæftige sig med den) og begrænsninger (hvilke udfordringer der kan være).

IBMTs oprindelse

Det er mere end et århundrede siden, at det første gang blev formuleret på skrift, at undervisningen generelt skulle relatere til elevernes oplevelser og erfaringer og skulle have fokus på elevernes aktiviteter. Undervisningsforskeren John Dewey sættes ofte i forbindelse med talemåden "learning by doing" (at lære ved at praktisere). Efter hans overbevisning skulle undervisning i højere grad foregå med udgangspunkt i elevernes aktiviteter, og hvordan de kan lære af dem (Dewey, 1902). Dewey (1938) understregede den potentielle vigtighed af undersøgelsen og dens rolle i indlæring og undervisning - særligt på det naturvidenskabelige område. Han opfattede i høj grad matematikken som et værktøj eller et sprog, som kunne bruges til at sætte komplekse data i system eller udføre systematisk behandling af resultater af undersøgelsesprocesser - f.eks. resultaterne af elevernes eksperimenter med naturlove indenfor fysik eller biologiske systemer. Selvom Dewey ikke kom med konkrete idéer til, hvordan man kunne lave undersøgelsesbaseret matematikundervisning, er hans idéer senere hen blevet brugt af mange matematikundervisere.

Det, som Dewey vendte sig imod, var en lang tradition af vidensoverførsel fra lærer til elev, som er ligeså gammel som faget selv. For mange matematikere betød det at undervise, at repetere, og at få eleverne til at recitere en given tekst eller imitere læreren, mens man løste matematiske problemer. Det samme gælder for de mere praktiske og basale sider af matematikken som vedrører udregningsteknikker. Endnu i dag er meget matematikundervisning baseret på repetition af viste teknikker og indøvelsen af disse gennem endeløse rækker af ens regnestykker. I mange skoler er der en fast skabelon for matematikundervisningen, som består i, at læreren forklarer nogle teknikker (f.eks. en formel, en regel, en metode etc.), hvorefter han giver eleverne nogle typiske eksempler på, hvordan denne nye viden kan anvendes i løsningen af en bestemt slags matematikopgaver, og endelig giver han eleverne nogle opgaver, så de kan øve sig i, hvad læreren gjorde (Schoenfeld, 1988). Et eksempel kunne være, når elever bliver præsenteret for definitionen af andengradspolynomier, og hvordan man finder rødderne ud fra en ligning

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Eleverne bliver præsenteret for formlen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Derefter viser læreren eleverne, hvordan man finder rødderne i et polynomium, f.eks. $2x^2 + 2x - 12$ ved at bruge den viste formel. Han giver måske flere eksempler, inden han beder eleverne om at løse en række lignende opgaver. På den måde imiterer eleverne lærerens handling, men det er ikke sikkert, at de forstår meningen med at finde rødder, eller metodens berettigelse. Beder man derimod eleverne om at løse ligninger, hvor polynomiet har én eller ingen rødder, kan det skabe en mulighed for at eleverne begynder at spørge ind til meningen med polynomiers rødder og løsning af ligninger.

Gentagne øvelser kræver bare af eleverne, at de imiterer læreren, hvilket de måske ofte gør uden at se eller skabe nogen ræsonnementer eller mening med opgaverne eller teknikkerne, som bruges til at løse dem (Schoenfeld, 1988). Reelt kan eleverne - over tid - komme til at opfatte matematik som et temmelig meningsløst sæt af teknikker, som skal læres gennem imitativ indlæring. Denne type undervisning forsømmer at give eleverne oplevelser med mange vigtige sider af matematikken såsom løsning af komplekse problemer, opbygning af sammenhængende vidensstrukturer, teser og bevisførelse, særlige eksperimenter osv.

Det kan indvendes, at simpel vidensoverførsel og at lære elever at løse standardopgaver har vist sig at være tilstrækkeligt for mange tidligere gymnasieelever gennem det sidste århundrede. Men i dag er det i mange lande både flere og meget mere forskelligartede grupper af elever, som vælger gymnasievejen. At undervise dem kræver mere gennemarbejdede tilgange underbygget af forskning i matematikundervisning. Der har fundet forskning i matematikundervisning sted i århundreder, og den startede med, at lærere udvekslede tanker omkring deres undervisning og udviklede undervisningsteknikker baseret på deres egne erfaringer (Kilpatrick, 2014). I dag er det nødvendigt at lære matematik på et dybere forståelsesniveau og med en mere kognitiv aktivering end tidligere for at leve op til de moderne samfundskrav. Før i tiden var det almindeligt at forlade skolen straks efter grundskolen for at komme ud på arbejdsmarkedet. Datidens arbejdsmarked krævede ikke så meget andet end praktiske matematiske kompetencer som regning og at kunne gentage fastlagte procedurer. I dag kræver mange jobs og højere uddannelser, at elever kommer ud af gymnasiet med viden og kompetencer i basal regning, statistik, funktionsbegrebet osv. Dette stigende antal elever på gymnasieniveau, nogle med meget lidt motivation for at lære matematik, udgør en særlig udfordring for matematikundervisningen. Disse elever er muligvis ikke i stand til at modtage overført viden ligeså let som tidligere generationer, hvilket er årsagen til, at der er brug for flere undersøgelsesbaserede tilgange. At forstå, hvordan elever tilegner sig matematisk viden, er af stadig interesse for forskere i matematikundervisning. Matematikdidaktikeren Mogens Niss formulerer rationalet bag denne interesse således:

> Hvis vi forstod de mulige veje til at lære matematik og forhindringerne, som kan blokere disse veje for almindelige elever, ville vi få en bedre forståelse for, hvad matematisk viden, indsigt og evne er (og ikke er), og hvordan det bliver skabt, gemt og aktiveret, og hermed hvordan det kan fremmes (Niss, 1999, s. 4).

Gennem det 20. århundrede er der blevet udviklet forskellige tilgange til denne interesse, men en der går igen er, at lade undervisningen inspireres af de måder, som matematikere tænker på, og hvordan de lærer og udvikler matematikken.

I starten af det 20. århundrede samlede matematikerne Fehr, Laisant, Hadamard og andre systematiske optegnelser over, hvordan de og deres kolleger udviklede ny matematisk viden - for at beskrive forskningsaktiviteten og for at forskere kunne være en inspiration for elevernes engagement i at lære matematik (Kilpatrick, 2014). Denne idé sås også i de første reformbevægelser i forhold til gymnasiepensum, hvor den tyske matematiker Felix Klein (i begyndelsen af det 20. århundrede) introducerede et reformprogram for læreruddannelsen, som lagde vægt på praktiske instruktioner, rumlig intuition og en funktionel tilgang til matematik (Kilpatrick, 2008). Klein spillede en vigtig rolle i den tidlige udvikling af forskningen i matematikundervisning, og specielt for forholdet mellem forskning i matematik, undervisning i matematik og forskning i matematikundervisning. På mange og ofte indirekte måder har hans idéer stadig indflydelse på matematikundervisningen på gymnasieniveau. Den næste reformbølge, som kan relateres til IBMT, er introduktionen af problemløsningen i matematikundervisningen i midten af 1980'erne. I det følgende afsnit vil vi betragte dette som en af grundstenene for undersøgelse i matematik.

Kendetegnene for undersøgelsesprocesser

I dette afsnit præsenterer vi et overblik over idéer og begreber, som har styret udviklingen i IBMT gennem de sidste 100 år. Kernebegrebet er et *problem*.

I IBMT er et problem mere end en bestemt opgave, øvelse eller aktivitet. Et problem er åbent, forstået på den måde, at det fordrer, at eleverne eksperimenterer, fremsætter hypoteser om mulige løsninger, kommunikerer hypoteser og mulige løsningsstrategier og måske stiller yderligere spørgsmål, som skal undersøges som en del af problemløsningen.

Et eksempel på et problem kunne være følgende:

> "Vi har en tilfældig trekant med sidelængderne *a, b* og *c*. Hvis siderne forlænges lige meget, hvor meget større bliver så arealet af den forstørrede trekant i forhold til den første?"

Afhængigt af sammenhængen, som problemet bliver præsenteret i, giver det eleverne forskellige muligheder for aktiviteter, hvorigennem de kan beskrive problemet og finde løsningen. Der findes flere løsningsstrategier for dette problem afhængigt af elevernes forhåndsviden om trekanter, sidemål, trekanters areal, ligedannede trekanter og trigonometriske størrelsesforhold. Eleverne kan eksperimentere med forstørrelse vha. addition og multiplikation. De kan simpelthen lave et stort antal trekanter, forstørre dem, indsamle resultater og formulere hypoteser vedrørende forstørrelse af arealer. Derudover kan eleverne undersøge specielle typer af trekanter (f.eks. retvinklede trekanter) og matematisk udlede en hypotese for, hvor meget større det forstørrede areal vil blive. Forskellige løsningsstrategier kan yderligere sammenlignes, diskuteres og endda valideres og afprøves på nye trekanter. I et IBMT-perspektiv er det en fordel, at elever kan undersøge forskellige og personlige idéer, sammenligne, sammenkæde og evaluere disse mhp. at skabe mere holdbar viden. Dette betyder, at eleverne ved mere end bare at udregne arealet på en trekant. De ved, hvordan de kan kombinere ny viden med andre relevante områder for at løse åbne problemer. Den viden, som er skabt med dette problem, vedrører symmetrier og kortlægning mellem geometriske former.

I matematik vil de handlinger og erfaringer, som læring ifølge Dewey skal opstå af, oftest være motiveret af forsøg på at løse et givent problem. Det viste trekant-problem er et eksempel. Problemer kan variere i form, oprindelse, sværhedsgrad, antallet af mulige løsningsstrategier osv. De kan også have forskelligt potentiale til at skabe nysgerrighed og kreativitet blandt eleverne. Dette er vigtigt som katalysator for elevernes spørgelyst og eksperimenteren med faglig viden.

Andre eksempler fra skoledagen kan være dynamisk brug af computerprogrammer og modelleringssituationer uden for matematikken. Med et CAS-værktøj (CAS, Computer Algebra System) eller et dynamisk geometriprogram med et grafisk miljø, kan eleven tegne grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$. Computerværktøjerne giver eleven mulighed for at flytte eller vippe grafen op eller ned. Eleven kan undersøge, hvad der sker med grafen, når han ændrer på koefficienterne. Dette problem kan være drevet af nysgerrighed og hjælpe eleverne med at udvikle viden om den grafiske betydning af koefficienterne a og b. ICT-teknologi og forskelligt software generelt spiller en stor rolle i udvikling og underbygning af IBMT (se f.eks. Artigue & Baptiste, 2012, s. 10).

Elever kan møde mange andre spørgsmål, hvor der vækkes et behov for viden, som f.eks. "Kan alle tal skrives som et produkt af primtal? Kan de skrives som en sum af primtal?" eller "Hvordan kan jeg beskrive min cykels acceleration på vej til skole, når jeg har målt farten på bestemte tidspunkter?" Disse spørgsmål eller problemer kræver af eleverne, at de udvikler ny viden. Problemerne kan opstå ud af rent matematiske problemstillinger, eller de kan blive affødt af oplevelser eller handlinger i den virkelige verden. Problemer, problemformulering og problemløsning er kerneelementer i undersøgelsesprocessen i matematikundervisningen, og spiller en vigtig rolle i litteraturen om matematikundervisningen. Vi vil nu give et kort overblik over, hvordan man har arbejdet med disse begreber i matematikundervisningen gennem de sidste hundrede år.

Problemløsning som en måde at lære på

Lige så vigtig som identifikationen af problemet er i IBMT, lige så vigtig er løsningen af problemet. Selvom *problemløsning* er blevet kerneelementet i matematikpensummet i mange lande fra 1980'erne, så var det ikke et nyt fænomen i litteraturen på den tid. I 1945 udgav George Pólya en bog "How to solve it?", som betragtes som en klassisk reference for problemløsningstilgange i matematikundervisningen (Artigue & Blomhøj, 2013, p. 802). Bogen beskriver problemløsning som en aktivitet, som matematikere beskæftiger sig med i forskningsprocesser. Der blev lagt vægt på problemets og heuristikkompetencers rolle i problemløsningen. Heuristikkompetencer trækker på faglig viden og strategier, som er nødvendige for at håndtere ikke-rutineprægede problemer. Trekantproblemet er et sådant problem, et ikke-rutinepræget problem i skolesammenhæng. Det kan løses ved at anvende faglig viden som f.eks. arealet af en trekant, men det kræver også at eleverne udvikler viden om lignende trekanter, og at de kombinerer kendte strategier og viden på nye måder. Pólya foreslår i sit arbejde, at eleverne bruger strategier som at finde et modeksempel, at tegne en situation f.eks. med en graf, at undersøge specialtilfælde, at gætte og efterprøve, at bevise ved modstrid etc. Hvad angår trekantproblemet, kan et godt sted at starte være at undersøge særlige tilfælde som bestemte trekanter eller retvinklede trekanter. Den viden, der bruges, kan f.eks. være en definition, en regel, en metode. Disse er alle velkendte elementer i matematik på universitetsniveau. Pólyas arbejde giver imidlertid ikke nogle systematiske svar på, hvordan disse aktiviteter kan gennemføres på forskellige niveauer i undervisningssystemet.

Schoenfeld er en af de forskere, som var optaget af at føre Pólyas ideer om matematikundervisningen ud i livet på en systematisk måde. Han kritiserede brugen af Pólyas arbejde i 1980'erne for at være forsimplet (1992, s. 352). Navnlig fremhæver han, at man ikke lagde nok vægt på et helt centralt element som elevernes udvikling af heuristikkompetencer. Schoenfeld anfører, at før elever kan gå i gang med at løse problemer, er det nødvendigt at kunne skelne mellem problemer og opgaver. Opgaver kan løses med *kendte løsningsstrategier*, hvorimod problemløsningsaktiviteter kræver udvikling af ny viden, eller at man kombinerer metoder og viden på nye måder. Schoenfeld identificerer nogle vigtige elementer i denne proces, som kræver, at eleverne kan trække på nogle ressourcer. Ressourcer er "matematisk viden, som personen har, og som kan bringes i spil i forhold til det givne problem; intuition og uformel viden, som relaterer til området, fakta, algoritmiske procedurer, rutinemæssige ikke-algoritmiske procedurer, forståelse (faktuel viden) af de vedtagne regler for arbejdet inden for området”. Dette er således, hvad elever skal lære at trække på i problemløsningsprocessen: deres tidligere erhvervede viden, kompetencer og færdigheder, og at kombinere dem med intuition og en hypotese som forløber for det endelige svar. For at kunne gøre dette, skal eleverne trække på deres heuristikkompetencer, som inkluderer "strategier og teknikker til at arbejde med ukendte eller ikke-standard problemer; tommelfingerregler for effektiv problemløsning, herunder: tegne figurer, bruge passende notesystemer, udforske lignende problemer, omformulere problemer, arbejde baglæns, afprøvnings- og valideringsprocedurer" (Schoenfeld, 1985, s. 15). Denne definition af heuristikkompetencer har mange fælles træk med Deweys beskrivelse af matematikkens rolle i undersøgelsesprocesser, men den går også et skridt videre. Ifølge Artigue og Blomhøj (2013), deler de mange af kendetegnene for tilgange til undersøgelsesbaseret matematikundervisning, såsom undersøgelser, hypoteser, systematisk eksperimenteren, samarbejde, kommunikation, repræsentation af problemet på forskellige måder osv., alt sammen med det formål, at eleverne opnår ny viden. Det er også vigtigt at bemærke, at heuristikkompetencer indeholder en udforsknings- og nysgerrighedsdrevet tilgang til matematisk aktivitet.

Det kan alt sammen ses afspejlet i problemet med forstørrelsen af trekanten med dets mulige løsningsstrategier. Problemet kan løses ved at eksperimentere med konkrete materialer (at producere trekanter), overveje forskellige omformuleringer af problemet (forstørre med additions- og multiplikationsstrategier), eller man kan anskue problemet fra en abstrakt synsvinkel ved f.eks. at arbejde med en speciel slags trekant, som for eksempel en retvinklet trekant.

I IBMT er *problemløsning* en aktivitet, som eleverne forventes at deltage i. Den fordrer elevernes brug af tidligere udviklet viden, intuition, vage idéer og hypoteser mhp. at udforske og forstå et problem. Gennem eksperimenteren og nye måder at kombinere deres viden på, herunder den viden, de har samlet under deres udforskning, skaber eleverne ny viden, som skal evalueres gennem yderligere eksperimenter. Elevernes matematiske kreativitet og nysgerrighed driver problemløsningsprocessen og bliver tilmed yderligere udviklet i processen.

Det står dog stadig ikke helt klart, hvordan man skal undervise eleverne på denne måde, hvornår og hvorfor man skal iværksætte hvert enkelt element. Lærerne skal udtænke problemer, hvor eleverne kan agere matematiske undersøgere, men lærerne skal afholde sig fra at fortælle eleverne, hvad de skal gøre. Det man imidlertid gerne vil opnå med undervisningen, er ikke kun at give eleverne mulighed for at få erfaring med problemer, som er mere åbne end traditionelle opgaver, som eksemplificeret med trekantproblemet, men også at gennemgå hele den beskrevne proces for, hvordan man løser et problem.

Omfanget af vejledning i problembaseret undervisning

Allerede i 1938 plæderede Dewey for, at elevernes læringsproces skulle være forankret i elevernes interaktion med et problem. Og det bedste ville være, hvis denne interaktion kunne foregå vha. en god vekselvirkning mellem kendte og ukendte situationer, hvor den allerede erhvervede viden kunne hjælpe eleven på vej i studierne af det ukendte. For eksempel kan eleverne, baseret på hvad de allerede ved, formulere hypoteser og håndtere problemet på en systematisk måde gennem undersøgelsesprocessen. I forhold til trekantproblemet kan eleverne systematisk undersøge forholdet mellem forstørrelsen af trekanten og forstørrelsen af arealer. Eleverne kan formulere præcise hypoteser vedrørende dette forhold ud fra det særlige tilfælde med den retvinklede trekant. Hypotesen kan afprøves ved at tegne forskellige trekanter og udregne arealet af den første og de forstørrede trekanter. Baseret på de erfaringer, de drager af deres handlinger, kan eleverne udlede deres egen viden om det undersøgte problem. Mht. trekantproblemet har eleverne fået mulighed for at erhverve sig viden om ligedannede trekanter, en generel formel for arealet $A = \frac{1}{2}ab\sin C$, hvor C er vinklen mellem de to sider *a* og *b*, og en forståelse af trigonometriske forhold. For at designe undersøgelsesbaseret undervisning, må læreren således skabe scenarier, som kan hjælpe ham med at forstå, i hvilken fase eleverne trækker på allerede erhvervet viden i undersøgelsen af et problem, hvor der skabes en hypotese, og hvor den bliver afprøvet, og endelig hvor der kan skabes eller formuleres ny viden baseret på (generaliseringerne) af elevernes handlinger. Læreren fungerer i denne sammenhæng som facilitator i forhold til at skabe og guide eleverne i deres vidensopbygning (Godine et al., 2015). Læreren bør ideelt set indtage rollen som den erfarne medforsker, som guider yngre medlemmer af forskningsteamet, snarere end at spille rollen, som den der har alle svarene (Artigue & Baptist, 2012).

At understøtte elevernes arbejde med et problem i IBMT tager udgangspunkt i problemformuleringen. Formuleringen skal gøre det muligt for eleverne at udvikle en række strategier, afhængigt af hvilken viden de allerede er i besiddelse af. Den skal yderligere fremme elevernes udforskning og eksperimenteren med problemet ved herved at give dem mulighed for at opbygge ny viden. I denne proces skal læreren guide eleverne - ikke ved at give dem svar, men som en erfaren medforsker, der stiller spørgsmål og på den måde giver fremdrift til undersøgelsesprocessen.

I dag er der generel enighed om, at rigtig problemløsning er gavnligt for udbyttet af matematikundervisningen: "man får *mere* ud af processen med at løse et problem end at få svaret" (Bosch & Winsløw, 2016). Dette *mere* relaterer til de heuristikkompetencer og brugen af ovennævnte ressourcer. Det kan forekomme svært at definere, men det er tydeligt at få øje på, når man møder det. Tidligere studier antyder, at god undervisning i problemløsning handler om at skabe de rigtige relationer mellem bestemte elever og bestemte opgaver (Schoenfeld, 1992, s. 353). Forskningen har derfor i de sidste par årtier haft fokus på at identificere egnede problemer, som indeholdt tilstrækkeligt med potentiale til, at eleverne kunne bruge deres heuristikkompetencer og deres ressourcer. Der har desuden været fokus på at udvikle undervisnings- og vejledningsprincipper, som på en effektiv måde kunne få eleverne til at virkeliggøre deres fulde potentiale. I 1980'erne gik forslagene fra vejledt elevpraksis til en praksis, hvor eleverne skulle udtrykke processerne som en art *meta-refleksion* over deres egen praksis. Sådanne meta-refleksioner kunne være, at eleverne havde brug for at oversætte problemet til matematisk sprog, f.eks. i problemet med at lave en model over cyklens acceleration på vej til skole. Derudover er der brug for meta-refleksion i et problem, hvor man har en graf for en lineær funktion i et koordinatsystem, og som kræver, at eleverne samler konkrete data fra en række eksempler for at kunne formulere hypoteser for koefficienter. Undervisningsprincipper handler også om lærernes udfordringer i forhold til, hvornår de skal blande sig i elevernes aktiviteter, og hvornår de skal lade være med at give eleverne løsningssvarene, eller hvordan de kommer frem til de bedste løsningsmetoder (Schoenfeld, 1992, s. 354). Hvis læreren foreslår, at eleverne kan kigge på et bestemt tilfælde, indtegne datapunkter for at lave en lineær regression eller tegne et problem som en graf eller en geometrisk form, vil nogle elever tro, at det er den eneste måde at løse problemet på. Ikke fordi de tror, at strategien løser problemet, men fordi læreren siger det. Det er derfor svært at vejlede eller understøtte eleverne i deres arbejde uden at antyde et svar. I trekantproblemet er det ikke en let opgave for en lærer at vejlede eleverne, hvis de insisterer på kun at arbejde med konkrete eksempler. Et spørgsmål om hvorvidt deres hypotese holder generelt, kan føre til nye tilgange til problemet, men det kan også virke så overvældende, at det i virkeligheden ikke kan bruges som vejledning. Dette er den generelle udfordring i forhold til at støtte elevernes undersøgelsesprocesser i undervisningssammenhæng. Eleverne har brug for at have et afgrænset område, som de skal udføre deres undersøgelser indenfor, men hvis vejledningen er for styret, eller der er for mange restriktioner, bliver undervisningsmodellens potentiale ødelagt. Så kan eleverne ikke opbygge viden baseret på deres handlinger og deres erfaringer. Derfor kan en lærer ikke fortælle eleverne eksplicit, hvad de skal gøre. Men læreren skal samtidig sørge for, at eleven får et behov for at handle på den bestemte måde, som kan føre ham i retning af de tilsigtede læringsmål. Stilladsering skal derfor tænkes som noget andet end at give eksempler, strategier eller at stille for direkte og lukkede spørgsmål.

> Udfordringen i at stilladsere elevers undersøgelsesprocesser: med for megen styring, bliver der ikke rigtig nogen undersøgelsesproces, og læringspotentialet udebliver; men med for lidt styring kører eleverne fast og mister motivationen for at løse problemet. At give den "rigtige" mængde vejledning er en hårfin balanceakt.

Betydningen af elevers spørgsmålsformulering i deres problemarbejde

Nyere studier foreslår problemformulering som en tilgang til at involvere elever i problemløsning. Den pædagogiske idé om problemformulering er formentlig ligeså gammel som idéen om problemløsning. Ellerton (2013) henviser til Einstein og Infeld, som hævdede, at formuleringen af et problem er vigtigere end at finde løsningen, og at det er en mere krævende opgave (Ellerton, 2013, s. 88). Dette er måske en overdrivelse, men det understreger vigtigheden af at undersøge den viden, som man gerne vil gå i dybden med og lære mere om.
Problemformuleringens opståen som en ny tilgang til matematikundervisningen hænger sammen med den fornyede interesse for problemløsning i 1980'erne. Ellertons studie i involveringen af matematiklærerstuderende i problemformuleringsaktiviteter antyder, at problemformuleringen kan få en vigtig rolle i matematikpensummet (Ellerton, 2013, s. 90). Grundene til denne påstand er, at problemformulering fremmer elevernes udvikling af heuristikkompetencer og ressourcer, som bruges til problemløsning og IBMT, eller, som det formuleres af Singer, Ellerton & Cai, "Problemløsning forbedrer elevernes problemløsningskompetencer, holdninger og sikkerhed i matematik og bidrager til en bredere forståelse af matematiske begreber og udviklingen af matematisk tænkning" (Singer, Ellerton & Cai, 2013, s. 2). Ifølge Artigue og Blomhøj (2013) men også Hiebert et al. (1996), kan problemløsning som en elevaktivitet også underbygge Deweys idé om reflekterende undersøgelse, som handler om, at elever skal have lov til og endda opmuntres til at sætte spørgsmålstegn ved den viden, de bliver præsenteret for. Dette betyder endvidere, at eleverne skal opmuntres til at tænke over konsekvenserne af de problemer, som de møder i IBMT. I trekanteksemplet ville et rimeligt spørgsmål være, hvad der præcis menes med udtrykket "at forstørre en trekants sider lige meget". Men det er vigtigt, at det er eleverne selv, som kommer med svaret, f.eks. ved at eksperimentere med både additions- og multiplikationsstrategier. Dette understøtter elevernes selvstændige opbygning af viden, og her specifikt en

viden om, at additionsstrategien ikke fører til ligedannede trekanter. Dette kan videre få eleverne til at undersøge, om arealer kun kan sammenlignes i tilfælde, hvor den første og den forstørrede trekant er ligedannede. Trekantproblemet kan ligeledes få elever til at undersøge, hvordan man kan finde højden i en tilfældig trekant, når man kun kender sidelængderne som a, b og c.

