Mathematics Education -
Relevant, Interesting and Applicable

PRAKTIČNI MERIA VODIČ ZA ISTRAŽIVAČKI USMJERENU NASTAVU MATEMATIKE

(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)

PRAKTIČNI MERIA VODIČ ZA ISTRAŽIVAČKI USMJERENU NASTAVU MATEMATIKE

GLAVNI UREDNIK
Carl Winsløw

TEKST NAPISALI
Britta Jessen (Poglavlja 1 i 3), Michiel Doorman (Poglavlje 2), Rogier Bos (Poglavlje 4)

RECENZIJE, UREĐIVANJE I LEKTURA
Matija Bašić, Rogier Bos, Kristijan Cafuta, Gregor Dolinar, Michiel Doorman, Paul Drijvers, Željka Milin Šipuš, Selena Praprotnik, Sonja Rajh, Mateja Sirnik, Mojca Suban, Eva Špalj, Carl Winsløw

DIZAJN I VIZUALNO OBLIKOVANJE
Irina Rinkovec

SLIKE
Rogier Bos, Matija Bašić, Ivan Kokan, Eva Špalj

Projekt MERIA, kolovoz 2017.
www.meria-project.eu

(ova je stranica namjerno ostavljena prazna)

Sadržaj

Uvod

Ova brošura čini teoretsku osnovu projekta MERIA te je posebice namijenjena kako bi podržala osmišljavanje scenarija i modula u okviru projekta, kao i analizu i procjenu učinka koji oni imaju.

Cilj projekta MERIA jest da se potiče uporaba relevantnih, zanimljivih i primjenjivih matematičkih aktivnosti u srednjoškolskim učionicama. Glavna hipoteza projekta jest da takve aktivnosti potiču učenike da se ozbiljnije bave matematikom nego li je to slučaj s rješavanjem zadataka uz unaprijed određene metode. Zapravo se čini da je „paradigma zadatka" u mnogim svakodnevnim situacijama nastave matematike (uključujući nastavu u srednjim školama pa čak i sveučilištima) glavni uzrok koji utječe na to da učenici često matematiku doživljavaju kao nezanimljivu (zamorna rutina), nevažnu (barem njima) i beskorisnu (osim da se prođe ispit). Ovaj projekt razvija i predlaže alternativni pristup koji se može opisati kao *istraživački usmjerena nastava matematike*, a njime se zadaci zamjenjuju različitim vrstama „istraživačkih aktivnosti". Stoga se naše glavne zadaće odnose na osmišljavanje takvih aktivnosti, njihovo testiranje u praksi i širenje među nastavnicima.

Projekt se nastoji temeljiti na ozbiljnom i vizionarskom istraživanju načina realiziranja gore navedenih zadaća. Zbog toga u ovoj publikaciji dajemo pregled ključnih pristupa i ideja iz istraživačke literature. Publikacija je podijeljena na četiri poglavlja:

- U prvom se poglavlju daje opći pregled pojma „istraživanje" u nastavi matematike kako iz povijesne perspektive, tako i u pogledu načina na koji se može trenutno definirati (općenito i kao relativno širok pojam).
- U drugom se poglavlju daju općenite strategije za primjenu istraživanja kao učeničke aktivnosti u učionicama.
- U trećem i četvrtom poglavlju daju se dva preciznija i provjerena istraživačka programa za osmišljavanje istraživački usmjerene nastave matematike:
    - Teorija didaktičkih situacija u matematici, koja nastoji učenike staviti u „situacije koje nalikuju istraživanju" (poput matematičara), a koje se sastoje od *djelovanja, formuliranja hipoteze* te *potvrđivanja/dokazivanja*.
    - Realistično matematičko obrazovanje u kojem se matematički pojmovi izgrađuju na temelju rada učenika na problemima u kontekstima koji su za njih „stvarni" kroz „matematizaciju" tih konteksta.

Kroz cijeli se tekst daju reference na literaturu za one koji pojedine teme žele proučiti podrobnije nego što je to bilo moguće u ovom izdanju. U dodatku se daje pregled nekih od najvažnijih referentnih djela kada je riječ o ovom projektu. Na kraju priručnika se također nalazi pojmovnik s najvažnijim posebnim pojmovima koji se koriste u tekstu.

1. Što je istraživački usmjerena nastava matematike?

Istraživanje se ugrubo može definirati kao „istraživanje problema“. Ovdje riječ „istraživati“ ukazuje na to da je pokušaj rješavanja problema relativno samostalan: njime ne upravljaju drugi i ne slijedi se unaprijed određenu rutinsku metodu. *Istraživački usmjerena nastava matematike* (IUNM) se stoga odnosi na pristup nastavi matematike koji učenicima omogućuje da sudjeluju u aktivnosti koja ih navodi da prilagode svoje postojeće ili da steknu novo matematičko znanje. Takva bi nastava trebala učenike poticati da razumiju značenje i temelje sekundarne matematike. Posebice je uspješna ako proistekne iz vlastitih aktivnosti i truda učenika.

U ovom će se poglavlju dati pregled nastanka i detaljne pretpostavke IUNM-a. Proučavanje nastave matematike iznjedrilo je različite i provjerene konceptualizacije gore navedene temeljne ideje, odnosno metode za nastavu matematike prema kojima učenici postavljaju pitanja, istražuju, teoretiziraju i obrazlažu matematičke ideje. Međutim, opći pojam istraživački usmjerene nastave matematike pojavio se relativno nedavno.

Kako bismo razlikovali IUNM