Et godt problem er et åbent problem, som får eleverne til at undres, afgrænse og stille spørgsmål til den relevante faglige viden. Lysten til at stille spørgsmål er en afgørende drivkraft i undersøgelsesprocessen og skulle gerne føre til, at eleverne kan besvare deres egne spørgsmål og hypoteser.

I forhold til vejledning og understøttende materiale, er der udarbejdet en række designidéer mhp. at gennemføre problemidentifikation som en aktivitet i skolens matematik. Disse idéer spænder fra at give eleverne noget information og bede dem om at opstille problemer, som kan løses vha. den modtagne information; at bede dem løse specifikke problemer og derefter formulere lignende problemer, eller at beskrive nogle fænomener for eleverne og bede dem opstille problemer, som vedrører de beskrevne fænomener (Bosch & Winsløw, 2016). Men disse designidéer er stadig ikke helt rammende, hvis elevernes aktivitet skal afspejle matematikforskeres aktivitet, hvor nye spørgsmål opstår ud af forskernes interaktion med det relevante vidensområde, f.eks. gennem studiet af andre forskeres arbejde eller gennem egne eller kollektive problemløsningsaktiviteter. Disse aktiviteter kan føre til undren eller nysgerrighed, som giver anledning til formulering af nye problemer, hvilket driver forskningen videre. Ifølge Kilpatrick er dette ikke kun kendetegnende for forskning. Han hævder, at det helt overordnet set i det virkelige liv forholder sig sådan, at de fleste problemer formuleres af en person, som løser dem, og at matematikundervisningen bør ligne det virkelige liv i den henseende (Kilpatrick, 1987, s. 124). Den rolle, som problemidentifikation spiller i de forskellige tilgange til IBMT, varierer, men et fælles træk er at tilstræbe at få eleverne til at undres og gøre dem nysgerrige i forhold til at undersøge formodede sammenhænge og formulere hypoteser til yderligere undersøgelse.

Hvor kommer problemerne fra?

Udover litteraturen om problemløsning er der også andre teorier om matematikundervisning, som har beskæftiget sig med problemformuleringens og problemløsningens rolle i forskellige sammenhænge. Løsningen af ikke-rutineprægede problemer er hjørnestenen i flere af de tilgange til matematikundervisning, som opstod og blev videreudviklet i 1970'erne og fremefter: The Theory of Didactical Situations (TDS, Brousseau, 1997) og Realistic Mathematics Education (RME, Freudenthal, 1991). En gennemgående idé i både TDS og RME er, at elever skal udsættes for ikke-rutineprægede problemer, som de skal løse gennem udvikling af ny viden. Ifølge TDS foregår dette gennem en tilpasning til, hvad der betegnes som undervisningssituationens miljø (Brousseau, 1997). Ifølge RME sker udviklingen af viden, når elever matematiserer de fænomener, som bliver adresseret i problemet. RME skelner mellem to aspekter af denne proces: lodret og vandret matematisering

(Freudenthal, 1991). Begge teorier bygger på idéen om, at læreren giver eleverne det første problem, men eleverne skal handle og formulere idéer til løsningen af problemet. Disse aktiviteter kan føre eleverne til direkte eller indirekte at stille spørgsmål til den viden som er i spil. Disse to tilgange er omdrejningspunktet i aktiviteterne i MERIA, og de to teorier vil blive beskrevet indgående i senere afsnit i bogen.

Men der er andre teoretiske tilgange, som også kommer ind på IBMT. Teorien om Matematikkompetencer (Niss et al., 2002) kan siges at beskrive heuristikkompetencer, selvom teorien arbejder med otte kompetencer, hvoraf ingen af dem kaldes for heuristik. Særligt de såkaldte problemløsnings- og modeludviklingskompetencer har mange fælles træk med, hvad der beskrives ovenfor som den vigtige betydning af heuristikkompetencer i undersøgelsesbaserede aktiviteter.

Mere generelt kan der fremføres, at matematiske modelleringsaktiviteter understøtter udviklingen af problemløsningskompetencer og tilgange. Teorien om Matematikkompetencer beskriver matematiske modelleringsaktiviteter som cykliske bevægelser frem og tilbage i bestemte faser af modelleringscyklussen (Blomhøj, 2004; Blum & Leiss, 2006). Modelleringscyklusserne kan være en hjælp for lærerne; hvis de er bevidste om de faser, som modelleringsaktiviteterne består af, kan lærerne følge elevernes gennemførelse af disse i undervisningssituationer. Men studier, som bruger modelleringscyklusserne til at analysere elevernes modelleringsaktiviteter, antyder, at dette ikke altid er tilfældet. Modelleringsproblemer, som har potentiale til at realisere alle faser, får stadig ikke altid indfriet dette potentiale i undervisningssammenhænge (Blum & Borromero Ferri, 2007). Matematisk modellering, som det anskues af Teorien om Matematikkompetencer, og RME-tilgangen deler en opfattelse om, at undersøgelsesprocesserne tager udgangspunkt i "realistiske" problemer. Dette er også i tråd med Deweys undervisningsidé fra begyndelsen af det 20. århundrede. Andre modelleringstilgange, såsom Modelling Eliciting Activities (Doerr & Ärlebäck, 2015), er fortalere for mere åbne tilgange til undersøgelsesprocessen, og hvordan den kan understøttes af elevernes allerede erhvervede matematikviden, det være sig viden de har erhvervet inden for men også uden for skolens rammer.

Det samme kan siges om Anthropological Theory of the Didactics (ATD). ATD giver en generel model for matematikviden set som en menneskelig aktivitet vedrørende studiet af forskellige typer af problemer. Den er delt op i matematiske praxeologier, som består af en praksisblok (typer af problemer og teknikker) og en vidensblok (teknologi og teori). Den betragter læreren som lederen i den didaktiske proces. I denne tilgang starter undersøgelsesprocessen med et åbent problem, som formuleres af læreren. Problemet kan være af ren matematisk karakter, eller det kan være taget fra den virkelige verden. Elevernes eksplicitte formulering af spørgsmål skal drive undersøgelsesprocessen (Chevallard, 2015). Undervisning og læring ses imidlertid ikke som isolerede fra hinanden men sker i en kompleks proces af didaktisk transponering. Denne proces pålægges dog visse didaktiske begrænsninger fra forskellige involverede institutioner (samfundet, det matematiske samfund, undervisningssystemet, skolen, klasselokalet), som alle i en vis udstrækning reducerer lærerens autonomi. ATD kommer også med forslag til, hvordan man kan ændre betingelser og begrænsninger for skoler og fag. Denne ambitiøse form for IBMT vil dog ikke blive uddybet yderligere i denne håndbog.

I den japanske tradition (Nohda, 2000) ses en åben tilgang med en stor variation af elevsvar på det samme problem som en styrke, der får eleverne (og lærerne) til at fokusere på matematisk argumentation og kommunikation. Forskellige strategier, som udvikles af eleverne, kan fremlægges i klassen, så eleverne derved opbygger en mere sammenhængende viden om problemet.

I forskellige teoretiske tilgange finder vi således forskellige idéer om, hvordan problemer kan identificeres, hvilket kan give anledning til værdifulde undersøgelsesprocesser blandt eleverne. Inden for matematisk modellering, bliver det oprindelige problem oftest fremsat af læreren, og i de fleste tilfælde vedrører de situationer fra den virkelige verden. Men typisk for IBMT er det, og det går tilbage til Dewey, at eleverne lærer ved at interagere med et eller flere problemer.

Hvis vi skal opsummere de idéer, som vi har præsenteret så vidt, kan vi sige, at IBMT kan beskrives som en undervisningsaktivitet, som har til formål at engagere eleverne i undersøgelsesprocesser i matematik - hvilket betyder, at de skaber, undersøger og udforsker idéer og begreber ved at agere som eller lære at agere som undersøgere i forhold til et matematisk problem, og derved udvikler en hvis matematisk viden.

Hvad har man gjort for at fremme brugen af IBMT?

Forskere i matematikundervisning har et ønske om at fremme IBMT gennem nationale projekter og forskningsprojekter på tværs af landegrænser. I mange lande er IBMT til en vis grad inkluderet i matematikpensummet, selvom elementerne omtales anderledes, og der anvendes andre teoretiske tilgange. Projekter finansieret af den Europæiske Union støtter og følger implementeringen af IBMT i medlemslandenes undervisningssystemer. I 2007 omtalte en EU-rapport vedrørende pædagogiske trends i det europæiske undervisningssystem "det alarmerende fald i unge menneskers interesse for grundlæggende naturfag og matematik i Europa" (Rocard et al., 2007). I samme rapport blev det antydet, at "the reversal of school science-teaching pedagogy from mainly deductive to inquiry-based methods provides the means to increase interest in science". I USA understreger dokumentet "Principles and standards for school mathematics " på samme måde, at det må være målet for matematikundervisning på gymnasieniveau, "to teach students to solve non-routine problems by offering them the potentials of developing knowledge and tools for solving such problems " (NCTM, 2000). Dette tyder på, at der er nationale interesser i hele verden i at fremme IBMT i alle klasseværelser. Der er dog stadig nationale beretninger, som peger i retning af, at der er en del udfordringer i forbindelse med indførelsen af IBMT. Rapporter fra Frankrig og England fremfører, at politikere kan have mange gode intentioner, men måske ikke er klar over, hvad der i virkeligheden skal til for at ændre praksis i klasseværelserne, hvordan man kan ændre undervisningen fra overførsel af viden til IBMT (Burkhardt & Bell, 2007; Artigue & Houdement, 2007). EU-projektet PRIMAS har undersøgt disse udfordringer og anbefaler, at lærere gives mulighed for at indføre undersøgelsesbaseret matematikundervisning. Det anbefales ydermere, at alle projekter og undervisningsaktiviteter, som gennemføres for at fremme IBMT, tilpasses til de lokale forhold. Men lærere har brug for strukturer, som støtter dem, og som fremmer gensidig støtte blandt lærerne i indførelsen af de nye initiativer (García, 2013). På samme måde undersøgte EU-projektet MASCIL udfordringerne ved at indføre undersøgelsesbaseret undervisning, og hvordan man kunne skabe relationer mellem matematik- og naturfagsundervisningen og arbejdsverdenen. Det taler for en holistisk tilgang "carrying out a variety of activities, including development of high-quality, innovative materials and running professional development courses " med IBL-uddannede lærere som facilitatorer.

Vi kommer nu til spørgsmålet om gennemførelsen af IBMT med de udfordringer, der følger med.

2. Hvordan implementeres IBMT?

Indledning

Undersøgelsesbaseret matematikundervisning (IBMT) er blevet anbefalet af flere EU-projekter mhp. at forberede eleverne på et dynamisk, vidensbaseret samfund. Viden om fakta og isolerede basiskompetencer alene er ikke nok til det 21. århundrede. Elever skal lære at udvikle problemløsningskompetencer og evnen til selv at erhverve sig viden. Kompetencer, som bliver mere og mere vigtige, er evnen til at håndtere manglende information, at være matematisk kreativ i nye vidensområder, at samarbejde i problemløsningssituationer og at kommunikere (matematiske) resultater. Matematikundervisningen har et ansvar for at udvikle kompetencer til det 21. århundrede (Rocard et al., 2007).

Opmærksomheden omkring disse kompetencer, som passer til det 21. århundrede, er ikke ny. Lignende kompetencer går igen i initiativer, som har til formål at måle elevers matematikforståelse. Matematikforståelse defineres af PISA som:

> … elevers evne til at formulere, bruge og fortolke matematik i forskellige sammenhænge. Dette inkluderer at kunne argumentere matematisk, bruge matematiske begreber, fremgangsmåder, fakta og værktøjer til at beskrive, forklare og forudsige fænomener. Den hjælper mennesket til at forstå, hvilken rolle matematik spiller i verden og at foretage velargumenterede vurderinger og beslutninger, hvilket er vigtigt for konstruktive, engagerede og reflekterende samfundsborgere. (OECD, 2016a, s. 25)

I USA arbejder man også med aktuelle fælles kernestandarder for kompetencer, som går ud over almindelige procedurer (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2010). I disse standarder rettes der specifik opmærksomhed mod vigtigheden af at udvikle kompetencer som problemløsning, argumentation, kommunikation og repræsentation.

Fælles for de nye kompetencer er nødvendigheden af mere fleksible færdigheder. Spørgsmålet er, hvordan disse nye færdigheder kan udvikles i matematiktimen? En måde at udvikle disse færdigheder på er IBMT. I IBMT bruges processer såsom fremsættelse af hypoteser, planlægning af undersøgelser, systematiske eksperimenter og evaluering af resultater til at forme praksis i klassen. I dette kapitel vil vi komme ind på betydningen af opgaver og undervisningsstrategier for IBMT. Herudover vil vi beskrive og diskutere diverse europæiske landes erfaring med IBMT.

Opgavetyper som fremmer IBMT

At lære undersøgelsesbaserede færdigheder med traditionelle opgavebøger kan være svært. Disse opgaver giver ofte præcis den mængde information, som eleverne har brug for til at løse opgaven, og de er oftest opbygget på en sådan måde, at eleverne ikke behøver at tænke ret meget over, hvordan de skal løses. Hvis man skal arbejde med IBMT, er det vigtigt at skabe arbejdsmetoder i klassen, som giver plads til undersøgelsesrelaterede processer. Alle processerne i undersøgelsescirklen behøver ikke nødvendigvis at være repræsenteret i hver eneste opgave, men opgaven skal give mulighed for at lære mindst én af disse undersøgelsesbaserede processer i matematik. Ustrukturerede opgaver kan give eleverne sådanne muligheder for at undersøge, reflektere kritisk, samarbejde og kommunikere resultater; se eksempel i Figur 1.

Struktureret version

En patient er syg. En læge udskriver en recept på medicin til denne patient og anbefaler en daglig dosis på 1500 mg. Efter at have indtaget denne dosis vil i gennemsnit 25% af medicinen blive udskilt fra kroppen i løbet af en dag. Resten af medicinen forbliver i patientens blod.

- Hvor mange mg medicin er der i patientens blod efter en dag?
- Udfyld tabellen.

Dag	Mg medicin i blodet
0	0
1	1125
2	
3	

- Forklar, hvordan du kan udregne mængden af medicin til næste dag ved at bruge formlen: ny_mængde = (gammel_mængde + 1500) * 0,75
- Efter hvor mange dage har patienten mere end 4 g medicin i blodet? Og efter hvor mange dage 5 g?
- Hvad er den maksimale mængde medicin, der kan nås?

Ustruktureret version

En patient er syg. En læge udskriver en recept på medicin til denne patient og anbefaler en daglig dosis på 1500 mg. Efter at have indtaget denne dosis vil i gennemsnit 25% af medicinen blive udskilt fra kroppen i løbet af en dag. Resten af medicinen bliver i patientens blod.

Undersøgelse

- Brug udregninger til at undersøge, hvordan mængden af medicin (i mg) ændres, når man starter med at tage medicinen med en daglig dosis på 1500 mg med f.eks. tre gange 500 mg.
- Er der drastiske konsekvenser ved at springe en dag over og/eller at tage en dobbelt dosis?
- Kan man nå et hvilket som helst niveau af medicin i blodet? Forklar dit svar.

Produkt

Udarbejd en folder til patienter, som giver svar på ovennævnte spørgsmål. Inkluder grafer og tabeller for at illustrere ændringen i medicinniveauet over nogle dage.

Figur 1: To versioner af en opgave (Doorman, Jonker & Wijers, 2016, s. 25)

Når man bruger den ustrukturerede version af opgaven i matematiktimen, er det lærerens ansvar at holde elevernes fokus på de matematiske aspekter af problemet (eller i hvor høj grad, det er tilladt at bevæge sig fra matematik til f.eks. biologi). Dette eksempel viser, at 'åbne' opgaver kan knytte matematik sammen med andre fag, og viser, at matematik er anvendelig. Men at åbne problemer op, er ikke nødvendigvis det samme som at placere matematiske begreber i ikke-matematiske sammenhænge. Også rent matematiske opgaver kan være ustrukturerede og blive præsenteret som en undersøgelse. Et vigtigt mål for ustrukturerede problemer er at sætte eleverne i den aktive rolle og at fremme deres engagement i matematisk problemløsning.

I IBMT er læring drevet af ustrukturerede opgaver, som giver grobund for strategier med mulighed for flere løsninger. Elevernes strategier, deres fortolkninger af problemet, deres antagelser, udregninger, fremstillinger og samarbejde giver mulighed for at reflektere over undersøgelsesrelaterede processer i matematikken. I disse processer er lærerne proaktive. De støtter og opmuntrer de elever, som kæmper, og giver ekstra udfordringer til dem, der klarer sig godt, gennem nøje udvalgte strategiske spørgsmål. De værdsætter elevernes bidrag - også fejl, og støtter læring gennem elevernes ræsonnementer og erfaringer. Dette kræver en følelse af, at man arbejder mod det samme mål, dvs. at man skaber matematik sammen og tager ejerskab.

Det er vigtigt at understrege, at det ikke er alt i den daglige undervisning, man kan eller behøver at ændre i retning af undersøgelsesbaseret undervisning. Den undersøgende tilgang i den daglige undervisning er en af ingredienserne i god undervisning. Arbejdet med IBMT kan fremmes ved at støtte lærerne i at udvide deres undervisningsrepertoire med emner, som at bruge undersøgelsesprocesser i daglig praksis, udvikle ressourcer til IBMT, være opmærksom på, hvordan begreber kan indlæres gennem IBMT, støtte op om arbejde i grupper, måle fremskridt og evaluere elevernes IBMT-relaterede kompetencer.

Undervisningsstrategier for IBMT

PRIMAS[1] var et EU-projekt, som havde til formål at støtte lærernes fælles undersøgelse af IBMT-pædagogikker ved at udvikle og implementere moduler til faglig udvikling. Disse moduler inkluderede aktiviteter, som skulle knytte undersøgelsesbaserede undervisningsmetoder sammen med eksisterende metoder, innovative klasseaktiviteter illustreret med klassevideoer og eksempler på læseplaner. Det var forventningen, at man med disse moduler kunne udfordre undervisere og lærere til at handle reflekteret på nye måder (Swan et al., 2013).

En ændring af undervisningen i retning af IBMT giver lærerne mange pædagogiske udfordringer. For eksempel: Hvordan kan jeg motivere mine elever til at stille spørgsmål og forfølge deres egne spørgsmål? Hvordan kan jeg hjælpe eleverne med at følge op på disse spørgsmål på frugtbare måder? Hvordan kan jeg lære eleverne at arbejde sammen og at lære af hinanden? Hvordan kan jeg styre alle disse nye aktiviteter inden for rammerne af mine daglige forpligtelser? På baggrund af disse spørgsmål blev følgende emner inkluderet i PRIMAS-modulerne for at fremme undersøgelse i den daglige undervisningspraksis:

[1] http://www.primas-project.eu/

1. organisering af elevstyret undersøgelse;
2. hjælp til elever med at tackle ustrukturerede problemer;
3. fremme af konceptudvikling gennem undersøgelse;
4. spørgsmål, der kan give anledning til diskussion (og inkluderer alle elever);
5. støtte af elevernes samarbejde;
6. brugen af selv-evaluering og evaluering ved sammenligning i læringsprocessen.

IBMT-transformation af opgaver fra bøger

Vi viser nogle eksempler på alternative måder, hvorpå man kan bruge en opgave fra en traditionel opgavebog i Figur 1. Den strukturerede version af opgaven præsenterer en kontekst, forklarer problemet og giver præcis den information, der skal bruges for at løse den. Opgaven kalder på brugen af en formel, og sammenhæng er egentlig uden betydning. Opgaven støtter ikke anvendelsen af eller muligheden for at lære at anvende matematikken uden for matematikundervisningssituationen. Den ustrukturerede version synes at give eleverne muligheder for at undersøge situationen, at være matematisk kreative, at samarbejde, at reflektere kritisk over deres fund og at kommunikere deres resultater. Den ustrukturerede version indebærer dog også en risiko for, at eleverne føler sig fortabte og ikke ved, hvad de skal gøre, eller at dele af opgaven kræver så meget af deres tid, at de ikke vil kunne nå et rimeligt resultat inden for lektionens tidsramme. For at undgå dette, er det vigtigt, at læreren spiller en rolle i struktureringen af lektionen. Den ustrukturerede version af opgaven kræver altså en struktureret plan for lektionen for at kunne støtte elevernes undersøgelse.

1. lektion
10 minutter: lav grupper og introducer problemet og arbejdsplanen og del opgaven ud.
10 minutter: eleverne arbejder på opgaven i grupper.
10 minutter: tal med hele klassen for at sikre, at alle ved, hvordan de skal komme i gang, og hvordan de skal komme videre. Tal om hvilke strategier, der kan anvendes, og sørg for, at alle har en idé om, hvad der forventes af dem.
15 minutter: eleverne arbejder på opgaven, færdiggør udregninger og forbereder elementerne til deres folder.

2. lektion
20 minutter: eleverne færdiggør deres folder
15 minutter: præsentation af et par eksempler
10 minutter: refleksion over opgaven (og placering af den i fremtidigt arbejde)

Figur 2: En struktureret lektionsplan til en ustruktureret opgave (se Figur 1).

Det bør nævnes, at en sådan planlægning af lektionen kræver pædagogisk indsigt for at kunne styre processen i klassen. Det er nødvendigt, at læreren indimellem skifter fra klassediskussioner til gruppearbejde.

En anden måde, hvorpå man kan involvere elever i undersøgelsesprocesser - med mere struktur - er at dele opgaven op i mindre stykker. Man kan nøjes med kun at vise den indledende tekst og spørge: Hvad er hovedproblemet? Er der brug for yderligere information for at løse problemet? Hvilken strategi kan I anvende for at finde svar?

En patient er syg. En læge udskriver en recept på medicin til denne patient og anbefaler en daglig dosis på 1500 mg. Efter at have indtaget denne dosis vil i gennemsnit 25% af medicinen blive udskilt fra kroppen i løbet af en dag. Resten af medicinen forbliver i patientens blod.

Figur 3: Opgavens situation. Hvad kunne være hovedproblemet?

Efter at eleverne har formuleret problemet selv, kan man vise dem den strukturerede version fra opgavebogen. Nu giver spørgsmålenes rækkefølge måske mere mening for dem, fordi de selv har haft mulighed for at tænke over situationen og mulige strategier.

Den sidste mulighed vi vil vise som en illustration af, hvad man kan gøre med opgaver fra bøger, er at tage alle underspørgsmål og præsentere dem i en anden rækkefølge, eller som brikker i et puslespil, og bede eleverne om at finde den oprindelige rækkefølge.

Opgaven i Figur 4 giver eleverne mulighed for at reflektere over strukturen i deres opgavebøger. I mange tilfælde har opgaver den samme type struktur, som afspejler det fornuftige i at præsentere et problem og at finde svar på hovedspørgsmålet, men man beder næsten aldrig eleverne om at reflektere over denne strategi og beskrive dens kendetegn (udføre en udregning, systematisk samle mere data i en tabel, beskrive udregningsprocessen med en formel, tegne en graf og bruge formel og graf til at løse hovedproblemet).

En patient er syg. En læge udskriver en recept på medicin til denne patient og anbefaler en daglig dosis på 1500 mg. Efter at have indtaget denne dosis vil i gennemsnit 25% af medicinen blive udskilt fra kroppen i løbet af en dag. Resten af medicinen forbliver i patientens blod.

- Hvad er den maksimale mængde medicin, der kan nås?

- Forklar, hvordan du kan udregne mængden af medicin til næste dag ved at bruge formlen: ny_mængde = (gammel_mængde + 1500) * 0,75

- Udfyld tabellen.

Dag	Mg medicin i blodet
0	0
1	1125
2	
3	

- Efter hvor mange dage har patienten mere end 4 g medicin i blodet? Og efter hvor mange dage 5 g?

- Hvor mange mg medicin er der i patientens blod efter en dag?

Figur 4: Spørgsmålenes rækkefølge er blandet sammen. Hvad var den oprindelige rækkefølge?

Flere undervisningsstrategier for IBMT

Vi har præsenteret tre alternative måder, hvorpå man kan ændre en opgave fra en traditionel opgavebog, så man kan bruge den til at arbejde med undersøgelse i matematiktimen. De har det til fælles, at læreren skal kunne facilitere klassediskussioner og give eleverne tænketid. En anden undervisningsstrategi, som man kan bruge til at diskutere undersøgelsesstrategier med hele klassen, for at involvere alle, er tænk-sammenlign-fortæl strategien. Tanken er at lade eleverne tænke over problemet selv i 2 minutter og notere, hvad de mener, efterfulgt af 2 minutter hvor de sammenligner deres tanker med naboens, og til sidst 2 minutter hvor de fortæller deres resultater til hele klassen. Denne strategi giver alle elever tænketid og giver læreren mulighed for at involvere alle i diskussionen.

Udover ovennævnte opgaver, kunne man også tænke over opgaver, som kunne opmuntre eleverne til at udfordre hypoteser (f.eks. Figur 5). Man kunne præsentere eleverne for et sæt udtalelser, som relaterer til emnet for undervisningen og lade dem tage stilling til, om disse udtalelser altid, sommetider eller aldrig er sande. Hvis de mener, at udtalelsen altid eller aldrig er sand, forventes de at kunne forklare, hvordan de kan være sikre på det. Hvis de mener, at det sommetider kan være sandt, skal de beskrive, hvornår det er sandt, og hvornår det ikke er.

Lønforhøjelse	Rette vinkler
Max får en lønforhøjelse på 30%. Jim får en lønforhøjelse på 25%. Så Max får den største lønforhøjelse.	En femkant har færre rette vinkler end et rektangel.
Fødselsdage	**Større brøker**
I en klasse med ti elever er sandsynligheden for, at to elever er født på samme ugedag, lig med én.	Hvis man lægger det samme tal til over og under brøkstregen, får brøken en større værdi.

Figur 5: Udtalelser, der altid, sommetider eller aldrig er sande.

Denne opgave beder eleverne om at tage stilling til graden af udtalelsernes rigtighed og forklare deres konklusion. Forklaringerne vil formentlig involvere eksempler og modeksempler til at understøtte eller afvise udtalelserne. Derudover kan eleverne blive bedt om tilføje betingelser eller på anden måde revidere udtalelserne, så de bliver "altid sande". Denne type aktivitet er meget virkningsfuld. Udtalelserne kan udtænkes, så de konfronterer eleverne med og får dem til at diskutere almindelige misforståelser eller fejl. Lærerens opgave er at få eleverne til at komme med begrundelser, eksempler og modeksempler. Denne opgave giver eleverne mulighed for at opdage eksemplets rolle i en matematisk undersøgelse.

Disse eksempler på matematikopgaver viser vigtigheden af nøje udvalgte ressourcer til arbejdet med IBMT i matematiktimen.

Erfaringer med indførelsen af IBMT

Der findes empirisk evidens fra studier i kvaliteten og effekten af IBMT. Effekterne af IBMT omfatter gevinster for motivationen, for udviklingen af troen på matematikken og for forståelsen af relevansen af matematik for livet og samfundet (Bruder og Prescott, 2013); Blancard et al., 2010, Furtak et al., 2012; Hattie, 2009; Minner). Men nogle eksperter advarer om, at denne type undervisning kun kan forbedre læringen, hvis den er meget nøje forberedt og velstruktureret (Hofstein og Lunetta, 2004; Woolnough, 1991).
Guidet undersøgelse sammenlignet med struktureret og åben undersøgelse, viste sig at være den mest effektive måde, hvorpå man kunne indføre undersøgelse i klasseværelset i kombination med lukkede opgaver, som understøtter indlæringen af procedurer og basale færdigheder (Bruder og Prescott, 2013).

Hvordan ved vi, hvornår en given undervisningstype er effektiv? En stor del af det pres, som lærere udsættes for i dag, har at gøre med forskellige forventninger til elevlæring, som ofte ikke er klart formuleret. Hvis vi gerne vil have elever, som er i stand til at forstå matematik, finde glæde ved at arbejde med matematik og være i stand til at arbejde sig igennem et problem og drage konklusioner, så kan IBMT med vejledning tænkes at være løsningen. Men hvis vores mål derimod er, at eleverne skal score høje karakterer i standard vidensbaserede prøver, så er IBMT måske ikke altid den rigtige vej.

Resultaterne af den interne kvalitetsundersøgelse af PRIMAS viser en lang række udfordringer og muligheder, som lærere kommer ud for, når de eksperimenterer med IBMT-pædagogikker (Maass, 2013). De fleste af PRIMAS-lærerne betragter IBMT som en elevcentreret tilgang, som involverer selvstyret men vejledt undersøgelse, hvor man stiller spørgsmål, gør opdagelser og afprøver hypoteser i søgningen efter ny forståelse.

> *Undersøgelse handler om at prioritere elevernes mulighed for at skabe forklaringer og indgå i kritiske diskussioner i stedet for ikke at kræve nogen refleksion overhovedet [...] når de løser problemer, bruger eleverne deres viden på nye problemstillinger fra den virkelige verden, og involverer sig i kritiske diskussioner med andre om modeller, løsninger og dokumentation. (Lærer fra Cypern)*

Men at give undersøgelsesprocesser i klassen opmærksomhed ses som en udfordrende men også udbytterig mulighed for at tilrettelægge lektioner på en anden måde. Lærerne fremhæver fordelene, som undersøgelsesbaseret undervisning har for deres elever.

> *Baseret på egen erfaring kender vi værdien af at have fundet ud af noget selv, frem for bare at lære, hvad løsningen er. Når man underviser undersøgelsesbaseret, så lærer eleverne virkelig en metode, og de har derved flere indgange til forståelse. (Lærer fra Schweiz)*

Lærerne lægger også vægt på den positive effekt af undersøgelsesbaserede processer i forhold til elevernes evne til at ræsonnere.

> *Jeg fandt ud af, at der var en positiv effekt på elevernes evne til at foretage induktive konklusioner. Jeg var imponeret over den evne, som nogle elever havde til at drage holdbare konklusioner og at understøtte dem med matematisk evidens i form af modeller [...] specielt brugen af korrekt matematisk terminologi, hvilket ikke er let i den alder. (Viceinspektør fra Cypern)*

Lærere udtrykker, at de selv elsker at forklare idéer og procedurer - og det samme gør nogle af deres elever. Men lektioner, hvor elever skal kæmpe med åbne spørgsmål og problemløsningsopgaver, ser også ud til at være effektive i forhold til at diskutere problemløsningsstrategier.

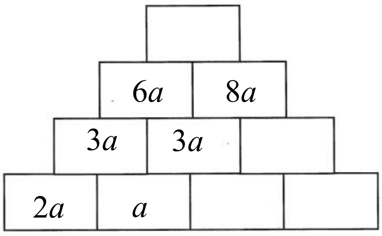
> Jeg kunne godt lide lærercentreret undervisning, og jeg tror stadig eleverne godt kan lide det. Men de lærer ikke så meget, når de ikke behøver at løse problemet selv. De får problemet, løsningsmetoden og selve løsningen til sidst. (Lærer fra Tyskland)

I denne sammenhæng fremhæves vigtigheden af elevsamarbejde af lærerne:

> *Jeg fandt ud af, hvor vigtigt det er at få eleverne til at udnytte den mulighed (dialog) til at finde ud af, hvad de ved, og hvad de måske kan lære af andre. Og så går det måske op for eleverne, at de ender med at komme frem til et svar, som de måske ikke havde troet, de havde. (Lærer fra Norge)*

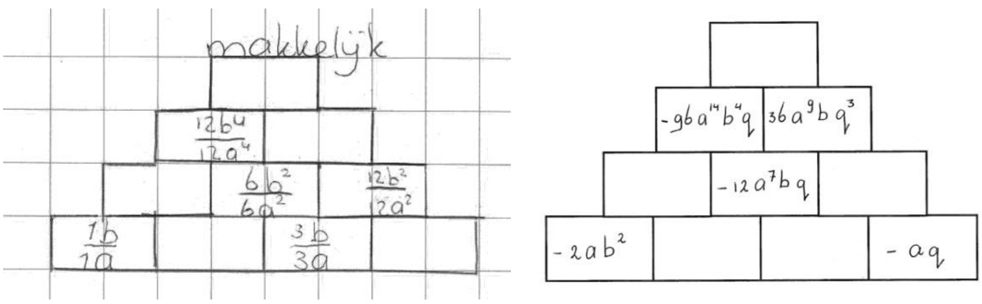
Et eksempel fra Holland

At arbejde med IBMT kræver et rolleskift både for lærere og elever. Lærerne indtager rollen som læringsfacilitator, og eleverne får en meget aktiv rolle. For eksempel tog en af lærerne en øvelse fra kapitlet om algebra i en matematikopgavebog og udarbejdede en ustruktureret version af opgaven. Den oprindelige opgave bestod af en række pyramider, i hvilke eleverne skulle addere eller multiplicere tilstødende celler for at finde frem til indholdet i cellen ovenover. I nogle tilfælde var de nødt til at regne baglæns for at finde volumen af celler længere nede (se Figur 6). Med hendes tilpasning af opgaven ville hun se, hvad eleverne var i stand til, og hvad de syntes, der var let eller svært. Først viste hun eleverne en af pyramiderne og bad dem prøve at finde af, hvordan denne pyramide var konstrueret, og om de kunne finde værdierne for de tomme celler.



Figur 6. Pyramide udformet af læreren

Efter fem minutter og nogen diskussion, var elevernes opgave at lave lignende pyramider som alternativ til opgavebogens opgaver. De kunne bruge addition eller multiplikation og skulle udtænke et let og et svært pyramideproblem. Det gjorde eleverne, og med bemærkelsesværdige resultater (se Figur 7). Nogle elever var forsigtige i deres forsøg og lavede pyramider, som lå ret tæt på opgavebogens eksempel, mens andre elever gik efter at finde mulige ekstremer. Disse elevproduktioner gav læreren et overblik over de algebraiske udtryk, som var inden for rækkevidde for hendes klasse fra meget simple til meget komplicerede, herunder f.eks. brøker, decimaler og negative tal.



Figur 7. En let og en svær multiplikationspyramide udtænkt af eleverne

Under denne aktivitet var der et makkerpar, der fremsatte spørgsmålet om, hvad den minimale nødvendige information ville være for at løse et pyramideproblem. Andre grupper tog spørgsmålet op, og det motiverede dem til at udtænke endnu mere komplekse pyramider. Læreren rapporterede, at hun lagde mærke til, at hendes elever forbedrede deres forståelse for algebraiske færdigheder i dette legende miljø. Særligt det øjeblik, hvor eleverne formulerede spørgsmålet om den nødvendige mængde minimumsinformation, var afslørende. De afprøvede mange eksempler, som viste rækkevidden af deres algebraiske færdigheder, og fik samtidig god træning.

> "Eleverne tog ejerskab over matematikken, blev motiverede til at arbejde med matematik, og deres evner stod tydeligere frem." (Lærer fra Holland)

Normalt øver eleverne sig i algebra med helt almindelige opgaver, som går ud på at 'gange parenteser ud' eller 'faktorisere' og simpelthen udvide mønstre uden dybere omtanke. Med sådanne opgaver er det meget sværere at se, hvilke problemer elever møder, og om de vil være i stand til at bruge algebraiske færdigheder i nye situationer. Læreren satte stor pris på denne ændring i klasseværelset, men gav samtidig udtryk for, at det var og stadig er en udfordrende proces. At blive dus med disse nye undervisningsstrategier, som kræves i IBMT, synes at være en proces, der kræver tid og opmærksomhed.

Udfordringer i forbindelse med indførelsen af IBMT

Lærerne møder en række forhold, som vanskeliggør indførelsen af IBMT i daglig klassepraksis. De vigtigste forhindrende faktorer er opgavebøgerne, som skal gennemgås, tiden, der er til rådighed til at indføre IBMT-aktiviteter, ressourcerne, der er til rådighed, og evalueringen af elevernes arbejde.

> *Jeg tror det største problem er [klasse]tiden og tiden, der skal bruges til planlægning. [...] hvis du har en meget indholdstung læseplan, kan det være temmelig svært også at få tid til at lave undersøgelsesbaseret undervisning. Fordi der er så meget, der skal nås, på meget kort tid. (Lærer fra UK)*

> *Planlægningen af en lektion er krævende. Jeg bliver nødt til at tage højde for mange variable faktorer og have alting godt forberedt, hvis jeg vil have mine elever til at engagere sig aktivt i undersøgelse, og aktivt at levere en elevcentreret undervisningstime. (Lærer fra Cypern)*

> *Det tager selvfølgelig lang tid, men det er ikke ekstra arbejde. Faktisk lærte jeg at bruge undersøgelsesbaseret læring til at arbejde med matematisk fagindhold. Eleverne lærer ting på en meget dybere måde og forstår mere. (Lærer fra Spanien)*

En anden udfordring for lærerne er evalueringen af elevens præstation. Det som er vigtigst for lærere er at hjælpe deres elever til at opnå de bedste resultater. Eksamenerne i skolesystemerne fokuserer hovedsageligt på elevernes evner inden for reproduktive færdigheder. Derfor er lærerne i konflikt med sig selv om, hvorvidt de skal forberede eleverne til eksaminerne eller indføre IBMT i klassen.

> *Min hovedopgave er at forberede mine elever til den næste eksterne evaluering, som giver dem et certifikat, som de skal bruge i fremtiden. Det er det eneste, de vil have - og hvis jeg gjorde mere, ja, så var det første, de ville gøre, at gøre oprør. Det næste, der ville ske, var, at deres forældre ville fortælle mig, at det ikke var min opgave at gøre dette. (Lærer fra Tyskland)*

Det er rigtigt, at eksaminer og prøver i mange lande ikke direkte belønner elever for deres evne til at undersøge og løse ikke-standard problemer. Det er et problem, som nogle regeringer er klar over, og prøver at tage hånd om. En yderligere potentiel hindring for indførelsen af undersøgelsesbaseret læring har at gøre med elevernes opførsel, og blev nævnt af nogle lærere i begyndelsen af deres deltagelse i PRIMAS. De frygtede til at begynde med, at arbejdet med UBL i en klasse med 30 elever ville blive problematisk i forhold til støj og uro:

> *Jeg tænkte, "det bliver umuligt at gøre i min klasse, for mine elever vil ikke fokusere på aktiviteten, de vil spilde deres tid med at snakke om alt muligt andet, og støjen vil være enorm". Så indførte jeg aktiviteten, og jeg var overrasket over, at alle tog del og var engagerede, selv når de skulle finde frem til svarene ved at arbejde i grupper. (Lærer fra Spanien)*

Hvad kan støtte indførelsen af IBMT?

At understøtte elevernes undersøgelse med velplanlagte spørgsmål (og anden vejledning) er en vigtig opgave for IBMT-læreren. Ved understøtning (stilladsering) mener vi brugen af undervisningshjælpemidler, som har karakter af stor 'modtagelighed' og med mulighed for 'udfasning'. I denne sammenhæng betyder modtagelighed, at støtten er tilpasset elevernes behov, og udfasning betyder, at støtten gradvist vil forsvinde, efterhånden som eleverne gør fremskridt med deres undersøgelse. Niveauet af støtte skal tilpasses elevernes niveau. Læreren kan variere støtten for at imødekomme svage elever eller for at udfordre stærke elever. I de timer, som blev observeret i PRIMAS, kunne læreren f.eks. spørge: "Hvordan kan man forenkle dette problem? Hvilke antagelser kan man gøre?" Efter at eleverne havde formuleret spørgsmålet, kunne nogle lærere fortsætte med at spørge: "Kan I forestille jer, hvad en systematisk tilgang kunne være? Hvad er den smarteste måde at indsamle data?" Efter dataindsamlingen, kunne andre spørge: "Kan I se nogle mønstre her? Kan I forklare, hvorfor de opstår?" Mod slutningen var lærernes fokus på formidlingen af observationerne: "Hvordan kan I forklare dette klart og præcis?" Ved at stille disse spørgsmål og tale om svarene med hele klassen, kan man understøtte undersøgelsesprocessen. Et andet vigtigt element, som blev tydeligt under vores observationer, var, at lærerne skal skabe et klassemiljø, hvor eleverne føler sig trygge ved at sige noget og at lave fejl. Eleverne skal ikke bare kunne føle sig trygge ved at stille spørgsmål, lave fejl og sige deres mening, men de har også brug for klare signaler om, hvilke slags opførsler, der accepteres.

> *Jeg laver for eksempel også selv fejl, og eleverne gør mig opmærksom på det, og udregner opgaven rigtigt. Jeg roser dem for det, og det kan de godt lide. Jeg tror det er noget, der er med til at understøtte kommunikationen. Ved at håndtere det på denne måde: "Nå ja, jeg gjorde det forkert. Beklager. Du har ret." viser jeg eleverne, at det er OK at lave fejl. Så får de modet til at vise deres fejl og indrømme dem. (Lærer fra Tyskland)*

Set i bakspejlet, så er de vigtigste læringsaspekter i den undersøgelsesbaserede tilgang forbundet tilskyndelse til elevhandlinger ved at give dem stikord, ansvar og selvtillid til at udføre en undersøgelse. Men de fleste lærere, som vi interviewede, var særligt imponerede over, hvor motiverende denne pædagogik var i matematik- og naturfagstimerne. Lærerne taler om, hvordan undersøgelsesbaseret læring forbinder læring med sjov:

> *Jeg tror, eleverne glæder sig til IBL-opgaver, fordi de synes de er sjove og anderledes end traditionelle undervisningstimer. Med IBL får eleverne mulighed for at opdage og præsentere deres observationer og får lov til at komme til orde i matematiktimen, hvor det før var læreren, der gjorde det hele. (Lærer fra Malta)*

Lærerne understregede, at det er vigtigt at forklare eleverne de nye forventninger, som stilles til dem: at de skal lære aktivt at stille spørgsmål, søge svar, sammenligne fremgangsmåder og foretage deres egne undersøgelser - uden hele tiden at spørge om hjælp. De skal også vide, hvor vigtigt det er at lære at arbejde sammen, præcis ligesom professionelle videnskabsmænd og matematikere i verden omkring dem.

Konklusioner

Dette kapitel beskrev måder, hvorpå IBMT kan bruges, og erfaringer fra klasseværelserne fortalt af lærerne. Erfaringen viser, at lærere møder udfordringer, når de forsøger at indføre IBMT i deres daglige praksis. Udfordringerne fremhæver behovet for en fælles følelse af værdier, tro og mål for matematikundervisningen. Målet for matematikundervisningen er ikke kun at lære eleverne algoritmer og fremgangsmåder, men den skal også beskæftige sig med kompetencer som kreativitet, håndtering af manglende information, udredning af sammenhænge, kritisk tænkning, samarbejde og formidling. Opgaver og undervisningsstrategier, som er inspireret af undersøgelsesprocesser, eller som giver mulighed for undersøgelsesbaserede tilgange, fremmer udviklingen af disse kompetencer. Lærerne fremhæver yderligere vigtigheden af at understøtte forholdene på skoleniveau. At indføre IBMT kræver ekstra tid til forberedelse og gennemførelse af timerne, og dette kræver støtte fra kolleger og skoleledelse.

Udfordringerne, som lærere og elever møder, når de forsøger sig med IBMT, kan ikke løses, hvis indgrebene, der foretages, er enkeltstående og tilfældige. Hvis man skal ændre undervisnings- og læringskulturen, som understøtter IBMT, er det vigtigt at lave indgreb, som falder inden for skolekonteksten, og som bidrager til klassetrinnets pensumkrav.

Heraf kan konkluderes følgende: En succesfuld implementering af IBMT kræver:

1. Tilstedeværelsen af IBMT-ressourcer. Ikke som isolerede opgaver, men som moduler, der viser, hvordan matematiske emner fra pensummet kan tilgås på en IBMT-righoldig måde;
2. Afstemning med institutionelle forhold og begrænsninger, herunder faciliteter og tid til rådighed, officielle krav og lærer- og elevevalueringer.
3. Et lærerfællesskab (mindst én anden lærer og helst en erfaren facilitator) til at udføre klasseeksperimenter, diskutere erfaringer og på anden måde fremme lærerens faglige udvikling; mulighed for at dele sin faglige viden med et bredere fællesskab (f.eks. nationalt) er også meget ønskværdigt.

MERIAs moduldesign er baseret på to rammeteorier, som relaterer sig til IBMT, nemlig RME og TDS. Disse vil blive introduceret i de følgende kapitler. Det er vigtigt at understrege, at disse teorier er fremkommet efter årtiers forskning, og det er hverken muligt eller nødvendigt at præsentere alle deres elementer for at gøre læseren i stand til at bruge og opbygge moduler på egen hånd. Der vil være forslag til yderligere læsning i kildehenvisningerne for dem, der måtte ønske at uddybe deres viden inden for en af eller begge disse rammeteorier.

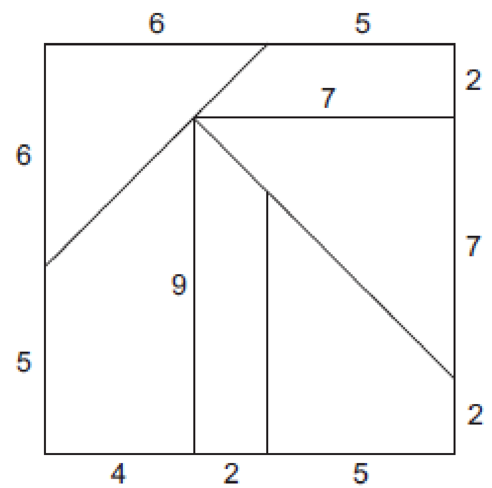
3. Teorien om didaktiske situationer

Indledning

Lad os tage udgangspunkt i en konkret undervisningsopgave: vi ønsker at planlægge en lektion, som vil få eleverne til selvstændigt at gå i gang med undersøgelse og vidensopbygning i relation til et konkret matematisk resultat. I den foreslåede lektion opdager eleverne et specialtilfælde af det generelle plangeometriske resultat, at ligedannede figurer (mere uformelt betegnet som figurer med samme "form") har proportionelt tilsvarende sider (dvs. der er en fast "skaleringsfaktor", som gør det muligt at beregne en side i den ene figur, hvis man kender den tilsvarende side i den anden). Dette omtales undertiden som Thales' læresætning. Faktisk kan dette generaliseres udover polygonale figurer, men dette går langt ud over pensum for gymnasieniveau – om end ligedannede ikke-polygonale figurer findes i mange dagligdags situationer, såsom billeder vist i forskellige størrelser. Bemærk, at begrebet 'vinkel' ikke er nødvendigt for at formulere problemet, og bliver måske slet ikke brugt i denne aktivitet.

Eleverne får følgende instruktion:

Her er et kvadratisk puslespil med seks brikker (se Figur 8. Tal angiver længden af en side i cm). I skal lave en forstørrelse af brikkerne ud fra følgende regel: den side, der måler 4 cm på modellen, skal måle 7 cm på jeres reproduktion. Jeg giver et puslespil til hver gruppe med 4 eller 5 elever, og i hver gruppe skal alle elever forstørre mindst én brik. Når I er færdige, skal I kunne samle brikkerne til et nyt, større puslespil (Brousseau, 1997, s. 177).



Figur 8: Et "tangram" puslespil.

Efter at have fået denne instruktion, går eleverne i gang med arbejdet uden hjælp fra læreren. Problemet præsenteres for elever, som spontant forbinder forlængelse af sider med addition (hvilket f.eks. typisk vil gælde elever omkring 5. klasse). Når eleverne lægger 3 cm til hver side, kan de ikke rekonstruere den større figur ved at samle brikkerne, for de passer ikke sammen. Puslespilseksemplet tvinger dem til at indse, at den metode (forlængelse ved addition af en fast længde), de har brugt, ikke virker i dette tilfælde, og at de er nødt til at udvikle ny matematisk viden. Forhindringen kan overvindes ved at ændre strategi til en multiplikationsmetode. Det er vigtigt, at eleverne udvikler alternative metoder på egen hånd, og især at de indser, at multiplikationsmetoden er nødvendig i situationen. Den er altså ikke noget som læreren anbefaler.

Undervejs beder læreren alle grupper om at formulere og præsentere, hvad de er kommet frem til. Eleverne kan også blive bedt om inden for egne grupper at forklare, hvad de gjorde for at forstørre deres brik i puslespillet. Grupperne bliver bedt om at svare på, om deres forstørrede brikker passer sammen eller ikke, og hvad deres plan for det videre arbejde er.

For at konstruere den nye figur rigtigt, skal alle elever i gruppen komme frem til den samme hypotese, at sidelængderne på alle brikker skal multipliceres med 7/4. Læreren kan være sikker på, at eleverne har nået det ønskede mål, som er at forstå proportionaliteten, hvis de kan bevise validiteten af deres strategi ved at samle den nye puslespilsfigur.

I slutningen af timen kan læreren så formulere reglen om proportionalitet i geometriske former som et generelt og officielt stykke viden. Baseret på diskussionerne i timen og den endelige refleksion over problemet, bliver elevernes personlige idéer fælles viden ligesom den, man kan finde i forskellige medier, såsom lærebøger og online ressourcer.

Udformningen af denne undervisningssituation er et klassisk produkt af 'Teorien om didaktiske situationer'. I resten af kapitlet vil vi præsentere de grundlæggende begreber og principper for teorien, illustreret ved yderligere eksempler og vejledninger til, hvordan denne tilgang kan bruges i klassen.

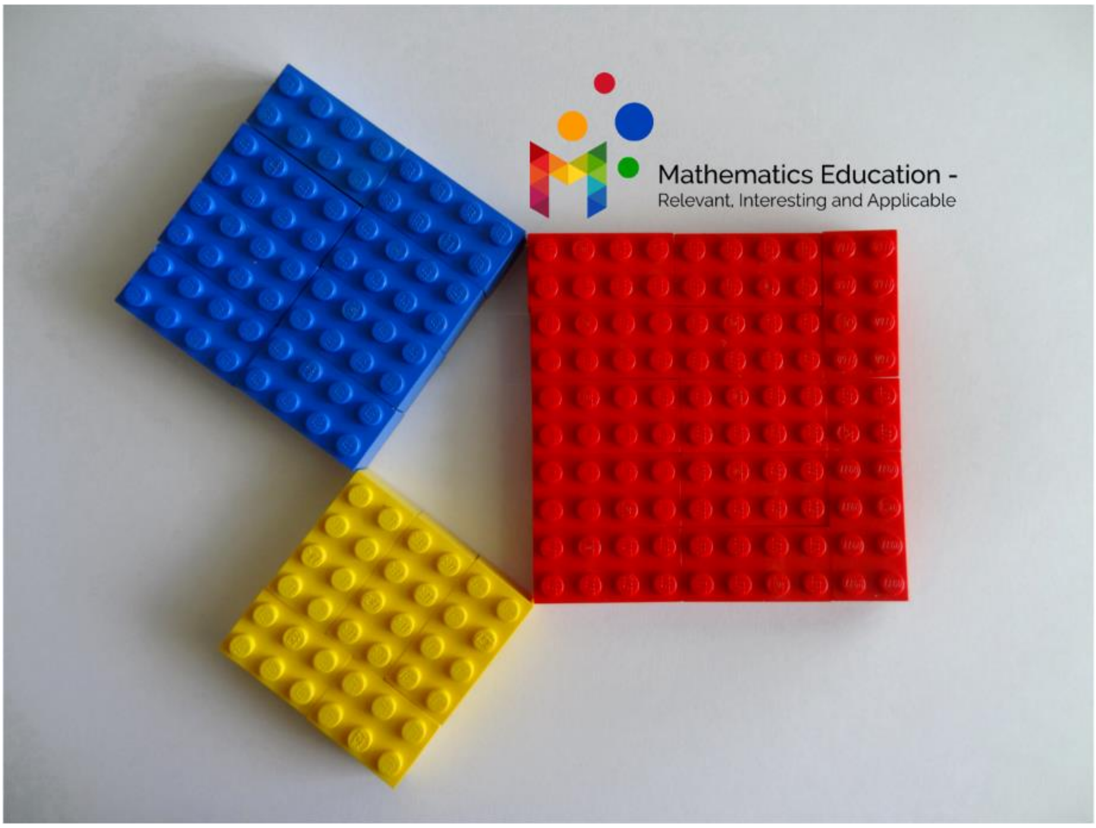
Personlig og institutionel viden

Teorien om didaktiske situationer (TDS) blev udviklet af Guy Brousseau fra slutningen af 1960'erne, og den har frembragt en række idéer og resultater, som kan hjælpe lærere med at dele og udvikle deres matematiske viden i arbejdet med planlægning af undervisningen. TDS støtter undervisning, som lader eleverne selv undersøge og opbygge matematisk viden på en måde, som fanger essensen af IBMT.

I TDS er det helt afgørende at skelne mellem to typer af viden:

Institutionel viden (sommetider også kaldet *offentlig* eller *officiel viden*) er viden, som kan findes i lærebøger, på hjemmesider, i forskningsartikler og i andre offentligt tilgængelige ressourcer. Den repræsenterer en sammenfatning af resultaterne af matematiske aktiviteter, udført af enkeltindivider, som efterfølgende er valideret af andre og gjort offentlig. I disse ressourcer bliver den matematiske viden præsenteret i en koncis og præcis form, mens undersøgelsesprocessen, som har ført til dens fremkomst, sædvanligvis ikke er synlig. Denne deduktive form af matematisk viden diskuteres og evalueres af forskere og lærere, og sommetider også af den almene offentlighed. Et simpelt eksempel er præsentationen af Pythagoras' læresætning som $a^2 + b^2 = c^2$, hvor a og b er katetelængderne og c er hypotenuselængden i en retvinklet trekant. Denne formel er i dag *"institutionel viden"*, som lærere introducerer til deres elever, og som eleverne husker senere i livet, uafhængigt af den geometriske idé og det bagvedliggende argument. Institutionel viden kaldes ofte også fælles, offentlig eller officiel viden.

Personlig viden er den viden, som elever (og andre) opbygger, når de arbejder med et matematisk problem. Denne type viden vil ofte relatere til den kontekst, som den er opstået i. Eleven kan udvikle personlig viden om Pythagoras' læresætning ved at lege med trekanter og firkanter, som illustreret i Figur 9. Der skal selvfølgelig mere til at etablere den officielle form som beskrevet ovenfor.



Figur 9. Figurer, som er samlet, så de illustrerer Pythagoras læresætning

I puslespilseksemplet består den personlige viden, som eleverne skaber først, kun i, hvorvidt de har succes eller ikke med specifikke metoder til at forstørre nogle brikker. Den officielle viden, som man søger at nå frem til, er, at hvis to figurer A og B er ligedannede (har den samme "form"), så er forholdet mellem de tilsvarende sider (a/b, hvor a er en side i A, og b den tilsvarende side i B) konstant. Der kan være brug for at arbejde med mange situationer for at nå til den officielle viden i denne form. Til slut i puslespilssituationen, kan man i princippet kun slutte, at det kun ser ud til at være multiplikation med $7/4$, som virker i dette tilfælde.

Når elever interagerer med et matematisk problem og udvikler deres eget svar på et givent spørgsmål, udvider de deres personlige viden. Elevernes personlige viden afviger sandsynligvis i nogen grad fra den institutionelle viden. Den videreudvikler sig og formaliserer sig, efterhånden som den bliver delt og diskuteret med andre. Kommunikationen med klassekammerater eller andre jævnaldrende vil således hjælpe med at videreudvikle og formalisere elevernes oprindelige idéer.

Det er vigtigt, at læreren udfordrer sine elevers personlige viden ved at formulere nye problemer, som kræver viden, som endnu ikke er fuldt udviklet. Personlig viden bliver på denne måde bekræftet eller revideret. Den kan bekræftes enten af en lærer, af problemsituationen selv, eller den kan sammenlignes med andre elever, f.eks. med deres strategier til at løse et problem. På denne måde bliver den personlige viden omdannet og bliver mere formaliseret. Det betyder, at den kommer tættere på, hvad man kan betragte som institutionel viden.

Didaktiske og adidaktiske situationer

Den skelnen mellem personlig og institutionel viden, som præsenteres i TDS, giver lærerne mulighed for at planlægge undervisningstimer med undersøgelsessituationer, dvs. med en IBMT-tilgang. En del af idéen med IBMT er, at undervisningen skal give eleverne mulighed for at deltage i aktiviteter, som ligner forskerens måde at arbejde på.

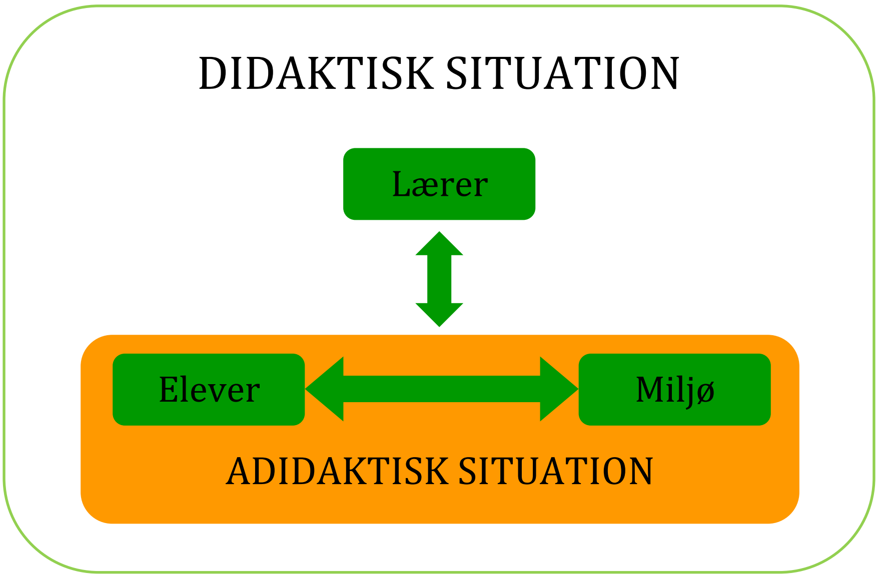
Et vigtigt element i skabelsen af sådanne situationer er idéen om det *didaktiske miljø*. Miljøet er de betingelser, under hvilke eleven handler for at opnå ny viden. Det består af problemet, elevernes tidligere erhvervede viden, og redskaber såsom blyant og papir, lineal, lommeregner, CAS-værktøj (Computer Algebra Systems), puslespil osv. Når læreren forbereder undervisningen, formulerer han først en *tilsigtet viden*, og udtænker et passende miljø til elevernes udvikling af denne viden. Naturligvis kan et miljø være mere eller mindre velegnet til at udvikle en bestemt viden. I puslespilssituationen beskrevet ovenfor består miljøet af puslespillet, pap eller papir, saks, lineal og elevernes tidligere udviklede viden. Den (epistemologiske) forhindring, som eleverne møder, stammer fra problemets matematiske egenart. Miljøet har således et stort potentiale til at få elever til at opbygge den tilsigtede viden, uden at læreren behøver at sige noget hverken om proportionalitet mellem sider i geometriske figurer, eller definitionen af ligedannede trekanter. Miljøet skaber hos eleverne et behov for at konstruere denne viden.

Det kan forekomme, at ikke alle eleverne overvejer betydningen af multiplikationsstrategien for bevarelsen af vinklerne, selvom dette er nødvendigt, hvis brikkerne skal kunne passe sammen i et større kvadrat, som i sig selv er ligedannet med det oprindelige. At afprøve den korrekte strategi vil ikke desto mindre føre til udviklingen af den tilsigtede institutionelle viden. TDS-tilgangen til undervisning og læring beskrives ofte som et spil. Udtænkning af en situation og dens miljø kan sammenlignes med at forberede et spil og herunder formulere et sæt spilleregler. Når eleverne vinder spillet, har de udviklet den optimale strategi for spillet. At vinde svarer således til at lære, og den optimale strategi betyder, at eleverne har udviklet den tilsigtede viden og metode. Med andre ord: spillet skaber et behov for at udvikle en vinderstrategi. Og "spillebanen" (situationen) skal udformes på en sådan måde, at elevernes mulighed for at finde denne strategi maksimeres.

Når miljøet er rigtigt udformet, kan eleverne interagere selvstændigt i det, uden yderligere vejledning fra læreren. *Adidaktiske situationer* er situationer, hvor eleverne arbejder med problemet og udforsker miljøet uden lærerens indblanding. I disse situationer udvikler eleverne deres personlige viden ved at tilpasse den til problemet, de arbejder med, gennem undersøgende aktiviteter og afprøvning af idéer i miljøet og gennem formulering af argumenter i forsøget på at overbevise klassekammerater om egen strategi.

Didaktiske situationer er situationer, hvor læreren eksplicit interagerer med eleverne for at videreudvikle deres læring inden for et specifikt område. Ordet *didaktisk* refererer således til *en persons bevidste hensigt om at dele en viden med en anden*. En af hovedfunktionerne i didaktiske situationer er at igangsætte, regulere og moderere adidaktiske situationer, og at sikre, at den viden, der bliver udviklet der, bliver delt, bekræftet og (hvor det er relevant) anerkendt som "korrekt". Som vist i Figur 10 betyder det, at didaktiske situationer består af lærerens interaktion med adidaktiske situationer. Adidaktiske situationer kan selvfølgelig have mere eller mindre potentiale - fra stillesiddende lytten til lærerens forklaringer, til aktivt engagement i avancerede problemsituationer. Det største læringspotentiale for elever ligger faktisk i adidaktiske situationer, eftersom de giver eleverne mulighed for at udvikle deres egen personlige viden, som kan blive til delt viden gennem didaktiske situationer. Med andre ord, så ligger læringspotentialet i dialektikken mellem adidaktiske og didaktiske situationer, og dermed mellem personlig og delt viden. Figur 10 viser også, hvordan didaktiske situationer som helhed består af et "dobbeltspil": elevernes spil med miljøet (adidaktiske situationer) og lærerens spil med de adidaktiske situationer (som hun planlægger, overdrager og regulerer). Figuren viser også, at en adidaktisk situation ikke betyder, at læreren er fraværende eller inaktiv. Spontant selvstudie er ikke en adidaktisk situation; den er non-didaktisk.

Adidakticitet er et særligt fænomen *inden for* didaktiske situationer: personen, som ønsker at dele noget viden, kan med vilje trække sig ud af interaktionen for at få den, der skal lære, til at agere på måder som er nyttige eller endda nødvendige for at opnå den specifikke viden. Dette er et generelt fænomen, som ikke er opfundet af TDS; der er et vist element af adidakticitet i de fleste didaktiske situationer. Kvaliteten af dette element afhænger af elevernes selvstændige handlinger i miljøet.



Figur 10: Didaktiske situationer som et dobbelt samspil

Lærerens rolle

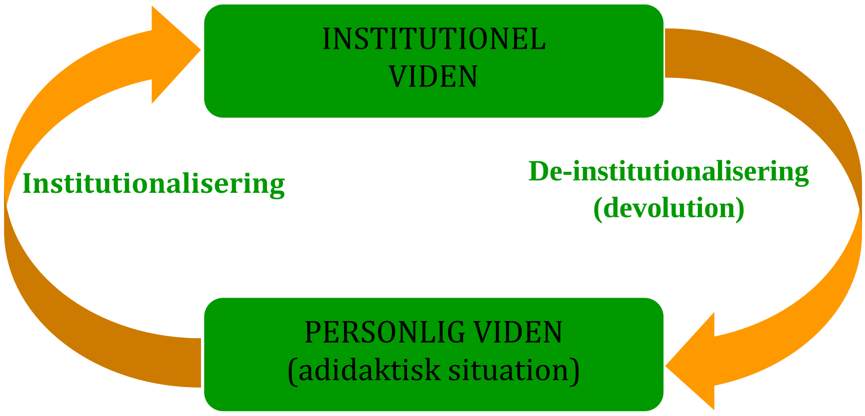
Det er vigtigt at tydeliggøre, hvordan lærerens rolle i den TDS-baserede undervisningssituation adskiller sig fra, hvad mange lærere vil være vant til.

I almindelig matematikundervisning ser man oftest, at læreren først introducerer et ny begreb, en ny metode eller en ny læresætning. Så viser han eksempler, hvor han bruger den nye viden, hvorefter eleverne imiterer læreren ved at løse lignende opgaver. Endelig bliver elevernes arbejde evalueret af læreren. I sådan en tilgang starter læreren med at institutionalisere den officielle viden. Der er ikke noget miljø, hvor eleverne kan undersøge noget - det er i bedste fald et reduceret miljø, hvor der ikke er plads til elevernes selvstændige initiativ, fordi det er åbenlyst, at vinderstrategien er at imitere lærerens eksempler. Mens de løser opgaverne, er eleverne ganske vist aktive og formulerer formentlig deres svar i et kladdehæfte, men dette er ikke undersøgelse, fordi de allerede kender den rigtige metode (forudsat at de har hørt efter). Valideringen afhænger alene af læreren, som godkender eller forkaster elevernes svar. I denne kontekst er læreren kilden til al sand viden; eleverne antager den blot, og følger lærerens gode eksempel.

Denne tilgang har nogle ulemper. Når institutionaliseringen foregår i begyndelsen af undervisningen, og giver eleverne al relevant officiel viden og kun overlader det til eleverne at bruge den på specialtilfælde, opbygger eleverne måske ikke en tilstrækkelig og relevant personlig viden - i nogle tilfælde tager de bare den officielle viden ind som en taktik til at løse en bestemt slags opgaver, som læreren har formuleret, eller som de stilles overfor til eksamen. Måske går de samtidig rundt med modstridende idéer og formodninger, herunder misforståelser. Dette ødelægger muligheden for den rationelle vidensopbygningsproces, som ligger i dialektikken mellem personlig og institutionel viden, som illustreret i Figur 11. Når elever tænker, taler og skriver om matematikopgaver, prøver de at gøre, hvad deres lærer forventer og belønner, selvom de ikke har nogen idé om, hvad det betyder, eller hvorfor det virker. Læringsudbyttet af at gentage løsningsstrategien kan være overraskende begrænset og beror på, om man kan genkende hvilken type af opgaver, den skal bruges på. De fleste lærere har oplevet absurde eksempler på, hvordan elever kan tage fejl med sådan en tilgang.

Omvendt, når den officielle eller institutionelle viden klart genkendes som værende i overensstemmelse med en viden, som eleverne selv har konstrueret, mens de arbejdede med relevante problemer (i adidaktiske situationer), vil den officielle viden forekomme dem at være rationel og velfunderet, og de vil nemmere kunne overføre den til nye typer af problemer, fordi de kender rationalet bag. Men for at opnå dette bedre resultat vil læreren være nødt til at gøre mere end at docere og træne. Og det kræver meget mere af matematiklæreren.

Faktisk er lærerens rolle, i følge TDS, at udtænke og vælge situationer, i hvilke eleverne kan udvikle personlig viden svarende til den institutionelle viden, *herunder* sidstnævntes rationale. Derudover skal læreren organisere dialektikken vist i Figur 11, som er cyklisk: for at formidle ny viden, udvikler og overdrager læreren en matematisk situation, hvori eleverne kan udvikle deres egen personlige viden. Læreren skal også hjælpe eleverne med at dele denne viden i klassens offentlige rum, hvor den til sidst kan blive koblet sammen med den institutionelle viden i officiel form. Hvad *lærerne* skal have viden om, er ikke kun eller primært den institutionelle viden. Det er *situationer, som giver eleverne mulighed for at tilegne sig den institutionelle viden.*



Figur 11: Samspil af personlig og officiel viden i didaktiske situationer

Didaktiske kontrakter

Selv for erfarne lærere kan det være en udfordring at navigere i undersøgelsesbaserede scenarier, da de ikke bare skal forsyne eleverne med officiel viden og sikre, at de er i stand til at anvende den, men skal i stedet guide eleverne i deres egen konstruktion af viden. Når læreren kender alle de rigtige svar og ser eleverne gå forkerte eller mindre produktive veje for at løse problemet, er det faktisk en stor udfordring ikke at rette dem eller guide dem i retning af den bedste strategi. Det er meget vigtigt, at læreren har en klar plan for, hvilke dele af den relevante viden, som skal opbygges af eleverne i adidaktiske situationer (uden lærerens indblanding), og hvilke, som kan institutionaliseres direkte af læreren. I en undervisningssituation har elever og lærere gensidige forventninger til hinandens roller og ansvar i klasseværelset. Samlingen af disse forventninger kaldes situationens *didaktiske kontrakt*. Det er ikke en kontrakt i traditionel forstand, som et skriftligt dokument; men vi kan ikke desto mindre observere dens effekt i lærernes og elevernes handlinger. Når eleverne for eksempel beder læreren fortælle dem, om deres løsning på en lineær ligning er korrekt, viser de deres forventning om, at det ikke (endnu) er deres ansvar at kunne kontrollere et svar på denne type opgave. Læreren kan agere i overensstemmelse med denne forventning og give dem sin vurdering, eller han kan prøve at justere denne del af kontrakten ved at arrangere et elevspil med det nye problem (hvilke teknikker findes der til at bekræfte korrektheden af en foreslået løsning til en lineær ligning).

Hvis eleverne fra begyndelsen har været vant til, at læreren giver svaret, kan der opstå en vis frustration, når de bliver præsenteret for åbne, undersøgelsesbaserede aktiviteter. I disse situationer vil eleverne ofte bede lærerne, mere eller mindre indirekte, om at komme med den forventede strategi. Det kan være fristende for læreren at forklare eleverne, hvad de skal gøre - det er klart lettest for alle parter. Men som tidligere forklaret, vil dette ødelægge læringspotentialet i undervisningssituationen. For at forebygge denne situation, kan det være en hjælp at starte med at forklare eleverne, at undervisningen kommer til at ændre sig, og at de forventes af engagere sig i problemløsning og somme tider også problemafgrænsning, selvom de føler sig uforberedte.

Når eleverne begynder at opleve, at lærerens institutionalisering i slutningen bare er en gentagelse eller syntese af den personlige viden, som de selv har konstrueret, vil de føle, at det de laver er meningsfuldt og vigtigt, og de vil gradvist acceptere deres nye roller og ansvar. Der er mange vidnesbyrd om, at eleverne også over tid vil udvikle et mere positivt forhold til matematik generelt: i stedet for en meningsløs og endeløs ophobning af givne svar, vil matematikken synes mere som et rationelt, udfordrende og tilfredsstillende virkefelt - meget ligesom det er for forskere.

Faserne i didaktiske situationer

Idéen med TDS er at skabe situationer, som handler om en velkendt forhindring inden for en bestemt matematisk viden, som skaber et behov for, at eleverne udvikler eller opbygger ny matematisk viden. At udarbejde og tilpasse sådanne situationer er kerneelementet i TDS og dens "didaktiske iscenesættelse".

Undervisningssituationen består af fem faser. Vi vil beskrive hver af dem og desuden gøre rede for deres specifikke roller i elevernes læring. Rækkefølgen af faserne er ikke nødvendigvis givet på forhånd, og vi vil give et mere samlet større overblik senere. Vi vil illustrere alle faser ved at bruge to eksempler. Det første er puslespilssituationen, som vi præsenterede i introduktionen, og den anden er det berømte *Først til 20*-spil.

> Eleverne skal spille et spil, hvor det gælder om at nå til 20 først. To spillere spiller imod hinanden. Den ene starter spillet ved at vælge tallet 1 eller 2. Den anden spiller lægger 1 eller 2 til det sidst nævnte tal, og begge spillere skal nu forsøge at være den første til at sige 20.

Målet med *Først til 20* er at lære, hvordan division giver svaret på en helt ny kategori af problemer, samtidig med at eleverne får et tidligt bekendtskab med beviser (for at forklare "vinderstrategier"). Helt konkret forventes eleverne at kunne finde frem til og forklare, at vindertallene er 20, 17, 14, ..., 2 (dvs. tal mindre end 20, hvis rest efter division med 3 er 2). Eksperimenter med situationen bekræfter, at eleverne opdager disse tal som delvise vinderstrategier og i den nævnte rækkefølge. Dermed opbygger de en endelig strategi (rest ved division med 3), og opdager undervejs faktisk også nogle grundlæggende elementer og principper for modulo-regning, såsom (hvad der for matematikere er) betydningen af en kongruensklasse.

Devolutionsfasen

Den første fase kaldes devolutionsfasen. Generelt betyder *devolution*, at noget bliver overladt eller overdraget til et lavere niveau. I TDS er devolution startpunktet. Det er fasen, hvor læreren præsenterer problemet og forklarer reglerne for løsningen. Med andre ord overdrager læreren miljøet til eleverne. I spillets terminologi introducerer læreren banen eller spillepladen og spillets regler. Det er vigtigt at sikre sig, at eleverne har forstået reglerne og er i stand til at indgå i de forventede aktiviteter, når devolutionsfasen er gennemført. I *puslespilssituationen* er spillets regler tydelige; eleverne skal lave nye brikker og producere et større puslespil. Efter denne fase giver læreren ikke nogen direkte hjælp. I devolutionsfasen af *Først til 20* præsenterer læreren reglerne, men deltager også i ét spil med en elev for at demonstrere, hvordan spillet spilles under overværelse af hele klassen. Hvorvidt læreren beslutter at berige miljøet ved under "demonstrationsspillet" også at vise, hvordan man kan opsamle spillets gang skriftligt, eller ved kun at præsentere spillet med dets regler og redskaber, udgør en variabel som kan tilpasses elevernes formodede behov.

Handlingsfasen

I handlingsfasen går eleverne selvstændigt i gang med problemløsningen. I puslespilssituationen vil eleverne først bruge deres tidligere erfaringer fra matematiske problemer og øge størrelserne ved at lægge 3 cm til alle sider på den figur, de har fået tildelt. At anvende tidligere udviklet viden og erfaring er en naturlig første hypotese, selvom den her viser sig at være forkert.

I *Først til 20* bliver eleverne bedt om at spille spillet sammen med deres sidemand. I starten vil elevernes arbejde måske være baseret på tilfældige forsøg uden nogen eksplicit strategi. Men allerede i første spil vil de lægge mærke til, at personen, der siger 17, kan vinde spillet, uanset hvad den anden spiller lægger til 17.

Det, som de to eksempler har til fælles, er, at de begge har et stærkt miljø med gode forudsætninger for at støtte elevernes udvikling af personlig viden om det problem, som de er i gang med at løse. I denne fase kan den viden, der fremkommer, være ganske implicit eller elementær, og det kan være svært (hvis overhovedet muligt) for eleverne at formulere bevæggrundene for deres handlinger. Eleverne trækker på deres tidligere udviklede undersøgelseskompetencer, men videreudvikler dem samtidigt. Fasen kan også siges at have ligheder med forskeres første tilgang til et åbent problem. De kender måske reglerne for deres spil eller deres miljø som definitioner, lemmaer og læresætninger fra deres forskningsområde og de alment accepterede matematiske teknikker knyttet til dette felt. Men måske leger de bare stadig med antagelser og har ikke formuleret noget præcist resultat, som det giver mening at forsøge at bevise.

Formuleringsfasen

I formuleringsfasen skal eleverne præsentere, hvad de gjorde i handlingsfasen; første idéer, hypoteser eller bare hvad de har forsøgt indtil videre. Dette kan organiseres på forskellige måder i klasseværelset, men det er ikke altid nok at få eleverne til at diskutere det i klassen. For det første er det ofte de samme få ivrige elever, som deltager aktivt i klassediskussioner. Dette er et problem, hvis vi gerne vil have alle elever til at deltage i undersøgelsesbaseret undervisning. I

IBMT skal kommunikation og personlige hypoteser deles med og kommenteres af klassekammerater, for at man kan formalisere og udvikle de enkelte elevers personlige viden, som begynder at tage form, mens de arbejder med problemet i det givne miljø. Det betyder, at alle elever skal ledes til at formulere deres personlige idéer i formuleringsfasen. Det kan ofte med fordel gøres i mindre grupper.

I puslespilssituationen motiverer samlingen af puslespilsbrikker til formuleringsfasen, hvor hver elev præsenterer og forklarer sin strategi for konstruktionen af en ny puslespilsbrik. Når det ikke passer, må i det mindste nogle af disse jo være forkerte. Eleverne forventes som gruppe at søge at imødegå forhindringer i form af brikker, som ikke passer sammen. Dette vil således give eleverne anledning til at diskutere strategierne, som de allerede har prøvet, og nye idéer kan opstå heraf. Selvom én elev måske finder den rigtige strategi fra starten, skal hun overbevise resten af gruppen med matematiske argumenter, som kan forstås og accepteres af resten af gruppen.

I *Først til 20*-tilfældet organiseres formuleringsfasen som led i en ny spilrunde, hvor klassen inddeles i to hold, som gennem repræsentanter spiller mod hinanden under overværelse af hele klassen. For at blive enige om en fælles strategi, skal eleverne fra hvert hold mellem spillene diskutere, hvad man skal gøre for at vinde det næste spil. Og igen er denne eksplicitering af personlige erfaringer og idéer det første skridt imod konstruktion af fælles viden. Formålet med formuleringsfasen er at skabe en situation, hvor eleverne tvinges af miljøet eller spillets regler til at sætte ord på de erfaringer og idéer, som de har fået ved at arbejde med problemet og herigennem begynde at opbygge elementer af en matematisk teori.

Valideringsfasen

I valideringsfasen afprøver eleverne deres fælles strategier eller hypoteser i miljøet, som skal kunne ”melde tilbage” på værdien af disse. Dette betyder, at elevernes arbejde kan valideres, uden at læreren fortæller dem, om det er rigtigt eller forkert. Det matematiske problem vil til en vis grad give eleverne svar på, om deres svar eller strategi er holdbar, hvis situationen og miljøet er udarbejdet godt nok til at kunne gøre det.

I puslespilseksemplet er miljøet udformet på en sådan måde, at brikkerne ikke kan samles og blive til en forstørrelse af den første figur, hvis eleverne bruger additionsmetoden, eller for den sags skyld *nogen som helst andre metoder* end multiplikationsmetoden. Hvis eleverne i første omgang vælger en mindre produktiv strategi, vil valideringsfasen derfor vise dem, at deres idé var forkert, og at de har brug for en anden strategi, som senere kan blive valideret på samme måde. Det bør her understreges, at den produktive strategi skal være inden for elevernes matematiske rækkevidde. Hvis eleverne kører fast i et problem uden nogen idéer til, hvordan de skal komme videre, vil dette selvfølgelig virke imod hensigten om udvikling af matematisk nysgerrighed og lyst til undersøgelse.

I *Først til 20*-eksemplet er valideringen et spørgsmål om at finde den strategi, som vinder hver gang. Vinderen formodes at have den stærkeste løsningsstrategi. Hvis ikke, kan begge hold udvikle den bedste strategi. Eller begge hold kan fortsætte uden nogen særlig strategi. Selvom vinderen har den bedste strategi af de to hold, er det ikke sikkert, at holdet har udviklet den bedste strategi fra starten af spillet. I dette tilfælde kan læreren dele klassen op i to store grupper, bede dem om at forberede de bedste strategier og til slut kæmpe mod hinanden. Dette kan betragtes som en ekstra formuleringsfase, hvor eleverne prøver på at overbevise hinanden om strategier. Endelig kan man gennemføre en sidste devolution af en valideringssituation, hvor det drejer sig om at bevise eller modbevise kandidater til vinderstrategier igen ved at gennemføre et konkret spil.

Institutionaliseringsfasen

Den sidste fase er institutionaliseringen, og her får den validerede personlige viden endelig status af institutionel viden (eller i det mindste en del heraf). Denne fase vil oftest blive gennemført af læreren, som samler idéerne, opsummerer hovedpunkterne i de diskuterede strategier, og præsenterer dem som én optimal strategi. Præsentationen af, hvad der er blevet institutionaliseret, vil ofte være en kortfattet og præcis præsentation af matematisk viden, sådan som den ses i lærebøgerne.

I puslespilssituationen vil læreren måske introducere den uformelle idé om ligedannede figurer som "den ene er en forstørrelse af den anden" (hvor kongruens er "samme form og størrelse") med en formulering, som ligner de officielle retningslinjer eller den, som bruges i lærebøgerne for det givne niveau. Det, at sider er proportionale, udtrykkes på en praktisk måde ved multiplikation med den samme faktor (7/4), hvilket vha. forsøg, viste sig at give en forstørret figur magen til den første. Mere avancerede måder at udtrykke forholdet mellem den oprindelige og de konstruerede figurer via matematiske afbildninger, kan være for avancerede for eleverne. Det vigtigste er, at den matematiske viden bygges på erfaringer og argumentation, frem for at blive præsenteret som noget man bare skal tro på. Dette er på en måde endnu sværere at opnå på et niveau, hvor de mest generelle, formelle definitioner og argumenter stadig er uden for elevernes rækkevidde.

I *Først til 20* er det, der bliver institutionaliseret, vinderstrategien. Den kan reduceres til en liste af tal, som en spiller skal stræbe efter at sige for at få kontrol over spillet og vinde det til sidst. Det kan være forholdsvist let for eleverne at udpege tallet 17 som vigtigt, som tidligere nævnt. Vindertallene eller strategien kan skrives som tallene $w=3n+2$. Hvis man starter med at vælge tallet 2, kan man med denne strategi bevare kontrollen gennem hele spillet, og være sikker på at vinde. For at bringe eleverne frem til denne erkendelse, kan det være nødvendigt for læreren hele tiden at opmuntre eleverne til at forbedre deres vinderstrategi. Afhængigt af niveauet, kan man analysere det mere abstrakte spil "Først til N", hvor man lægger et af tallene 1,2...,n til for hver gang. Og så er regning med restklasser lige om hjørnet.

Mængden af matematiske detaljer, som præsenteres af læreren i denne fase, skal afpasses efter aktiviteterne, som udføres af eleverne. Den skal være en sammenfatning af den viden, som er opbygget af eleverne for at få dem til at genkende deres personlige viden og relatere den til den viden, som bliver institutionaliseret og erklæret klassens fælles viden.

Det er vigtigt, at denne fase ikke ender som en forelæsning, som gør elevernes handlinger nytteløse. Institutionaliseringen skal ligge i forlængelse af elevernes konstruktion af viden vedrørende det givne problem. Hvis læreren begynder at forelæse og gå langt ud over elevernes arbejde, risikerer hun, at eleverne oplever deres arbejde som et påskud for læreren til at tale om de emner, som er vigtige men hinsides elevernes rækkevidde. Og så vil eleverne ikke være tilbøjelige til at værdsætte eller få lyst til at begive sig ud i matematiske undersøgelser og selvstændig vidensopbygning, men vil imitere læreren, eller forsøge at gætte hendes intentioner.

Om vigtigheden af adidaktiske situationer

I undervisningssituationer, hvor eleverne ikke gør fremskridt som forventet, kan læreren føle sig fristet til at "spole frem" til faserne, hvor de har mere kontrol over situationen. Men som antydet vil dette let ødelægge potentialet for rationel og stabil konstruktion af viden hos eleverne. Devolutionen og Institutionaliseringen er didaktiske situationer. Handlingssituationer er altid adidaktiske, mens formulerings- og valideringssituationer kan være både adidaktiske og didaktiske. Men man bør stræbe efter at maksimere de adidaktiske komponenters rolle. Især er elementer af adidaktisk validering – altså uden læreren som overdommer - ofte afgørende for at sikre, at eleverne får udviklet et fuldt ud rationelt forhold til den tilsigtede viden, modsat tilfældige forsøg, hvor det eneste, der afgør om man rammer rigtigt, er lærerens godkendelse. Overordnet taler vi om det *adidaktiske potentiale* i en didaktisk situation dvs. potentialet for, at eleverne kan arbejde selvstændigt med det matematiske problem og ud fra det nå til den tilsigtede viden. Det er vigtigt for læreren at søge at realisere situationens fulde adidaktiske potentiale gennem passende valg i devolutionsfasen og gennem en nøje tilpasning af miljøet til elevernes evner (uden at gøre problemet for nemt).

Opsummering af faserne

I Figur 12 ses en oversigt over de fem faser, som didaktiske situationer består af.

	Lærerens rolle	Elevernes rolle	Miljø	Situation
Devolution	Introducerer, overdrager miljøet	Modtager, prøver at løse et problem	Bliver etableret	Didaktisk
Handling	Observerer og reflekterer	Handler og reflekterer	Problemet bliver udforsket	Adidaktisk
Formulering	Planlægger, hvis nødvendigt sætter i gang med spørgsmål	Formulerer så specifikt som muligt	Åben diskussion	Adidaktisk eller didaktisk
Validering	Lytter og evaluerer hvis nødvendigt	Argumenterer, prøver at forstå andres argumenter	Vejledt diskussion	Ofte didaktisk
Institutionalisering	Præsenterer og forklarer	Lytter og reflekterer	Institutionaliseret viden	Didaktisk

Figur 12: Et overblik over TDS-faserne, deres funktion og handlinger for dem som deltager i undervisning og læring (Winsløw, 2006, s. 140)

Som nævnt i starten, så bliver de fem faser ikke kun brugt som redskaber til at designe undervisning baseret på TDS. Faserne kan bruges til at analysere al slags matematikundervisning (f.eks. for at se, om der er nogle faser, der mangler eller ikke er tilstrækkeligt udviklet). Selv hvis undervisningen er meget forskellig fra den, vi har præsenteret i dette kapitel, vil faserne stadig kunne bruges til at analysere undervisningen. Og for lærerne vil de være et vigtigt instrument til at identificere elementer i deres undervisning, som er afgørende anderledes, og som spiller en vigtig rolle for deres elevers indlæring.

Den dynamiske brug af faserne

I de to simple eksempler, som blev brugt i præsentationen af faserne, er det tydeligt, at de begge er konstrueret, så det didaktiske miljø fastholder elevernes kontrol over egne handlinger, lader dem eksperimentere og formulere hypoteser (både gode og dårlige) og giver nogle en form for tilbagemelding, som er stærk nok til at validere deres hypoteser. Helt konkret kan puslespillet ikke samles, når brikkerne konstrueres med andre strategier end multiplikation, eller eleverne bliver ved med at tabe nogle spil, hvis de ikke har en komplet vinderstrategi. De to situationer demonstrerer også en meget præcis fortolkning af faserne, og hvordan de hænger sammen. Men hvad sker der, hvis læreren overdrager et miljø med et problem, som eleverne ikke er i stand til at løse?

Når man planlægger matematikundervisning, er det selvfølgelig vigtigt at have eller få en vis indsigt i, hvilken matematisk viden eleverne allerede har. Lærerens formodninger om dette kan være baseret på læreplanen, lærebogen, som klassen har brugt hidtil, eller andre ressourcer, som giver en indikation om forventede resultater. Men selv om eleverne forventes at skulle have lært noget, kan det være en god idé at "tjekke" relevante dele af, hvad de faktisk husker fra tidligere klassetrin, som en del af devolutionsfasen.

En naiv måde at søge information herom er f.eks. at spørge eleverne: kan I huske Pythagoras læresætning? Selvom dette indebærer en risiko for, at nogle elever kan have problemer med at indrømme, at de ikke kan huske læresætningen. Nogle elever vil undlade at svare nej for at behage læreren. Andre er bange for at tabe ansigt. En mere frugtbar måde at spørge på kunne være: hvad ved I om retvinklede trekanter? Hvis de ikke nævner den forventede viden, kan læreren måske være nødt til at devoluere et nyt problem til eleverne, før han overdrager det oprindeligt tiltænkte problem og miljø. Dette nye problem skal give eleverne mulighed for at genopdage den viden, som de havde glemt, så de får et fælles udgangspunkt ved at rekonstruere den viden, som det var forventet, at de allerede havde.

Et lignende problem kan opstå i handlingsfasen. Eleverne kan misforstå devolutionen eller mangle ressourcer til at udvikle nye strategier. I puslespilseksemplet har de måske ikke nogle alternative idéer til forstørrelse af sidelængder ved addition. Hvordan denne udfordring i undervisningssituationen kan overvindes afhænger af, hvor mange elever, der ikke evner at komme videre, og elevernes matematikfaglige niveau overordnet set. I disse situationer skal læreren have overvejet, hvordan han kan justere miljøet. Det svære her er at undgå at afsløre den viden, som det er meningen, at eleverne selv skal konstruere. I puslespilssituationen kan læreren igangsætte en formuleringsfase, hvor eleverne taler om deres første idéer og så lave en tabel, som viser sidelængderne i den givne puslespilsfigur i den ene række og de forstørrede sidelængder i den anden. Dette kan give anledning til at tænke, at der findes flere "metoder" til at forstørre, som en rudimentær idé om funktioner. Faktisk er det jo sådan, at 4 kan blive til 7 som et resultat af mere end én udregning. Et centralt spørgsmål, som kan opstå og blive diskuteret er: hvad sker der med en sidelængde på 1? Bliver den virkelig til 1+3=4 efter forstørrelse? Hvis vi indser, at en sidelængde på 4 består af fire stykker af længde 1, kan det være en stor hjælp, da fire forstørrelser af sider med længde 1 tilsammen skal give en side med længden 7. Med sådanne observationer, som så vidt muligt kommer fra eleverne selv, kan selv de elever, som ikke havde nogle idéer i starten, være i stand til at udvikle en anden tilgang til det givne problem. Dette betyder, at faserne kan bruges dynamisk på en kontrolleret måde. Afhængigt af elevernes engagement i problemet og miljøet, kan det være en god idé at bevæge sig frem og tilbage i faserne for at sikre, at alle kan agere og opbygge en vis mængde personlig viden i forhold til problemet, der arbejdes med. Samspillet mellem personlig og delt viden er en central dynamik, som kan kontrolleres med en systematisk og planlagt anvendelse af faserne.

Et mere detaljeret eksempel til gymnasiebrug

I dette afsnit vil vi præsentere et eksempel på TDS-baseret undervisning med læringsmålet at "introducere idéen om og nogle metoder til optimering". Problemet, som eleverne skal arbejde med, er følgende:

Du får en snor med en længde på 1 m. Denne snor skal deles i to stykker. Det ene stykke skal bruges til at danne et kvadrat, og det andet skal bruges til at danne en ligesidet trekant. Spørgsmålet er, hvor snoren skal klippes over for at opnå det mindst mulige samlede areal af de to geometriske figurer?

Målet med denne aktivitet er at give eleverne et første møde med optimeringsproblemer, hvor de under anvendelse af forskellige strategier kan finde en løsning under anvendelse af kendt viden.

Miljøet består af problemet fysiske snore (f.eks. 5 snore pr. gruppe), en lineal, en saks og måske en lommeregner eller en computer. Devolutionsfasen startes af læreren med spørgsmål som: "Hvad ved I om arealer i geometriske former?" Dette forventes at minde eleverne om de formler, de kender, såsom arealet af kvadrater og trekanter:

$A_{kvadrat} = s^2$	(hvor s er sidelængden),
$A_{trekant} = ½hb$	(h er højden og b er længden på grundlinjen)
$A_{trekant} = ½ab\sin C$	(hvor a og b er sidelængderne i trekanten og C er vinklen mellem dem).

Man kan også tale om andre formler. Efter, at der er blevet talt om den institutionelle viden om arealer, deles eleverne op i grupper. Hver gruppe får 5 snore, en saks og en lineal. De har også lov til at bruge lommeregner eller computer, hvis de vil. Grupperne får nu problemet udleveret. Hele denne fase er en didaktisk situation, hvor læreren fungerer som moderator for klassedialogen.

I handlingsfasen begynder eleverne at arbejde med problemet. Her er der flere strategier, der kan anvendes, og vi vil nævne tre af dem. Nogle af eleverne vil vælge en strategi, hvor de forsøger sig frem: de klipper en snor over, danner to figurer, måler og udregner arealet af firkanten og trekanten. Eller den samme snor kan bruges til at lave to figurer. Så klipper man den næste snor, som måles og så fremdeles. Til sidst har eleverne måske fået en idé om, hvordan snoren skal deles for at få det bedste resultat, baseret på deres erfaringer. Andre grupper får måske den idé, at de kan bruge disse målinger som datasæt. Disse kan afbildes i et computerprogram eller en grafisk lommeregner eller tegnes med papir og pen og give en grafisk præsentation af, hvor der skal klippes, samt summen af arealer for forskellige valg. Hvis data er godt valgt, forstået på den måde at de dækker hele snoren, inkl. arealet nær den mindste værdi, vil disse vise en parabel. Hvis datapunkterne er tastet ind i et computerprogram, kan eleverne udføre en regression for at nå frem til en formel for funktionen, som beskriver dataene. Afhængigt af den valgte strategi og de forhåndenværende redskaber, vil eleverne kunne finde den mindste arealfunktion ved at anslå den mindste y -værdi baseret på, hvor datapunktet er placeret i koordinatsystemet. Hvis eleverne bruger blyant og papir, kan de tegne en approksimation af parablen, som beskriver datapunkterne. Hvis eleverne bruger en grafisk lommeregner eller et computerprogram, kan de bruge regression til at finde formlen, som beskriver forholdet mellem arealet og punktet, hvor de klipper snoren. Vha. et CAS-værktøj kan eleverne finde yderpunktet ved at lade programmet analysere grafen, eller simpelthen ved bare at kigge på grafen. Hvis eleverne har lavet den rigtige regression, vil de få en formel på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

hvor f er arealet og x er længden på et stykke snor, og i dette tilfælde er det mindste samlede areal givet ved

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

som svarer til

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Elever, som vælger denne sidste strategi, skal selvfølgelig have forhåndskendskab til (andengrads-)polynomier, parabler, og hvordan yderpunkterne af disse beregnes.

Andre grupper kan anskue problemet som et algebraisk problem. Hvis 1 m snor er lig med 4 sider af et kvadrat, $4s$, og tre sider af en trekant, $3t$, så får vi regnestykket $1 = 4s + 3t$. Herefter kan eleverne udtrykke det totale areal som

$$A_{total} = A_{kvadrat} + A_{\text{trekant}}$$

Denne funktion er et andengradspolynomium, hvor man kan finde dets mindste værdi med de samme metoder som beskrevet ovenfor, hvis man valgte regressionsstrategien.

Denne fase er adidaktisk. Læreren blander sig ikke i gruppearbejdet, men kan hjælpe med at vise, hvordan man bruger CAS-værktøjet, lommeregneren eller andre praktiske problemer, hvis det er nødvendigt. Samtidig kan læreren få en indsigt i hvilke grupper, der har valgt hvilke strategier, eller hvilke udfordringer grupperne møder i deres undersøgelser. Dette konkrete eksempel viser idéen med den åbne tilgang, hvor eleverne får et problem præsenteret, som kan have mange forskellige løsningsstrategier, som alle ender med det samme svar.

Efter den første korte fase, bliver eleverne bedt om at præsentere deres strategi til en løsning af problemet. At sætte ord på deres handlinger hjælper eleverne med at blive mere tydelige omkring deres lidt vage idéer og hypoteser fra deres undersøgelsesproces. Man kan sige, at gruppearbejdet omfatter den første (adidaktiske) formuleringsfase, idet eleverne er nødt til at blive enige om strategier og hypoteser for at kunne samarbejde. Disse faser i grupperne kan endvidere føre til, at eleverne afviser nogle idéer og går videre med andre. Der kan også heri være elementer af rudimentær validering. Baseret på de første eksperimenter med at klippe, måle og udregne arealer, kan eleverne udvikle en overbevisning om, at de ved, hvor de skal klippe snoren. Men en tredje udregning kan føre til et endnu større areal end de første to udregninger. Gruppen er nødt til at overveje deres strategi. Under gruppearbejdet kan alle adidaktiske eller potentielt adidaktiske situationer altså have fundet sted, inden man har talt om strategier med de andre grupper.

Når eleverne er nået til et første bud på et svar på problemet, skal grupperne præsentere deres arbejde for resten af klassen. Som en første præsentation kan grupperne simpelthen blive bedt om at angive længden på et af stykkerne for at se, om alle er enige om, hvor snoren skal klippes. Hvis grupperne ikke er enige, er der så meget desto mere grund til at præsentere de forskellige løsninger og prøve at forstå de andre gruppers strategier. Det forventes, at dette vil få nogle af eleverne til at indse, at en strategi baseret på tilfældige forsøg er mindre effektiv, når man søger efter et præcist svar men også, at deres arbejde indtil videre godt kan bruges, hvis de skifter til en regressionsstrategi.

Her kan formuleringsfasen have et overlap med valideringsfasen. Alle forslagene til, hvor snoren skal klippes, kan afprøves i miljøet. For hver foreslået længde, kan det samlede areal for firkanten og trekanten udregnes. På denne måde kan miljøet hjælpe med valideringen af hvilke grupper, der har foreslået det klip, som giver det mindste areal. Udfordringen her er at få eleverne til samtidig at begrunde deres valgte strategi. Derfor kan læreren spørge, om man kan være sikker på, at der ikke findes et endnu bedre valg for klippet. Dette betyder, at hvis klassen har accepteret at løse opgaven ved at forsøge sig frem, skal de nu også kunne argumentere for dette på en mere præcis måde.

En udfordring for elever, som vælger at bruge regressionsmetoden, er at finde frem til, hvilken funktion, der faktisk beskriver situationen bedst muligt. Hvis de kun har data fra under eller over yderpunktet, kan de betragte forholdet som værende f.eks. lineært eller eksponentielt. For at undgå disse situationer, er det nødvendigt at spørge eleverne, om disse forhold faktisk giver mening. Dette kan anskues som en ny devolution af et lidt andet problem i et lignende miljø.

Den optimale strategi kan ikke valideres i det forhåndenværende miljø. Derfor spiller læreren en mere aktiv rolle i denne del af valideringen, men det er stadig vigtigt, at resten af klassen også har forstået den præsenterede strategi.

I institutionaliseringsfasen er det vigtigt, at læreren opsummerer idéerne, og sætter dem op i forhold til hinanden. For eksempel, eleverne som oprindeligt valgte at forsøge sig frem, gjorde det samme som dem, der lavede et datasæt. Og de elever, som producerede data, fandt faktisk punkter, som i teorien burde ligge på grafen, som repræsenterede arealfunktionen. Det, som strategierne har til fælles, er, at de er bud på, hvordan man kan finde den præcise værdi af det mindste areal - optimeringsproblemet. I alle tilfælde er udregningerne ikke simple, men alligevel til at gå til. Dette skaber behovet for at begynde at tale om andre metoder til optimeringsproblemer specielt i tilfælde, hvor vi ender med polynomier af højere grader.

Yderligere eksempler, på hvordan disse idéer kan bruges, og andre principper for udformningen af IBMT-baserede moduler, kan findes i andre publikationer om MERIA-projektet (se http://www.meria-project.eu/).

4. Realistisk matematikundervisning

Indledning

Som nævnt tidligere viser Artigue og Blomhøj (2013), hvordan en række veletablerede forskningsprogrammer inden for matematikundervisning har udviklet metoder og idéer til, hvad der nu kaldes IBMT. Realistic Mathematics Education (RME) er en af de mest fremtrædende sammen med TDS.

RME består af idéer og principper for udformning af læringsprocessen. Dette kapitel giver et overblik over hovedidéerne i RME, som er målrettet til lærere og til planlæggere af undervisning. Idéerne illustreres med opgaveeksempler. I denne tekst er teorien om RME bygget op omkring to centrale principper:

(1) Matematik er en menneskelig aktivitet.
(2) Meningsfuld matematik udspringer fra indholdsrige kontekster.

I de sidste afsnit beskriver vi sammenhængen mellem principperne for RME og Undersøgelsesbaseret matematik (IBMT) og diskuterer idéer fra RME, der kan være til nytte i udformningen af IBMT-scenarier.

Struktureringen af matematik

Matematikviden kan i meget høj grad struktureres, mens RME påstår, at læringsprocessen kræver en mindre formel tilgang. I den formelle tilgang starter man med aksiomer, postulater og definitioner og udleder derfra lemmaer og sætninger. Sandheden af disse antagelser bliver etableret på baggrund af beviser inden for den aksiomatiske ramme. Traditionen for at organisere og præsentere matematikresultater på denne formelle måde strækker sig fra Euklid (300 f.Kr.) til nutidens matematikforskning. Matematik tænkt som en bygning, hvor aksiomer er fundamentet og logik er mørtel, er imponerende og effektiv. Den formelle præsentation af resultater giver mulighed for utvetydig og akademisk kommunikation. Det er intet under, at nogen har baseret matematikundervisning på dette. I mange lande blev der undervist i geometri ud fra Euklids *Elementer* indtil 1950'erne. I 1950'erne og 60'erne introducerede New Math-bevægelsen mængdelæren som basis for matematikundervisning på gymnasieniveau.

Matematik som en menneskelig aktivitet

Skal denne ultra-strukturerede samling af matematisk viden være den største inspiration for, hvordan vi former vores matematikundervisning? RME har et andet synspunkt. Inspirationen er først og fremmest, at matematik *er en menneskelig aktivitet*. Den organiserede samling af matematisk viden er et produkt af denne aktivitet. For eksempel er en god definition af et matematisk objekt ofte resultatet af en lang proces af matematiske tanker, idéer og forsøg. RME fremhæver vigtigheden af disse processer, som fører til den polerede version af et matematisk objekt eller resultat.

Man kunne i starten af et kapitel om logaritmer definere logaritmefunktionen som den omvendte af en eksponentialfunktion. En RME-baseret tilgang vil hellere begynde med en opgave, der viser behovet for begrebet. Opgaven skal give eleverne muligheden for selv at opleve dette behov for en logaritmefunktion. Her er en grundlæggende ide.

Rogier sætter 100 euro i banken. Renten er 2%. Udfyld skemaet.

Beløb (A)	100	$\approx 108{,}24$	$\approx 129{,}36$	$\approx 199{,}99$	$\approx 507{,}24$
År der er gået (t)	0				

Kender du en funktion, som kan bruges til at beregne *t* ud fra A?

Svaret vil højst sandsynligt være "nej", men det er vigtigt for elever at stille dette spørgsmål og dermed forstå, at der er behov for en ny funktion. Elever er ikke vant til den slags spørgsmål. Det er derfor bedst, at spørgsmålet besvares i en klassediskussion, som ledes af læreren. Nogle elever kunne f.eks. foreslå (kvadrat)rodfunktioner og vil få brug for hjælp til at indse, hvorfor det er forkert.

Antididaktisk inversion

At præsentere en elev for matematik i dens ultra-strukturerede form (baseret på aksiomatiske systemer) er en *inversion*. Eleven konfronteres med resultatet af en ofte lang og svær matematikproces. Hvis eleven skal studere matematik på denne måde, så er læringsprocessen den omvendte proces af den, som førte til matematikken. Han vil være nødt til at arbejde hårdt (eller vente) for at finde frem til hvilke spørgsmål, der gav anledning til denne matematik, og hvilke problemer denne matematik løste. Læreren kan bevidst have valgt denne fremgangsmåde, men RME påstår, at det ikke er en didaktisk metode: det er en *antididaktisk inversion* (Freudenthal, 1991).

Generelt er en formel præsentation af matematik normalt temmelig vanskeligt tilgængelig for nye elever. Der er mange didaktiske argumenter imod at konfrontere en elev med matematikken i dens ultra-strukturerede polerede form i begyndelsen af læringsprocessen:

- Den naturlige proces (at blive ledt af spørgsmål, problemer, nysgerrighed...) for at komme frem til matematikken vises ikke. Eleven fratages mening og motivation.
- Intuitionen, som fører til teorien, er langt væk fra læringsprocessen.
- Det er ikke tydeligt, hvad der bliver løst, modelleret eller opfanget af systemet (og hvad der ikke gør).
- De undersøgende kompetencer, der var brug for til at organisere matematikken, bliver på denne måde overset.

- Præsentationen kan være for omfattende eller for sparsom. Et aspekt af matematikken kan være meget svært at forstå, men kun få lidt opmærksomhed i en formel præsentation.

Mange matematikere, herunder matematiklærere, vil huske deres første møde med ε, δ-definitionen på grænseværdier på første år af deres studie eller måske allerede i gymnasiet. Hvorfor var det så svært at forstå? Det giver ikke mening for en elev, hvis hun ikke har nogen forståelse for problemstillinger med stringent bevisførelse, som kom frem inden for analyse i begyndelsen af det 19. århundrede. Hvilket problem løser det? Hvorfor bruge så meget energi på at bevise noget så åbenlyst? Hvorfor virker andre definitioner ikke?

Ligeledes, hvis man bare fremsætter den distributive lov "$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$" uden videre på gymnasieniveau efterfulgt af øvelser som "reducer $5 \cdot (a + 2)$", så er det formelt en helt korrekt fremgangsmåde, men det giver ingen mening for eleven. Det forklarer heller ikke, hvorfor dette er en nyttig regel eller færdighed.

Realismens rolle i læringsprocesser

Det er indlysende, at meningen (den formelle) med matematiske objekter og procedurer er nøje og præcist beskrevet i formelle præsentationer af matematik. Hvis præsentationer af formel karakter kan være svært tilgængelige og ikke didaktiske for nye elever, hvordan skal man så kunne videreformidle denne mening?

En læringsproces består af en række læringsaktiviteter. En af de centrale idéer i RME er, at situationerne, som disse aktiviteter er baseret på, skal være virkelige eller realistiske. Meningen med matematiske begreber og procedurer bygger på, hvad der allerede er meningsfuldt for eleven, på hvad der er *virkeligt* for eleven.

Hvad menes der med "virkeligt/realistisk" i RME? Noget er virkeligt for en elev, hvis det giver tydeligt mening for hende, hvis hun kan forstå det. Noget er virkeligt for en gruppe af elever, hvis det er *sund fornuft* for dem. "Virkeligt" betyder ikke (nødvendigvis) baseret på virkeligheden, for eksempel baseret på situationer fra andre fag som fysik eller økonomi. "Realistisk" læringssituation betyder heller ikke nødvendigvis, at den er baseret på oplevelser fra hverdagen. Og "virkelig" skal bestemt ikke forstås i en ontologisk forstand: hvad eksisterer, og hvad gør ikke. "Meningsfuld matematik" kan måske være et bedre udtryk end "realistisk matematik", men sidstnævnte er nu engang den faste betegnelse, da begrebet opstod i det forrige århundrede. Meningsfuld matematik læres ved at tage udgangspunkt i noget, der allerede giver mening for eleven, specielt med baggrund i en meningsfuld kontekst. Som Freudenthal formulerer det:

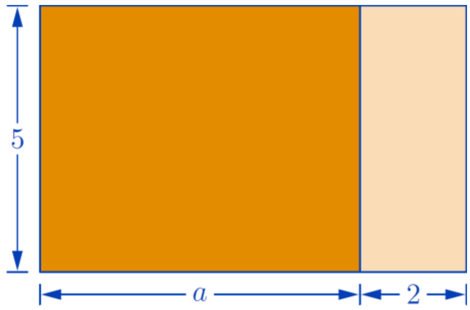
> "*Hvor virkelige begreberne er, afhænger af modtageren, og under visse omstændigheder kan kognitiv forståelse være mere livagtig end den manuelle eller sanselige, som i øvrigt altid forveksles med kognition*" og "*(Hvad der er virkeligt er) gensidigt forbundet med faktiske, tænkte og*

symboliserede relationer (....), som kan strække sig fra basale hverdagsoplevelser til de ydre grænser af den matematiske forskning, alt efter den pågældendes grad af engagement." (Freudenthal, 1991, s.30).

De distributive love kan introduceres i en realistisk geometrisk kontekst:
Beregn arealet af hele rektanglet på to måder:

(1) Først det mørke, så det lyse rektangel, og læg derefter de to sammen.
(2) Beregn først den samlede bredde og gang så med højden

(baseret på *Broek et al., n.d*)



Hvorfor er dette en (mere) realistisk fremgangsmåde? Det forudsættes, at eleven er fortrolig med at beregne arealer. Meningen med ligheden opstår naturligt, da resultatet af de to beregninger skal være ens. Meningen opstår af opgaven alene. Lærerens rolle er at introducere opgaven, vejlede eleverne og reflektere over opgaven i klassen. Han skal inkorporere opgaven i læringsprocessen på den rigtige måde. Vi vil senere komme tilbage til RME-teoriens syn på dette.

Indholdsrige strukturer og kontekster

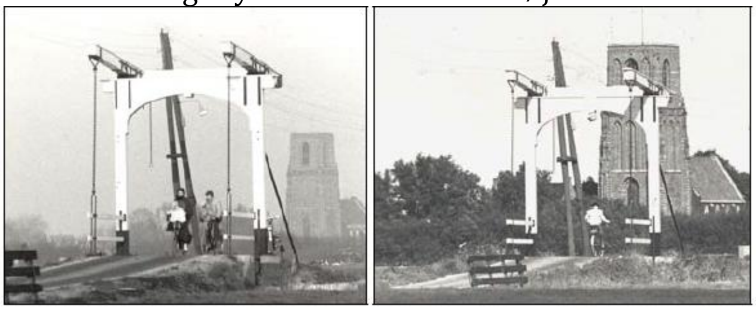
Ifølge RME opstår den nye mening med matematikken for en elev ikke fra den formelle matematiske konstruktion, men mest fra det, der er virkeligt for eleven. Den didaktiske situation skal give mulighed for at udvikle ny viden ud fra det, der allerede er meningsfyldt, dvs. den skal være rig på ikke-matematisk kontekst og på matematiske strukturer. Her er nogle eksempler på, hvordan en matematisk struktur eller en kontekst kan være *indholdsrig*:

(1) den er forbundet med forskellige aspekter af elevens sunde fornuft - jo flere forbindelser, jo rigere struktur;
(2) dens nytte fører længere matematisk end situationen, hvor den blev introduceret;
(3) den giver mulighed for flere tilgange eller løsninger på forskellige niveauer.

Vi vil nu illustrere disse måder med konkrete eksempler.

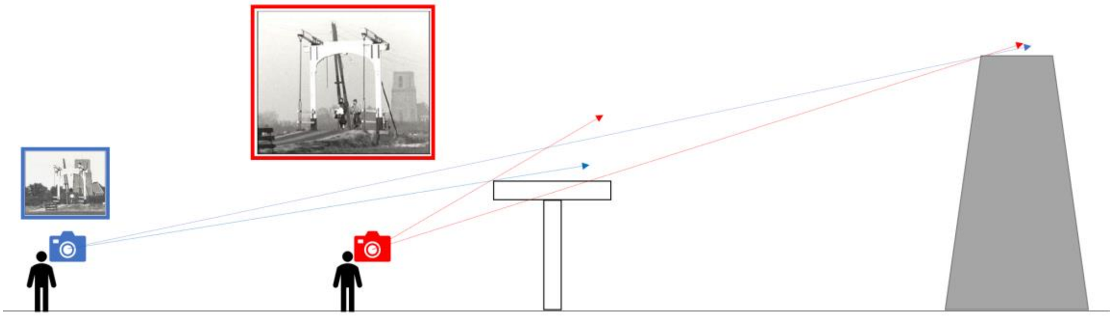
Punkt (1) illustreres af følgende "Tårnet og broen"-opgave. Den blev brugt i et eksperiment til at introducere størrelsesforhold og geometrisk ræsonnement i en 3D-kontekst (Goddijn, 1979).

Nedenfor ser du to billeder af det samme smukke hollandske landskab med et tårn og en bro fra forskellige synsvinkler. Hvad er højest: tårnet eller broen?

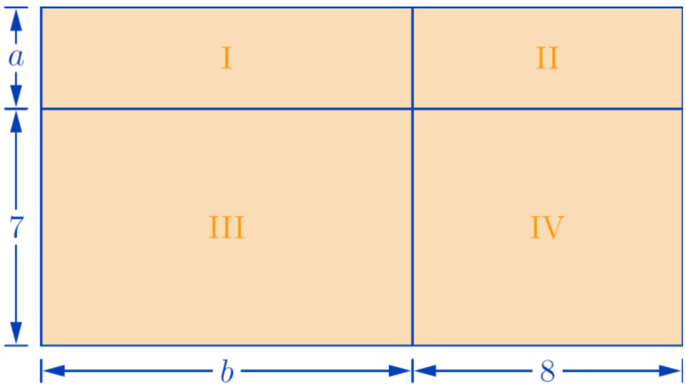


Hollandske skolebørn cykler overalt, især til skole. De har helt sikkert set broer og tårne som disse fra forskellige synsvinkler. De tager billeder med deres smartphones (og redigerer dem) dagligt. Og derudover har alle en medfødt evne til at forestille sig scener fra forskellige perspektiver. Så denne situation er på mange måder realistisk. Og nu skal de altså tænke over den på en matematisk måde. De vil være nødt til at lære begreber som synsvinkler, projektioner, synslinjer og størrelsesforhold for at diskutere situationen, hvilket er opgavens mål.

Nedenstående figur opsummerer nogle af de matematiske aspekter af problemet. Fotografierne er afbildet med et mere korrekt størrelsesforhold.



Punkt (2) er illustreret igen med rektangeleksemplet ovenfor. Det udgør en fin overgang til øvelser som: reducer $3 \cdot (x + y + 3)$, hvor rektanglet bliver opdelt i tre i stedet for to. Det kan også bruges på $(a + 7)(b + 8)$, hvor rektanglet er delt i fire



Dette bliver dog undertiden forklaret med en anden model, som ikke passer med punkt (2). Denne anden model kaldes "papegøjenæb", og den kan illustreres som følger:

$$(a + 7)(b + 8) = a\,b + 8a + 7b + 56$$

Når du har ganget to led, skal du tegne en streg imellem dem. Hvis du har gjort det rigtigt, vil næbet komme til syne. Denne model er en memoteknik og giver ikke nogen forståelse af, hvad der sker. Den opfylder ikke punkt (2), da du kun får et næb, når du reducerer udtrykket $(a + c)(b + d)$, og ikke med udtryk som $(a + c)(b + d + e)$ eller mere komplekse udtryk.

Hvis man fokuserer på den formelle præsentation af matematik som inspirationen for undervisning, så er det et naturligt valg at begynde med det matematiske objekt med mindst struktur. På den måde bygger man matematisk viden op fra de helt fundamentale begreber. Geometri ville begynde med aksiomer om punkter og linjer. Analysen kunne begynde med mængder, naturlige tal til reelle tal, herefter funktioner osv. En sådan tilgang blev brugt i New Math i 1960'erne. Men det er en anden inkarnation af antididaktisk inversion. De fleste af disse strukturer udgør slutningen i en proces med abstraktion, "forenkling" og reorganisering af matematisk viden. Ifølge RME er det mere lærerigt for eleverne at gennemgå en proces, hvor de opnår dette selv.

Punkt (3) kan illustreres ved følgende øvelse. Så snart elever er introduceret for at erstatte tal med variable, kan man begynde at løse ligninger.
Find løsninger til:

$$2x = 8$$
$$7 + x = 15$$
$$x^2 = 25$$
$$x + 8 = 2x + 2$$
$$(x + 2)^2 = 16$$

Denne liste kunne være meget længere; jo mere variation i ligningerne, jo mere værdifuld vil opgaven være. Hvis de ikke tidligere har lært nogen løsningsmetoder vil elevernes succesrate variere. De vil også bruge forskellige typer af argumentation. Gennem denne øvelse kan læreren finde ud af, hvad der kommer naturligt til eleverne og bruge dette senere, når formelle løsningsmetoder diskuteres. Lærerne får indsigt i forskellene mellem eleverne.

Matematisering

RME vil gerne betragte matematik som en menneskelig aktivitet. Freudenthal kalder et af hovedelementerne i denne aktivitet for *matematisering*:

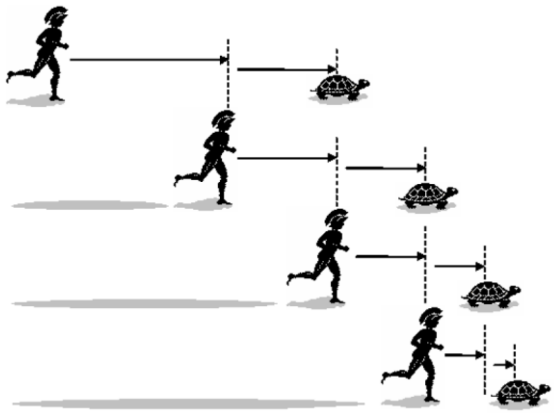
> "*Matematisering er hele matematikerens aktivitet med at organisere, hvad enten det vedrører det matematiske indhold og udtryk, eller mere naiv, intuitiv, lad os sige levet erfaring i dagligdags sprog (...) (Målet er) at frembringe ikke-matematiske udbytterige strukturer for at gøre eleven fortrolig med at opdage struktur, strukturere, forringe strukturer og matematisere. På den måde kan de måske opdage de kraftfulde dårlige strukturer i en kontekst af gode strukturer, i håbet om, at med den tilgang, vil de også fungere i andre (matematiske såvel som ikke-matematiske) kontekster. Hvis man starter med de dårlige matematiske strukturer, kan det være, at man aldrig når til de gode ikke-matematiske strukturer, hvilket i virkeligheden er det rigtige mål.* "(Freudenthal, 1991, s.31 og s.41)

Matematisering indebærer: aksiomatisering (skabelsen af et aksiomatisk matematisk system), formalisering (overgangen fra en intuitiv til en formel tilgang), skematisering (skabelsen af meningsfulde netværk af begreber og processer), algoritmisering (overgangen fra at kunne løse et problem ved hårdt arbejde til at kunne løse det med rutine), modellering (opstille systemer som repræsenterer, idealiserer, og simplificerer andre systemer) osv.
Man kan skelne mellem to retninger inden for matematisering: den horisontale og den vertikale (Treffers, 1987). Horisontal matematisering er overførslen af et problem eller en situation til en matematisk diskurs. Dette gør det muligt at behandle eller diskutere situationen *matematisk*. Vertikal matematisering er matematiseringen inden for en matematisk diskurs.
Så snart man stiller (eller svarer på) et spørgsmål om en situation vedr. antal, afstand, form, symmetri, rækkefølge, sandsynlighed eller andre typer af strukturer i matematikken, sker der en horisontal matematisering. Begge typer

af matematisering bør forestås af eleverne. Hvis den horisontale del forsømmes, vil eleven miste sammenhængen mellem den matematiske viden og situationerne, hvori den bruges. Hvis den vertikale proces forsømmes, mister eleven muligheden for at forstå de dybe sammenhænge i matematikken, opbygge formelle systemer og finde en bedre forståelse.

Denne opgave er en del af et kursusmateriale om diskrete modeller for 16/17-årige. Opgavens mål er at øve færdigheder i modellering med talrækker, at øve summering af talrækker og introducere den geometriske række. Den begynder med at introducere det berømte paradoks om Achilleus og skildpadden. Mange elever kender historien, men de kan nemt komme i vanskeligheder i forsøget på at forklare den (i en klassediskussion f.eks.).

Achilleus og skildpadden er i et kapløb til fods. Da Achilleus er hurtigere, får skildpadden et forspring. Hver gang Achilleus når det sted, hvor skildpadden var lige før, er skildpadden nået lidt længere. Derfor kan Achilleus aldrig overhale skildpadden, og skildpadden vinder kapløbet. Hvad er der galt med denne argumentation? Hvordan kan vi løse paradokset med matematisk argumentation?



Eleverne udfordres nu til at lave en model af situationen (som en matematisk talrække). Dette fører naturligt til spørgsmål om tid og afstand som variabler.

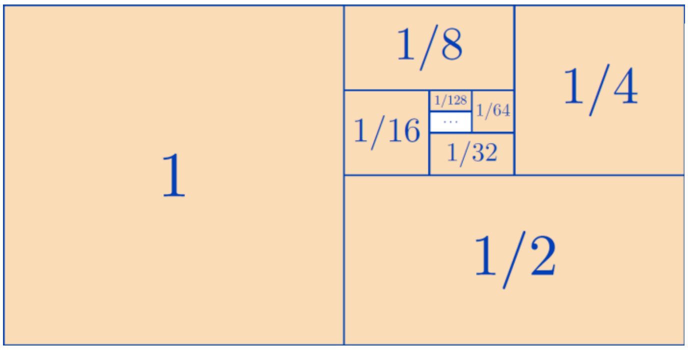
Et muligt svar begynder med nogle antagelser, lad os f.eks. sige, at forspringet er 1, Achilleus' fart er 1, og skildpaddens er $\frac{1}{2}$. Så bliver afstanden mellem de to, når Achilleus når skildpaddens foregående position, gengivet med en talrække

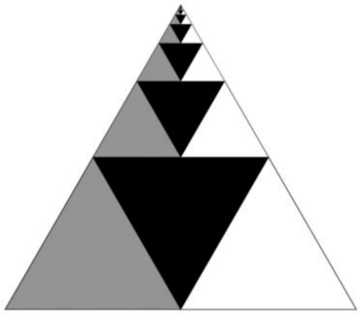
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Den totale afstand tilbagelagt af Achilleus og tiden, der er gået, til hvert af disse tidspunkter, gengives med en talrække

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots$$

Men hvordan skal man håndtere uendelige talrækker? Hvis man lægger et uendeligt antal tal sammen, vil resultatet så ikke blive uendeligt? Dette er kernen i paradokset! Svaret ligger i den geometriske række, som er det vigtigste læringsmål for denne opgave.





I en opgave der følger op på dette studerer eleverne billedet:

Uformel argumentation ud fra dette billede giver eleverne en måde, hvorpå de kan beregne den geometriske række, som løser dette paradoks.

Herefter følger en proces med vertikal matematisering, hvor eleverne bliver bedt om at finde et lignende resultat for billedet til højre og derefter formalisere og generalisere, hvad der repræsenteres visuelt i disse billeder.

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

At finde udtrykket $\frac{1}{1-x}$ er en stor udfordring.

Efter at de har brugt resultatet på andre interessante situationer, som $0{,}9999 \ldots = 1$ (et godt eksempel på matematisk kontekst), burde elevernes interesse i at finde beviser være blevet vakt. Til beviset bliver der brugt pseudo-formelle teknikker

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots - x - x^2 - x^3 + \cdots = 1.$$

Senere kan dette blive yderligere formaliseret med notation ved introduktion af grænser og $\sum$-notation.

Dette læringsscenarie viser eksempler på modellering og formalisering, der tager udgangspunkt i et kendt paradoks som en læringsrig kontekst og forståelige billeder. Bemærk rækkefølgen af aktiviteterne; eleven har mulighed for at komme til et mere formelt resultat gennem studiet af de konkrete kontekster.

Horisontal matematisering ud fra indholdsrige kontekster for at knytte forbindelse til virkeligheden

RME er meget optaget af matematikkens forbindelse til virkeligheden. Som Freudenthal (1991, s. 30) udtrykker det:

> "*Verden er fuld af støj; matematisering af verden betyder at søge det væsentlige og fornemme budskabet midt i støjen. Også dette er noget, der skal læres, det vil sige genopfindes af eleven, og jo tidligere, jo bedre; når eleven først er blevet indoktrineret med præfabrikerede systemer og algoritmer kan det være for sent.*"

Næstefter "matematik som en menneskelig aktivitet", er "forbindelsen til virkeligheden" et af RMEs hovedfokusområder. For at stimulere disse forbindelser, bør læringsaktiviteter have nok (ikke-matematisk) indholdsrig kontekst. Tidligere i dette kapitel diskuterede vi gode, indholdsrige kontekster. Lad os bygge lidt videre på dette med et par eksempler. Hvert eksempel skal selvfølgelig overholde de førnævnte kriterier for indhold.

a) Et sted. For eksempel et lagerrum eller en musikfestival.
b) En historie som i paradokset med Achilleus og skildpadden beskrevet ovenfor.
c) En menneskelig aktivitet. For eksempel at tegne et hus eller at flyve et fly.
d) En nyhed eller en historisk begivenhed. For eksempel statistikopgørelser i en avis.

Den følgende øvelse kommer fra *De Wageningse Methode* (Broek et al., n.d.). Den findes i et kapitel om matricer. En stor del af kapitlet tager udgangspunkt i den indholdsrige kontekst, som her er historien om et bilfirma. Det har et hovedkvarter og en afdeling. Firmaet sælger biler af typen A, B og C. Lagerbeholdningen af biler er repræsenteret vha. en matrix S .

$$\begin{array}{r} \\ Headquarters \\ Branch \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

I tidligere øvelser har eleverne adderet matricer for at regulere lagerbeholdningen. Nu bliver der introduceret en værdimatrix V (i tusind Euro).

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} sale & cost & profit \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 30 & 28 & 2 \\ 20 & 17 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Den samlede salgsværdi af bilerne i hovedkvarteret er

$$15 \cdot 12 + 13 \cdot 30 + 7 \cdot 20 = 710 \text{ (tusind Euro).}$$

a) Beregn den totale salgsværdi for bilerne i afdelingen.
b) Beregn den totale omkostningsværdi for bilerne i hovedkvarteret. Og i afdelingen.
c) Beregn værdien af det totale overskud for bilerne i hovedkvarteret. Og i afdelingen.
d) Brug totalerne, som du fandt i a), b) og c) til at udfylde en matrix med totaler T

$$\begin{array}{rc} & \begin{matrix} sale & cost & profit \end{matrix} \\ \begin{matrix} Headquarters \\ Branch \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Herefter følger en forklaring, som angiver, at det man faktisk har gjort, er en slags multiplikation for matricerne $S \cdot V = T$, og at T er defineret som produktmatricen. Fordelen ved denne fremgangsmåde er, at handlingerne, som har ført til matrixmultiplikation er kommet på en naturlig og meningsfuld måde; takket være en velvalgt kontekst.

Fremspirende modeller

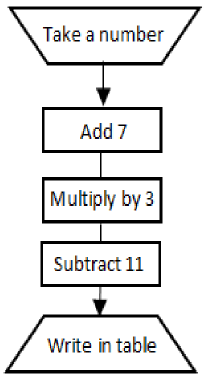
Så hvordan kommer en elev frem til den mere formelle matematikviden i RME? I arbejde af Streefland (1985), Treffers (1987) og senere Gravemeijer (1994) får *modeller* en særlig rolle, efterhånden som de spirer frem i elevens hoved. I deres arbejde er modeller mentale systemer af begreber og processer, som relaterer til en situation. Fra horisontal matematisering opstår der en model *af* en situation. Denne model repræsenterer elevens uformelle matematiske aktivitet i forhold til situationen. Den giver mening til situationen for eleven. Herfra kan der foregå en vertikal matematisering: opbyggelsen af et (mere abstrakt) matematisk objekt fra et begreb, eller en algoritme fra en proces. Den nye model er mere formel. Efter et eller flere af sådanne skridt er det ikke en model *af* en specifik situation, men en model *for* en kategori af situationer, som kan bruges til matematisk aktivitet uden reference til situationen, som den opstod i. Men, hvis der er brug for det, kan man give mening til modellen ved at gennemgå de mellemliggende modeller hele vejen tilbage til den oprindelige. Det er en af grundene til, at RME foretrækker at arbejde med modeller, der rækker ud over situationen, som de opstår i (se punkt (2) om indholdsrige øvelser).

Den gradvise fremkomst af en formel model kan strække sig over en lang undervisningsperiode. Lad os eksempelvis kigge på fremkomsten af begrebet *funktion* (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon og Reed, 2012). Vi forudsætter som udgangspunkt, at eleven er bekendt med begrebet variabler, herunder erstatningen af en værdi med en variabel. Øvelse for 12-årige (tilpasset fra De Wageningse Methode, jf. Broek et al., n.d.):

Se på skemaet til højre.
Lav tabellen med tallene 1, 2, 3, 4, 5 og 10.

Sam får et resultat på 10. Hvad var hans starttal?

Og med 343?



Denne uformelle aktivitet vil senere udvikle sig til brugen af formler til repræsentation af pileskemaet. Eleverne vil arbejde med sådanne beregningsskemaer og formler, og de vil gradvist danne en virkelighed for eleven.

På et tidspunkt bliver der tilføjet nye basale beregninger: sinus, cosinus og tangens, skrevet som $\sin(x)$ osv. Eleverne lærer ikke, hvordan beregningen er foretaget (generelt), men bare hvad dens geometriske betydning er. Dette er en vigtig ændring af synsvinkel. Det næste skridt er, at der nu dukker en ny notation op: $f(x)$, hvor f repræsenterer et beregningsskema. Nu bliver selve beregningsskemaet et objekt. Eleverne skal nu studere egenskaberne for objektet, som f.eks. definitionsmængden eller den afledte funktion. Men begrebet funktion er opstået som en transformation af modeller: en model *for* begrebet funktion, baseret på modeller af funktioner, og ikke baseret på en definition. En rigtig formel definition af funktion skal nås ad en helt anden vej: mængdeteori!

Guidet genopfindelse

Horisontal matematiseringsaktivitet åbner en situation eller en klasse af situationer for matematisk diskurs. Gennem vertikal matematisering bliver modeller af uformel matematisk aktivitet gradvist forvandlet til modeller, som repræsenterer formel matematisk viden. Man kan sige, at den formelle matematik på den måde *genopfindes* af eleven. Denne proces kan i mange tilfælde ikke være den samme som den originale opfindelse. Måden, hvorpå matematikeren kom til et resultat, kan have krævet motivation og viden, som eleven ikke er i besiddelse af. Udfordringen for RME-læreren er at facilitere en proces, som passer til eleven. Processen skal være *guidet*. Som skrevet i Freudenthal (1991) "*Opfindelser i denne forstand skal forstås som skridt i læringsprocesser, som kendetegnes ved præfikset "gen" i genopfindelse, mens læringsmiljøet i læringsprocessen er kendetegnet ved adjektivet "guidet"*". I tillæg til den tidligere diskussion kan man tilføje følgende argumenter for guidet genopfindelse (Freudenthal 1991):

1. Viden og evne, som er opnået ved ens egen aktivitet, sidder bedre fast og er mere umiddelbart tilgængelig, end hvis den er kommet fra andre.

2. Opdagelse kan være en fornøjelse, og derfor kan læring ved genopfindelse være motiverende.
3. Det fremmer oplevelsen af matematik som en menneskelig aktivitet.
4. Det sikrer, at den matematiske tilgang passer til elevens niveau.

Princippet om genopfindelse skal ses i perspektivet af det centrale krav i RME, som var udgangspunktet for denne diskussion: at matematikundervisning ikke bare handler om mængden af matematikviden, men også om at lære at matematisere. Derfor er genopfindelsesprocessen lige så værdifuld som resultatet.

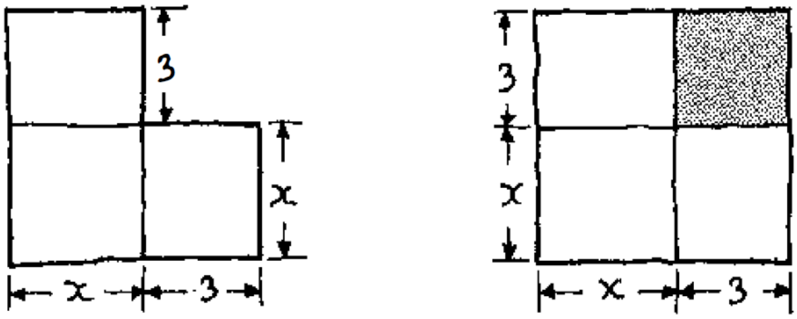
At guide til genopfindelse

Hvordan guider man eleverne til deres genopfindelser? "*At guide betyder at finde den hårfine balance mellem undervisningens kraft og læringens frihed*" (Freudenthal 1991). De guidede aktiviteter skal naturligvis give mulighed for horisontal og vertikal matematisering. Målet bør være, at eleverne selv producerer løsninger til definerede problemer og måske endda producerer nye problemer.

Lærerens instruktion skal give anledning til diskussioner eleverne imellem og mellem elever og lærer. Diskussioner mellem elever giver dem mulighed for at afprøve, fokusere og omformulere idéer, uden at læreren skubber dem i retning at et ønsket resultat. Ikke alle elever vil matematisere og opfinde med samme hastighed. Diskussioner hjælper eleverne med at afstemme deres idéer.

Hvis læreren er involveret i diskussionen, kan eleverne drage fordel af hans forsøg på at følge deres argumentation for at hjælpe dem med at se, hvad den kan føre til. Grunden til dette er, at elevernes egen tilgang er baseret på, hvad der er meningsfuldt for dem. Hvis læreren kan guide elevens metoder hen til en acceptabel løsning, så vil chancen for at eleven forstår løsningen forøges.

Denne øvelse, som er tilpasset fra De Wageningse Methode (Broek et al., n.d.), har til formål at genopfinde metoden til *at fuldende kvadratet*. På billedet til højre er L-formen sammensat til et kvadrat.



a) Skriv et udtryk i x for arealet af L-formen på det venstre billede.
b) Hvad er arealet af det grå kvadrat?
c) Hvad er sidelængden på det store kvadrat?
d) Forklar hvordan (a) og (b) fører til ligheden $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
e) Kontroller denne lighed ved at udvide parenteserne i det højre udtryk.
f) Tegn en L-form med arealet $x^2 + 10x$.
g) Hvilken lighed kan du udlede af denne L-form?

Denne øvelse gentages med forskellige tal (hvor brøker også bliver introduceret), men hvor det er op til eleven, om han vælger at tegne en L-form. Den vigtige observation er her, at genopfindelsen af algoritmen er op til eleven. Det er eleven, der skal foretage algoritmiseringen.

En elevs egen opfindelse (som f.eks. af et begreb, en algoritme, model eller en metode til at løse et problem) er måske ikke den mest effektive og smukke. Den kan være forskellig fra den, som læreren havde tænkt sig som læringsudbytte. Ved slutningen af genopfindelsesaktiviteten kan læreren prøve at formulere et fælles resultat i en klassediskussion. Læreren bør sørge for at forbinde resultatet med alle elevernes bidrag.

RME og IBMT

Hvad er fælles for RME og IMBT? Et centralt begreb i IBMT er *undersøgelse:* en proces som ligner den måde matematikere og videnskabsmænd arbejder på, når de står over for et nyt fænomen.

> *"Mange dagligdagsfænomener kan beskrives, undersøges og forstås ved hjælp af matematik i kombination med videnskab og sund fornuft, og er derfor en værdifuld kilde for IBMT[2]..."* (Artigue og Blomhøj, 2013)

RME og IBMT har nogle principper til fælles. Begge teorier beskriver, hvordan dagligdagssituationer er en værdifuld kilde til læring. De er fortalere for

[2] I dette hæfte bruger vi begrebet IBMT (Inquiry Based Mathematics Teaching), hvor Artigue og Blomhøj bruger begrebet Inquiry Based Mathematics Education, IBME.

vidensopbygning gennem metoder, som er inspireret af videnskaben og vidensopbygning: undersøgelse, opdagelse eller (gen)opfindelse. Både IBMT og RME beskriver disse processer som sociale: eleverne arbejder sammen om at genopdage og genopbygge viden. RME understreger, at genopfindelse er anderledes end opfindelse, da den viden, som er udgangspunktet for en specialiseret forsker og for en ny elev, er meget forskellige.
Ud over de traditionelle roller får læreren en ny rolle i RME og IBMT: han er facilitator af og en guide i undersøgelse og matematisering. Eleverne og deres idéer spiller en central rolle. Læreren hjælper med at formalisere elevernes uformelle fremgangsmåder som ovenfor nævnt.
RME og IBMT ser evnen til at undersøge og at matematisere som læringsmål i sig selv i tillæg til den faglige viden. Dette er et vigtigt skift væk fra tilgange, som kun fokuserer på faglig viden.

RME-struktur til IBMT-moduler

Indtil videre har vi diskuteret forskellige aspekter af RME med flere opgaveeksempler. Her til sidst vil vi skitsere, hvordan man kan binde opgaver sammen, så de bliver til en samlet læringsplan, f.eks. et modul.

1. En indledning: præsenter en kontekst med et relativt åbent problem (med mulighed for at eleverne kan få øje på det eller formulere det). Dette problem skal være det overordnede problem for hele modulet. Det vil blive bearbejdet på forskellige matematiske måder.
2. En fase med horisontal matematisering: et matematisk sprog introduceres for at kunne diskutere situationen. Eleverne danner en første uformel model af situationen.
3. En fase med vertikal matematisering: matematikken, som indgår i problemet, bliver videreudviklet. Modellen gøres mere abstrakt, mere generel.
4. Konklusion og refleksion: eleven reflekterer over hele processen, integrerer idéer, gør tilegnede metakognitive færdigheder eksplicitte, eleverne deler deres opdagelser, læreren guider og fremhæver det vigtigste læringsudbytte.

I hver af disse faser er der elementer af undersøgelse: opdagelsen og/eller formuleringen af problemet, dannelsen af en første uformel model, abstrahering og deling af opdagelser. Udfordringerne med at anvende disse idéer og andre principper for udarbejdelsen af IBMT-baserede moduler beskrives i andre publikationer om MERIA-projektet (se http://www.meria-project.eu/).

Bibliografi

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38. http://dx.doi.org/10.1080/01411920500401971 .

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08*, pp. 7-16. Kopenhagen, Denemarken.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. uit http://www.fibonacci-project.eu

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, pp. 797-810.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39, 365–382

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education*, chap. 8, pp. 249-272. Springer International Publishing.

Bass, J. E., Contant, T. L., & Carin, A. A. (2009). Teaching Science for Understanding: The 5-E Model of Instruction. *Teaching science as inquiry*, chap. 4, pp. 87-95. Allyn & Bacon/Pearson.

Blanchard, S., V. Freiman & N. Lirrete-Pitre (2010). Strategies used by elementary schoolchildren solving robotics-based complex tasks: Innovative potential of technology. *Procedia-Social and Behavioral Sciences 2*(2). 2851-2857. http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.427 .

Blomhøj, M. (2004), Mathematical modeling – a theory for practice. In B. Clarke, D. Clark, D. Lambdin, F. Lester, G Emanuelsson, B. Johansson, A. Walbym & K. Walby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics*, pp. 145-160. Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Blum, V. & Borremero Ferri, R. (2007). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, pp. 45-58.

Blum, W. / Leiß, D. (2006). „Filling up“ – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In: Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol

Bosch, M. & Winsløw, C. (2016) Linking problem solving and learning contents: the challenges of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35 (3), pp. 333-374.

Brousseau G. (1981a) Problemes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1) 37–127

Brousseau G. (1981b) *Le cas de Gaël*. Bordeaux: IREM de Bordeaux

Brousseau G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de le IIIe école d'été de didactiques des mathématiques* (pp. 99–108). Grenoble: IMAG.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970 – 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45(6), 811-822.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 39, 395–403.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 173-187. Springer International Publishing.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.

Doerr, H., & Ärlebäck, J. B. (2015, februari). Fostering students' independence in modelling activities. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Praag, Tsjechische Republiek. pp. 855-861.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0

Doorman, M., Jonker, V. & Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. University of Education Freiburg.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 837-849.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 1, pp. 87-101.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Furtak, E.M., Seidel, T., Iverson, H., & Briggs, D.C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching a meta-analysis. *Review of Educational Research 82*(3). 300-329. http://dx.doi.org/10.3102/0034654312457206.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.

Goddijn, A. (1979). De weerbarstigheid van klein en groot [The stubbornness of small and large]. *Wiskrant, 17*, 1-4.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., & Contreras, J.M. (2015) Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Praag, Tsjechische Republiek. pp. 2642-2648.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of 800+ Meta-analyses on Achievement*. Routledge, Abingdon. http://dx.doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8.

Hattie, J. & H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research 77*(1). 81-112. http://dx.doi.org/10.3102/003465430298487 .

Hiebert, J, Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., & Murray, H. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, (25), 4, pp. 12-21.

Hofstein, A. & Lunetta, V.N. (2004). The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century. *Science Education 88*(1). 28-54. http://dx.doi.org/10.1002/sce.10106 .

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. In *Proceedings of PME XI*, Montreal.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (19082008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272

Maaß, K. & Artigue, M. (2013) Implementation of iquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45 , pp. 779-795.

Maaß, K. & Doorman, L.M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45 (6), 887-89.

Maaß, K. (2013). PRIMAS report on the results of the internal evaluation. http://www.primas-project.eu/artikel/en/1247/Reports+and+deliverables/

Minner, D.D., Levy, A.J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching 47*(4). 474-496. http://dx.doi.org/10.1002/tea.20347.

Miyakawa,T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), pp. 199–218.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, Washington D.C.

http://www.k12.wa.us/CoreStandards/Mathematics/pubdocs/CCSSI_MathStandards.pdf

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T, Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T, Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M & Nissen, K. (2002). Competencies and mathematical learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Kopenhagen: Ministerie van Onderwijs. Uit http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ_MN_KOM_in_english.pdf.

OECD (2016a). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2016b). *PISA 2015 Results (Volume II): Policies and Practices for Successful Schools*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264267510-en .

OECD (2016c), *Ten Questions for Mathematics Teachers ... and how PISA can help answer them*. PISA, OECD Publishing, Parijs. http://dx.doi.org/10.1787/9789264265387-en .

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007) L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherché, Science, économie et société.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussel: Europese Commissie.

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S. & Köller, O. (2016). A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE. (Resources for

Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education, ASSISTME). Uit http://assistme.ku.dk/pdf-uploads/D2.5.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* pp. 334–370. New York: MacMillan Publishing Company.

Singer, F.M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics,* 83, 1, pp. 17.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as a source]. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant), 5*(1), 60-67.

Swan, M., Pead, D., Doorman, L.M. & Mooldijk, A.H. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry based learning. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* 45 (7), 945-957.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Van den Broek, L., Van den Hombergh, D., Van Smaalen, D., Van Haandel, M., Geurtz, T., & Reuling, H. (n.d.). *De Wageningse Methode*. In Nederlands. Uit https://www.wageningse-methode.nl

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* [Didactical elements – an introduction to the didactics of mathematics and science]. Kopenhagen: Biofolia.

Woolnough, B. E. (1991). Setting the scene. In: B. E. Woolnough (ed.). *Practical Science*. Open University Press, Milton Keynes, pp. 3-9.

Appendix. An outline of Key References: suggestions for further reading related to the MERIA project.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45,* (6), pp. 797-810.

The paper argues how IBE/IBME invites students to "work in ways similar to how mathematicians and scientists work". They start by presenting Dewey as a philosopher who strived to overcome the distinction between knowing and doing by viewing human behavior as reflective inquiry. They further list by whom Dewey was inspired. They list elements of inquiry practice which seems crucial: reflective inquiry mixes induction and deduction, process concerning daily life and scientific activity, hands-on activities and that IBE should develop the students' habits of mind in the direction of those underlying inquiry processes. The descriptions of inquiry from the PRIMAS and Fibonacci projects are described and how they relate to the idea of progressive development of "big ideas". The migration of IBE to mathematics education is argued as relating to Polya's "How to solve it" and more recent theories and approaches to the teaching of mathematics. Hereafter, a short presentation of these theories and approaches are given and how they relate to IBE. The approaches treated are: The problem solving tradition, the Theory of Didactical Situations, Realistic Mathematics Education, Modelling perspectives (from Mathematical Competence Theory), the Anthropological Theory of Didactics and the Dialogical and critical approaches. While summing up the authors argue that teachers need to have experience and to exercise inquiry in mathematics themselves in order to teach inquiry based and it is suggested to differ between "inquiry by teachers and inquiry in teaching" and the latter seem to require considerable collaboration among teachers for IBME to be realized in classrooms. As concluding remark the authors list ten concerns, which should be taken in to consideration when engaging in IBME and which are addressed with different weight on each concern when teaching is designed based on the existing approaches to mathematics teaching presented earlier in the paper.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education , *Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu

This part of the booklet from the Fibonacci project describes previous and present attempts to teach mathematics in an inquiry based manner. The Fibonacci project continues some of the ideas from the German SINUS, which defined features involved in inquiry processes in mathematics teaching. The first part of the booklet section points out what approaches to math education known from the literature capture IBME features. Inquiry in science often draws on already sensed experiences, which can be further studied in cyclic processes, which do not apply to the case of mathematics. Here the cumulative nature of the discipline is a challenge. Hence the design task is different if we want to ensure

that students reach a certain learning goal, which again links to already developed knowledge within the students and form the basis for more formal proving of the concrete ideas developed during the inquiry activity. In this context ICT or CAS-tools offers special opportunities and challenges when designing IBME activities – examples are provided of different ICT designs. In the first half it is briefly argued what elements: Modelling, RME, ATD, TDS and critical approaches and problem-solving can offer IBME. But also the obstacles one might encounter when implementing it in school systems is presented in this booklet section.
In the second part a more practical (teacher) perspective is given on the IBME. From a characterization of standard teaching it is pointed out, how teaching should be altered: what should the teacher do less and more of? What actions should the students engage in and how do teachers make them do that? It is argued how these actions support the students' development of problem-solving and metacognitive competences. Finally examples are given on IBME tasks with and without computers.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W., & Léna, P. (2012). Learning through inquiry, *Re-sources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/resources
More general on the ideas of the Fibonacci project not restricted to mathematics

Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39*, 365–382
The paper gives an overview of how problem solving can be regarded and approached from the point of view of TDS, ATD and "conceptual fields". A few examples are given, of how problem solving is articulated in curricula at different levels of mathematics. Most of the results presented relate to the change of focus with respect to problem solving in curricular reforms from 1945 to 2002. Changes in curricular reflect the changed role of primary education. It is described through examples how didactical research has influenced the curricular changes with respect to problem solving through design centers as IREM, which provide the support of in-service teachers to realize the intended changes. However, there are still problems when studying the realized curriculum in the classrooms, where teachers find definitions of a problem blurred and they have difficulties navigating in open processes and tend to put equal value to different answers of varying quality. It is suggested that stronger links between research and practice as well as teacher training will improve the realized curriculum.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
The book presents most of the Theory of Didactical Situations, which has been developed by Guy Brousseau, and further developed together with his research group. TDS is introduced through the example of "The race to 20". The analogy

between learning and winning a game becomes clear in the introduction and a first presentation of the phases of action, formulation and validation is given. Chapter 1 starts by a presentation of what *didactique* is in French research, concerning the objects and phenomena which are studied. Among the phenomena are some unintended effects of teaching: Topaze effect, Jourdain effect, metacognitive shifts and improper use of analogies. Further, the notions of didactical situation, adidactical situation and the didactical contract are presented. Examples are given on devolution of an adidactical situation and further paradoxes regarding the didactical contract are discussed. The paradoxes relates to students adjustment to situations and the learning potentials of doing that. In the last part emphasis is put on how the phases and situations can be modelled through the design of milieu, which leads to formulation of intended learning if the students adapt to the milieu of the situation.
Chapter 2 continues the design element by presenting the notion of epistemological obstacles, problem and what didactical engineering is from the point of view of TDS. The chapter relates to problem situations and Brousseau's study regarding the teaching of decimals. Further a distinction between what obstacles can be dealt with in classrooms and what obstacles are external to the classroom is given.
Chapter 3 provides an analysis of the possible outcomes of the teaching of decimals in French primary school from 1960s and 1970s based on previous curricular and approaches to teaching. This is continued in chapter 4, where conclusions on the mathematical, epistemological ad the didactical analysis are drawn. Based on these design examples other examples are presented and discussed: the pantograph and the scaling of drawings, the puzzle task moving from an additive to multiplicative domain, decimal numbers and the rational numbers. Next, the analysis of a situation is presented, which covers the design of a situation where the thickness of a piece of paper is determined and the analogy of the learning situation with a (didactical) game.
Chapter 5 elaborates on the notion of didactical contract both in relation to design issues and in relation to the effects on students learning. It relates to the phases of the didactical game with an emphasis on the knowledge to be taught in the designed situation.
The last chapter 6 addresses the relevance of TDS research to teacher practice including techniques for teachers and how research knowledge can become reality in the classroom practice.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 39*, 395–403.
The paper gives a historic overview of political decisions made throughout the last 100 years regarding teaching in mathematics. It is problematized that in recent years policy makers seem to act based on their own experiences with respect to what mathematics teaching is and should be rather than relying on research knowledge. Hence, inquiry approaches to the teaching of mathematics is not emphasizes or supported in the British school system.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer International Publishing.
This is a survey paper, introducing elements of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), another French theory of didactics. Ordinary classroom teaching presenting and explaining procedures or formulas is characterized as the paradigm of visiting works. The paper argues that mathematics teaching should head towards a new (counter)paradigm: Questioning the world. It is proposed that teaching should be based on open questions, which students answer by engaging in the study of existing resources and employing newly gained and existing knowledge to answer the open question. In this process students are supposed to derive new questions from the given one. The design tool for this kind of teaching is called Study and Research Paths (SRP) and is pointed out by other researchers (including papers in this list) to be a promising model for IBME.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. American *Educational Research Journal*, 29 (3), 573–604.
The authors are analyzing two examples of teaching place value numeration in US grade two and three. They introduce a number of notions from American mathematics education literature to analyze the two teaching situations. They identify the situations as school mathematics and inquiry mathematics respectively. They emphasise the different role played by instructions and the verification of students' answers. They mention the work and some notions of Brousseau's TDS, however they do not wish to analyse the two teaching situations using the notion of didactical situations. They conclude that "In addition, we contend that cognitive models which document students' construction of increasingly sophisticated mathematical objects are essential to analyses of their activity as they participate in the interactive constitution of an inquiry mathematics tradition." The paper show an attempt to conceptualise how inquiry like mathematics education can be analysed and compared to traditional approaches. Most of the findings can be related to the notion of didactical contract from TDS, but it is not done in the paper.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.
He discusses how educational systems are arranged in logical structures. However the logic is often the one produced by grownups and is the product of years of dealing with the knowledge to be taught. This might lead to challenges for child and its' learning since it might not fit with the child's experiences. On the contrary teaching should revolve around children's actions and it is concluded: "Action is response; it is adaptation, adjustment. There is no such

thing as sheer self-activity possible—because all activity takes place in a medium, in a situation, and with reference to its conditions".

Dewey,J. (1929). *The Sources of a science of education*
Chapter 1: Education as a science. He argues for the need of regarding education as a science, where we share knowledge in a scientific way. Some teachers have a talent for teaching, but if we do not study, what this talent is made of, we cannot share the practice or ideas on teaching. But there is a danger of knowledge gathered as regarding education as science, will be misused as quick fixes by persons in educational systems
Chapter 2: Borrowed techniques insufficient. It is argued that techniques cannot be borrowed from natural sciences. And at this time of history, it is unclear what and how to measure objects in the field of educational research.
Chapter 3: Laws vs. Rules.
Discusses how school systems and knowledge is arranged and why this might fail in teaching and learning for all and the free play of thought, where the latter might actually be central for learning.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.
The book discusses inquiry from different perspectives: common sense and scientific inquiry, the structure of inquiry and construction of knowledge, working hypotheses etc. The main emphasis is put on inquiry in science. A chapter is devoted to the mathematical discourse of inquiry, where it is concluded that: "The considerations here adduced have an obvious bearing upon the nature of test and verification (See ante, p. 157). They prove that in the practice of inquiry verification of an idea or theory is not a matter of finding an existence which answers to the demands of the idea or theory, but is a matter of the systematic ordering of a complex set of data by means of the idea or theory as an instrumentality." Hence it is the generality, which can be drawn from the concrete experiment or experience, which is interesting. Different notions and concepts from mathematics (e.g. isomorphic, a relation etc.) are discussed in the context of inquiry and in mathematics and to what extend they do mean the same.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(6).
The paper argues about the conditions and constraints which might favour, or on the contrary hinder, a large-scale implementation of inquiry-based mathematics and science education, on the basis of our work within the PRIMAS project in 12 European countries. The model of the educational system provided by the Chevallard's anthropological theory of didactics (ATD) as a systemic institutional perspective helped in structuring the analysis of conditions and constraints of the systems in these countries. It is a complement to the approach through the

analysis of teachers' beliefs and practices (Engeln et al. in ZDM Int J Math Educ 45(6) 2013). In the approach, teachers are actors of institutions, representing some disciplines, embedded in a school system, sharing some common pedagogical issues, are considered in relation to society. The analysis is organized according to four levels of institutional organization that co-determine both content and didactical aspects in the teaching of mathematics and sciences: society, school, pedagogy and disciplinary.

Drobnič Vidic, A. (2011). Impact of Problem-based Statistics Course in Engineering on Students' Problem Solving. *International Journal of Engineering Education* 27(4):885-896.

Abstract. In this comparative study, we examined the level of basic discipline knowledge and problem-solving abilities in problem-based learning (PBL), incorporated into a traditional curriculum in an introductory statistics course. Progressively less structured, less familiar and more open problems were presented to engineering students. Engineering problems triggered the learning of new statistical contents and activated small group problem solving. Students as a group determined the learning goals, individually searched for information, and together analysed the information collected. Such a problem-solving process with real-world problems is often seen as unstructured and time-consuming. An experiment was carried out to find out whether this approach yields adequate basic statistical knowledge and improves problem solving. Two randomised groups of students from the same engineering programme were compared: one group used PBL and the other followed the traditional method of instruction. The results of statistical analysis showed that engineering students with the PBL approach acquired sufficient basic statistical knowledge and were better able to solve statistical problems from the field of engineering than the students who followed the traditional way of instruction. Some characteristics of the implementation of the course are discussed, as well as some limitations of the study.

Drobnič Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (5), pp. 1161–1187.

Abstract: Mathematics-related beliefs play an important role in the willingness to engage in academic activities in mathematics education. Such beliefs might not be consistent with the beliefs students hold about context problems that require sufficient mathematical knowledge and the application of such knowledge to various real-life situations. This study was designed to examine differences between students' mathematics-related beliefs and beliefs about context problems. The variations in these beliefs could explain the different amounts of effort students put into solving context problems on one hand and in solving typical mathematical tasks on the other. The study included 261 first-year students: students in one group were enrolled in academically more demanding study programmes (n = 162), while students in the other group (n = 99) were enrolled in less demanding study programmes. The results revealed significant differences in beliefs between the two groups. A detailed analysis indicates the factors which need to be emphasised when designing problem-based mathematics education to promote the successful problem solving of context problems.

Drobnič Vidic, A. (2016). Using a Problem-Based Leaning Approach to Incorporate Safety Engineering into Fundamental Subjects. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*.142 (2).

Abstract. Safety is considered as an important area of engineering education, but it is often not addressed adequately in an engineering curriculum. Contents of safety engineering were incorporated in an introductory statistics course through problem-based learning (PBL) approach. Novices were learning statistical contents via PBL problems from the field of safety engineering. They were divided in two groups according to the partial assessment option they chose: the group with classical assessment and the group with assessment of an independent PBL engineering problem that was designed in accordance to the campaign coordinated by the European Agency for Safety and Health at Work. In the problem, students were analyzing the quality of installation of fire extinguishers in more than 200 buildings, as well as their maintenance. The aim of our study was to find out if the assessment of such a problem can be used to assess students' holistic statistical knowledge, if students can get new insights in the field of safety engineering, and if such assessment suits the ABET criteria. Students' questionnaire also gave us information on the students' perception of the difficulty of PBL approach in both assessment options.

Drobnič Vidic, A. (2017). Teachers' Beliefs about STEM Education Based on Realisation of the "Energy as a Value" Project in the Slovenian School System. *International journal of engineering education* (in press).

Abstract. The cross-curricular project Energy as a Value described in this study involved almost all subjects in the K-12 curriculum of the so-called technical gymnasium. It became the framework for an effective Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) education. Although the project offered interdisciplinary connection of all STEM subjects, promoted problem-based learning and pointed out to applications of subjects' contents to engineering profession it was not added up as a successful one. Teachers' satisfaction was questionable at the end of the four-year project time. Teachers were not initiators for a new project. The Engineering Education Beliefs and Expectations Instrument for STEM education is used in order to find the reasons for such an ambitious project not being carried out again. The instrument documents teachers' beliefs and expectations about pre-college engineering instruction, college preparation, and career success in engineering, and to compare teachers' views. It is applied to teachers of technical gymnasiums in Slovenia that teach STEM subjects in order to find out if there are differences between beliefs of teachers that carried out the Energy as a Value project and teachers from other technical gymnasiums, as well as differences between beliefs of mathematics / science teachers and technology-based / engineering teachers. The results of statistical analyses give answers about obstacles that teachers who carried out

the ambitious STEM education in a particular school system might be confronted with.
Keywords: STEM education; teachers' beliefs; K-12 curriculum; interdisciplinary engineering project; project-based learning.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". ***International Journal of Science and Mathematics Education*****, 7 (4), 765–790.**
This paper reports on a study with a large number of upper secondary students' engagement in problems regarding the concept of limit, where the students were supposed to change freely from the algebraic to the geometric domain and back again. To what extend students succeeded in the none-routine problems requiring a change of domain depended on the degree by which the students were bound by a traditional didactical contract.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. Educational Studies in Mathematics, 83, 1, pp. 87-101.
The paper starts arguing for the importance of being able to question the content, which you are supposed to learn and learn, to question existing knowledge requires creativity and imagination and is how advances are made in science. Therefor this should be promoted in the teaching. The paper sketches some designs created by pre-service lower secondary teachers have designed teaching activities engaging students in posing problems.

Engeln, K., Euler, M., & Maaß, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers beliefs and practices across 12 European countries. ***ZDM – The International Journal on Mathematics Education*****. Advance online publication.** http://link.springer.com/journal/11858
The paper presents some of the results of a questionnaire answered by the teachers engaged in the PRIMAS project. It shows that teacher in general have a positive attitude towards IBL, but also that they consider a lack of resources as a major obstacle to implementing IBL. Also national restrictions in the educational system are pointed out as challenging. By contrast, classroom management is not regarded as a major problem by the teachers.

Euler, M. (2011). ***PRIMAS survey report on inquiry-based learning and teaching in Europe***
The PRIMAS project showed that in most EU countries at least some teachers in mathematics and science have experience with Inquiry Based Learning (IBL), but there are differences in the interpretation of the notion, hence an IBL lesson can appear very different in one country compared to another. It is suggested that initiatives supporting the implementation of IBL is initiated around teachers, who have some experience already and an interest in pedagogical or didactical

issues. The project identified three main factors making the implementation of IBL problematic: classroom management, resources and restrictions from the educational system in specific countries.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.
The report lists a number of concrete initiatives for how to teach in-service teachers to use IBL, the theoretical approaches captures modeling, Lesson Study and to fit IBL with local requirements for in-service teacher training. The modules of the PRIMAS in-service teacher training covered the following topics: student-led inquiry, tackling unstructured problems, learning concepts through inquiry, asking questions that promote IBL, students working collaboratively, building on what students already know, self and peer assessment.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Prague, Czech Republic. pp.2642-2648.
The paper describes different theories that assume that learning mathematics should be based on constructivist methods where students inquire problem-situations and assign a facilitator role to the teacher (RME, TDS), and contrast them to the theories that advocate for a more central role to the teacher, involving explicit transmission of knowledge and students' active reception. The authors hold the view that mathematics learning optimization requires adopting an intermediate position between these two extremes models.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*, 6, pp. 777-796.
The authors give an account of the main contributions to mathematics education by Hans Freudenthal, who regarded mathematics as a human activity. He continued the idea of guided reinvention (also known from Dewey's work), which questioned the formation of curricula at the time. He wanted to promote the idea of putting processes rather than fixed pieces of content as a central element of what students should learn. As a result mathematics teaching should be based on modeling problems where students mathematize matter from reality, but with no clear intra- and extra mathematical reality. Later a difference between vertical and horizontal mathematization was introduced. Freudenthal criticized the role played by generic theories on pedagogy or learning theories in mathematical education research. Rather he proposed the approach of Realistic Mathematics Education (RME), which is a phenomenological approach to mathematics teaching.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43* (3), 399–411.

An example of how in-service teacher training can support teachers in the design or development of inquiry based teaching employing a dynamic geometry computer program (ICT based IBME). The teachers in this study are teaching at upper secondary level and the theoretical approach is the very recent theory of documentational genesis.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.*
This is a survey paper, which introduces the central constructs and notions from RME and Dutch didactics tradition, starting with contributions by Hans Freudenthal, towards more recent developments. Three primary school examples are provided in the text.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics, 59(13)*, 113–151.
The paper presents some of the challenges when teaching is designed to offer students a larger degree of initiative in the classroom and how that increases the uncertainty of the teacher. By employing the notions from TDS the authors analyse two case studies of teaching, where the authors have had no influence on teaching design or the conduct of the teaching. Based on this the authors discuss the challenges and possibilities for bringing constructivist approaches to teaching into the classroom.

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272. Springer publishing.
The text gives a short overview of how the research field of mathematics education started to evolve, and that this happened much later than the establishment of a practice. Short account of who took the initiative to form institutions (such as ERME, ICMI, IREM and others) where mathematicians and educational researcher could meet and discuss. The ideas of Felix Klein and the relation between research mathematicians' practice, and the teaching and learning of mathematics, are touched upon. Other more recent problems in the field are outlined, such as the actual and potential roles of technology in mathematics teaching. The text presents an overview of research in mathematics education, and therefore does not present specific research in any detail.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39
First an historic overview is provided with the initiation of commissions for the development of mathematics education, where Felix Klein was an important figure. He introduced a reform program based on an alliance between teachers, scientists and engineers. The idea was to change teacher education to change the teaching in the direction of promoting practical instructions and the

development of spatial intuition. It is discussed what mathematics is (which is not easily defined by mathematicians) and what education is. Different approaches are presented such as e.g. Nordic pedagogy tradition and the francophone tradition of didactic. It is argued that mathematics as a field of study as well as a practice revolves around teaching. It is through teaching it is promoted and constituted. This leads to the question (considered by others as well) what is and should be the relation between mathematics as a research field and as a discipline to be taught in different school settings.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In Holton, D. (ED.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 127-135). Springer Netherlands.

It is argued that engaging in a mathematics course is not equivalent with students becoming mathematicians, however it might require that they attempt to act like mathematicians and the class form a scientific community debating mathematics. Hence the paper proposes to orchestrate the teaching as a scientific debate. The debate can be initiated as "unplanned" debate based on a question raised by a student, a planned situation with the intention to introduce a new concept or overcome an epistemological obstacle, or the deepening of a concept or theory. Examples are provided of such initiators from first year of university mathematics teaching (including cross disciplinary examples), but several examples might be relevant for the secondary level as well.

For the scientific debate to function it is important that the teacher give enough time for the students to develop their arguments individually, that he/she writes all arguments on the blackboard without judging them and the teacher should strive to maximize the number of students who engage and involve themselves in discovering a rational solution to the problem or conjecture dealt with. The students responsibility is to believe in the conjecture he or she argues for, develop rational arguments for the conjecture and finally to formulate the arguments so convincingly that both fellow students and the teacher is persuaded. In this way the didactical contract of the teaching of mathematics is explicitly changed to one, where the responsibility of students as the one acting, formulating and validating mathematical answers has become explicit. The paper draws on notions from TDS.

Legrand, M. (n.d.) *Les deux ateliers proposés par Marc Legrand reposent sur: Le "Débat scientifique" en cours de mathématiques*. Retrieved from: http://kordonnier.fr/IMG/pdf/legrand.pdf

The text provides further arguments regarding the haw scientific debate changes the didactical contract in the teaching and how mathematical activity (of mathematicians) resonates with scientific debate. Further comments from students are provided. Some of those find it difficult to imagine Scientific debate being introduced in primary education, although they found the teaching enlightening and good. Many students find the debates time consuming in the sense, that they are concerned if a Scientific debate course will actually cover the curriculum.

Margolinas, C. & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 47*(6).
The paper discusses the notion of didactical engineering which has influenced and characterized contemporary research in mathematics education in France. In the paper, the following from an insider's and an outsider's perspective is addressed: (1) the way this notion is theoretically grounded, (2) the kinds of design research practices has it led to and is leading to, and (3) the way it relates to the design research paradigm. The paper compares the Dutch view on realistic mathematics education and the characteristics of the didactical engineering in France.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of iqiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education, 45,* pp. 779-795
Abstract: This synthesis is designed to provide insight into the most important issues involved in a large-scale implementation of inquiry-based learning (IBL). We will first turn to IBL itself by reflecting on (1) the definition of IBL and (2) examining the current state of the art of its implementation. Afterwards, we will move on to the implementation of IBL and look at its dissemination through resources, professional development, and the involvement of the context. Based on these theoretical reflections, we will develop a conceptual framework for the analysis of dissemination activities before briefly analyzing four exemplary projects. The aim of our analysis is to reflect on the various implementation strategies and raise awareness of the different ways of using and combining them. This synthesis will end with considerations about the framework and conclusions regarding needed future actions.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), 199–218.
The paper analyses and compares two didactical designs on proportional reasoning. The one design is the enlargement of a puzzle known from the literature on TDS. The other design is based on the Japanese tradition of Lesson Study and Open-ended Approach. Both approaches carry an element of inquiry and both share the idea of students learning from potential mistakes.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., & Threlfall, J. (2009). Open-Start Mathematics Problems: An Approach to Assessing Problem Solving. *Teaching Mathematics and its Applications, 28* (1), 21–31
The paper gives an introduction to problem solving and what defines an Open-start problem, which is characterized by having multiple starting points but only one answer. The paper suggests how these latter problems can be used for assessment purposes, and by changing assessment it is proposed that classroom activities as well will be more inquiry based.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.
The paper discusses the some fundamental questions for research in mathematics education: what challenges are the educational system facing, and why the teaching of mathematics should be of any interest of research mathematicians. It is formulated in the paper what is meant by a theory, what is mathematics education as a design research and what comes of this kind of research. Several findings are discussed such as perspectives on learning, known obstacles, the role of ICT and the conclusions points towards the need of students develop more heuristic competences through none-routine mathematical problems, which can be interpreted as more inquiry-based approaches.

Nohda, N. (1995). Teaching and Evaluating Using "Open-Ended Problems" in Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27 (2), 57–61.
Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (1), 39–53
An introduction to open-ended approach is given in the paper: based on an initial problem, students' hypotheses and first answers lead to formulate new questions for further inquiry. Examples of different problems are provided, and it is discussed how the teacher deals with the variety of students' answers. The teaching situations are sketched with an emphasis on the communication between the students and the teacher. At the end it is suggested that the link between open-ended approach and modeling should be studied further, and how this kind of teaching affect students' attitudes towards mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.
This book has been deemed seminal by other researchers in problem solving and IBME as the starting point of the inquiry based approach to teaching and learning of mathematics. Polya describes the processes involved in problem solving as the core activity of a mathematician. He emphasizes the creativity and attitude towards mathematics needed to engage in problem solving activities. He introduces the notion of heuristics in the process of solving problems.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.
An elaboration and extension of the ideas of Polya. A detailed introduction to what problem solving is, what resources the students are supposed to draw on and what attitudes towards mathematical problems are needed.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and*

Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics **(pp. 334–370). New York: MacMillan Publishing Company.**
The book chapter gives an introduction to problem solving mentioning Piaget and constructivism, the impact of teachers' epistemological, ontological and pedagogical view on mathematics. He discusses Polya's ideas on heuristics and its relation to metacognition. The paper contains general ideas on how to guide or assist student (university level) in developing problem solving skills and competences. However it is still (in 1992 at least) a challenge how to teach problem solving, since some kind of consensus seem to be reached regarding the definition of what it is.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Volume 45, Issue 6, pp 901–909.
An discussion of the challenges which implementation of IBMT could face in the United states, considering factors such as current curricula, the capacity of mathematics teachers, and public demands and beliefs concerning the nature and purpose of school mathematics.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1, pp. 1-7.
This is an overview paper introducing the current state of problem posing research in mathematics education. The paper starts by arguing how problem posing support students' development of heuristic competences and how this relates to pursuing ones' own questions. The paper is an introduction to a special issue of ESM and it provides and overview of the approaches to nurture students to pose questions with mathematical content, which can be found in the special issue.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking & Learning*, 10, 313–340.
The paper provides a literature review on classroom discussions, which leads to the presentation of the authors' model involving: anticipating, monitoring, selecting, sequencing, and connecting. It is concluded that: "Thus, the five practices do not provide an instant fix for mathematics instruction. Instead, they provide something much more important: a reliable process that teachers can depend on to gradually improve their classroom discussions over time".

Ulm, V. (2012). Inquiry-based mathematics education in primary school: Overview and examples from Bavaria/Germany. In P. Baptist & D. Raab (Eds.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School. Implementing Inquiry in Mathematics Education* (pp.65–81). Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/resources

Ordliste over begreber brugt i hæftet

Nogle af artiklerne i denne ordliste er baseret på formuleringer taget fra internettet, hvilket generelt er en god kilde for at opnå et førstehåndsindtryk af, hvad et begreb betyder. Begreberne er præsenteret her for at gøre det lettere for læseren og har ikke til hensigt at erstatte det nødvendige dybdegående studie af materialerne listet i bibliografien.

Filosofi om læring og viden

Epistemologi – i den smalle betydning, er en gren af filosofien der beskæftiger sig med teori om viden, videns natur, dens retfærdiggørelse samt rationalet i tro. I matematikundervisning beskæftiger de epistemologiske aspekter sig mere med strukturen i specifikke dele af matematikken og de forhindringer og problemer de giver eleverne, som en konsekvens af denne struktur.

Konstruktivisme – et filosofisk synspunkt angående måden mennesket lærer. Formaliseringen af konstruktivismen er generelt forbundet med Jean Piaget (1896-1980), som var en berømt schweizisk psykolog, som brugte dele af sin karriere på at udføre kliniske studier om, hvordan børn lærer grundlæggende matematik som et af flere områder. Han lavede en model over menneskelig viden som værende bygget op af mentale skemaer af forskellige typer, og han postulerede, at konstruktionen af disse skemaer (læring) vil finde sted gennem assimilation og akkomodation (i hans terminologi) af eksisterende skemaer til elevens erfaringer. Konstruktuvistisk undervisning er baseret i troen på, at læring opstår, når elever er aktivt involveret i en proces af mening og videnskonstruktion, som står i modsætning til passivt modtaget information. Elever er skabere af mening og viden.

Generel undervisning (jargon og vage termer)

Tilgang til undervisning – en række principper for undervisning og i en bredere betydning en måde at have læringsfremmende interaktion med elever. Det kan beskrives inden for etablerede teorier om matematikundervisning, eller mere uformelt ved at angive undervisningsprincipper baseret på forestillinger om matematisk videns væsen, og hvordan matematik læres.

Undervisningsmetoder – komprimerer principperne og metoderne brugt som instruktion til at blive implementeret af lærerne for at opnå den ønskede læring hos eleverne. Disse metoder er delvist bestemt af det konkrete emne/begreb, som skal læres (f.eks. kvadratiske funktioner), og delvist ud fra hvad der antages eller vides om eleven (f.eks. fortroligheden med kvadratrødder, interessen i emnet, evnen til at koncentrere sig og arbejde selvstændigt, osv.). Undervisningsmetoder inkluderer forelæsninger, vejledning, orkestreret elevarbejde (med klasserumsdiskussioner, projekter i grupper, pararbejde osv.).

Læringsudbytte – forventninger om elevens viden og kunnen opnået efter læring. Sådanne forventninger er ofte temmelig implicitte. Vi regner med, at lærere kun bruger læringsudbytte, hvis de er eksplicitte omkring det f.eks. i forbindelse med forberedelsen, i klasselokalet samt ved evalueringen af eleverne.

Traditionel undervisning – en term (og ikke en tilgang til undervisningen), som refererer til skikke etableret over lang tid, og som i mange år er blevet brugt i skolerne uden eksplicit at udtrykke dem. Nogle former for uddannelsesreformer fremmer vedtagelsen af alternativ undervisningspraksis som f.eks. at fremme et voksende fokus på elevernes individuelle behov og selvkontrol. Mange fortalere for reformer påstår, at de vil det modsatte af lærercentreret undervisningsmetoder, der fokuserer på udenadslære. Termen traditionel undervisning bruges ofte upræcist.

Passiv læring – en undervisningsmetode eller instruktion, hvor elever modtager information fra en instruktor, og inkorporerer det ofte gennem en form for udenadslære og ofte uden feedback fra instruktoren til eleven.

Rote læring – på dansk *udenadslære*, er en læringsteknik baseret på repetition. Ideen er, at jo mere man gentager metoder eller fakta, desto hurtigere vil man kunne genkalde sig dem. Udenadslære er ofte fremlagt som utilstrækkelig og sat over for alternative metoder med attraktive navne som meningsfuld læring, associativ læring og aktiv læring.

Aktiv læring – læring som tager udgangspunkt i elevernes egne handlinger og initiativer, som inkluderer deltagelse i organisering og evaluering af egen læring.

Elevcentreret læring (Elevcentreret undervisning) – hvilket man formodes at opnå ved undervisningsmetoder som skifter fokus på instruktionen fra læreren til eleven. Ideen er at udvikle elevernes selvstændighed og uafhængighed ved at overlade mere ansvar for vejen til læring hos eleven.

Undersøgelsesbaseret læring – en form for aktiv læring, som opstår ved at besvare eller stille spørgsmål, problemstillinger eller scenarier – hellere end ved bare at erhverve sig etableret fakta eller at følge en velbevandret vej til viden. Processen er ofte guidet af en facilitator. De undersøgende vil identificere og udforske problemer og spørgsmål for at udvikle viden eller løsninger. Undersøgelsesbaseret læring inkluderer problemorienteret læring og er generelt brugt i mindre målestok i undersøgelser og projekter såvel som inden for forskning.

Opdagelseslæring – en teknik fra undersøgelsesbaseret læring, som nogle gange er præsenteret som en konstruktivistisk tilgang til undervisning. Opdagelseslæring finder sted i problemløsende situationer, hvor eleven trækker på sine erfaringer og sin primære viden. Det er en metode til instruktion gennem hvilken eleven interagerer med omgivelserne ved at udforske og manipulere objekter, tviste spørgsmål og uoverensstemmelser eller udføre eksperimenter.

Stilladsering (instrueret stilladsering) – støtte givet gennem læringsprocessen, som er skræddersyet til elevens behov med intentionen om at hjælpe eleven med at opnå sine læringsmål. Stilladsering kombinerer adgang til støtte (ressourcer, delopgaver og retningslinjer), rådgivning og vejledning. Som når man konstruerer bygninger, så fjernes stilladset gradvist i takt med elevernes udvikling af selvstændige læringsstrategier.

Heuristisk– enhver tilgang til problemløsning, læring eller opdagelse, som på basis af intuition udvikler ideer eller metoder, der måske ikke er optimale eller perfekte, men som er tilstrækkelige til at opnå nogle umiddelbare mål.

Indsigt – forståelse af årsag og virkning inden for en specifik kontekst, eller en pludselig opdagelse af en korrekt løsning ved at følge ukorrekte forsøg baseret på trial-and-error. Løsninger forbundet med indsigt er formodentlig mere solide end ikke-indsigt løsninger.

Aha!-oplevelser (Eureka effekt) – refererer til den almenmenneskelige erfaring af pludseligt at forstå et tidligere uforståeligt problem eller begreb. I nogle tilfælde er intuition og hukommelse involveret i sådanne oplevelser, som dog generelt er noget uforklarligt.

Forståelse – en relation mellem den vidende og objektet, der skal forstås. Generelt er forståelse en praktisk men vag term; for en lærer vil ”at forstå funktionsanalyse” være en hurtig måde at karakterisere en tilfredsstillende præstation ud fra eksplicitte kriterier. Generelt er en præcision om "forståelse" et vigtigt mål for teoretiske rammer for uddannelse og læring.

Problemløsning - At nå et mål i en situation, når den rigtige vej at gå eller løsningen ikke automatisk er genkendt af den studerende. Nogle spørgsmål kan være et problem for en elev (der ikke kender nogen øjeblikkelig løsningsmetode) men ikke for en anden (der kender sådan en metode). Med andre ord, problemløsning kan forekomme under visse forhold relateret til den studerende.

Problembaseret læring (PBL) - en elevcentreret pædagogik, hvor elever lærer om et emne gennem oplevelsen af problemløsning.

Teorien om didaktiske situationer (TDS)

Institutionel viden (undertiden kaldt offentlig, fælles eller officiel viden) - viden fremlagt i lærebøger, tidsskrifter og ressourcer, som repræsenterer en syntese eller resultatet af forskellige matematiske aktiviteter. Det er let at observere, idet det er eksplicit. Nogle sprog har et bestemt begreb for institutionel viden – eksempelvis på fransk hedder det *savoir*.

Personlig viden (nogle gange kaldet individuel viden) – viden, som elever konstruerer, mens de interagerer med et matematisk problem (miljø). Ofte er det vanskeligt at udlede af observationer især i tilfælde af individuelt arbejde, da det her ikke nødvendigvis kommer til udtryk. Nogle sprog har et bestemt udtryk for personlig viden - på fransk hedder det for eksempel *connaissances*.

Didaktisk situation - en undervisnings- og læringssituation, hvor læreren eksplicit er moderator.

Didaktisk milieu - det miljø, som studenten interagerer med for at opnå ny viden. Det består af problemstillingen, genstande som f.eks. pen og papir, lineal, lommeregner, CAS-værktøjer (Computer Algebra Systems) eller et puslespil; i didaktiske situationer indebærer det også input fra læreren og andre elever. Læring er modelleret som tilpasning af elever, af deres personlige viden til et didaktisk miljø.

Adidaktisk situation - interaktion mellem eleverne og miljøet (inkl. en matematisk problemstilling) uden lærerens indblanding.

Tilsigtet viden - et matematisk udsagn, en metode eller et begreb, som læreren sætter som et læringsmål for sine elever i en didaktisk situation (En didaktisk situation er altid en situation *for* noget - nemlig en tilsigtet viden, kendt af læreren, men i første omgang ikke af eleverne.).

Devolutionsfase – en fase, hvor læreren overleverer miljøet til eleverne. Devolution refererer til en overførsel af ansvar til eleverne for at løse problemstillingen, eller i det mindste forsøger at gøre det. Nogle gange er flere devolutionsfaser nødvendige for at opnå den tilsigtede viden. Dette bør dog gøres lærerstyret for at undgå trivialisering eller unødig fragmentering af problemet, da det kan føre til en reduktion af den tilsigtede viden (se også didaktisk kontrakt).

Aktionsfase – en fase, hvor eleverne selvstændigt beskæftiger sig med en problemstilling.

Formuleringsfase – en fase, hvor eleverne formulerer konkrete resultater fra aktionsfasen (første ideer, hypoteser eller strategier til løsning af problemstillingen, mere eller mindre generelle løsninger).

Valideringsfase - fase, hvor eleverne tester deres strategier eller hypoteser mod miljøet med henblik på at fastslå gyldigheden af deres metoder og løsninger.

Institutionaliseringsfase – denne fase er, hvor læreren direkte fremlægger den institutionelle viden. I nogle former for undervisning, som f.eks. foredrag, opstår det helt naturligt. I andre former, som de designs, der er udviklet inden for TDS, er det tæt knyttet til de forudgående faser, således at den personlige viden opnået af eleverne blot er omformuleret i denne fase og eksplicit anerkendt som i overensstemmelse med officiel viden og er garanteret af (skolen) institutionen.

Didaktisk kontrakt – et sæt af gensidige forventninger mellem lærere og elever om deres respektive ansvar i en konkret didaktisk situation (eller en del heraf). Kontrakten er normalt implicit, og vi kan kun observere dens virkninger i lærernes og elevernes handlinger. Nogle af disse virkninger er ret generelle og hyppige i matematikundervisning, f.eks. elevernes insisteren på, at lærerne skal give svar, de ikke selv finder øjeblikkeligt, eller lærernes tendens til at overholde denne insistering på mere eller mindre skjulte måder, for eksempel ved at give "hints" eller ved at reducere den oprindelige opgave. TDS sætter navn på og studerer nogle af de mest almindelige virkninger, og det er af stor interesse for både lærere og forskere at blive bekendt med denne klassifikation. Interesserede læsere henvises til Brousseau (1997), kapitel 1 og 5.

Didaktisk ingeniørarbejde er en forskningsmetode baseret på kontrolleret design og afprøvning af undervisningssituationer, hvor præcise hypoteser valideres internt gennem sammenligning af såkaldte a priori og a posteriori analyser af de afprøvede situationer. Ud over denne oprindelige betydning af begrebet bruges udtrykket didaktisk design også til at betegne udviklingsaktiviteter, som producerer ressourcer og designs til undervisning baseret på forskningsresultater. (Kilde: Encyclopedia of Mathematics Education).

Realistisk matematikundervisning (RME)

Realistiske situationer - henviser til en situation, der er "rigtig" for eleven i den forstand, at det vedrører objekter, forestillinger mv., der er kendt for eleven. Situationen giver mening for eleverne og får dem til at føle sig velkomne til at begynde at tænke, fordi det vedrører deres forudgående viden. Det kan være relateret til det virkelige (hverdags)liv, men det er ikke nødvendigt.

Indholdsrig (struktur eller kontekst) - giver mulighed for forskellige tilgange eller løsninger, koblet til forskellige aspekter af elevens viden og nyttige ud over den situation, hvor den indføres.

Matematisering - hele den organisatoriske aktivitet for en matematiker, der involverer at skabe aksiomatiske systemer, at formalisere, at danne meningsfulde netværk af begreber og processer, konstruktion af algoritmer, repræsentationer og forenklinger osv.

Antididaktisk inversion - tager slutpunktet af matematikerens arbejde som et udgangspunkt for undervisning i matematik.

Emergent modellering - skabelse af en mental ordning af begreber og processer i en elevs sind relateret til en problemstilling. Modeller af uformelle matematiske aktiviteter udvikler sig til modeller for matematisk ræsonnement.

Guidet genopfindelse - processen, hvor eleverne rekonstruerer og udvikler et matematisk koncept i en problemstilling med støtte (vejledning) fra bøger, jævnaldrende eller en lærer.

Horisontal matematisering - overgang eller modellering af et virkeligt problem ind i en matematisk diskurs.

Vertikal matematisering - udvikling af en generel metode eller teori til løsning af et matematisk problem.

Didaktisk fænomenologi - kunsten at finde fænomener, sammenhænge eller problemstillinger, der kalder på at blive organiseret ved hjælp af matematik og inviterer eleverne til at udvikle målrettede matematiske begreber.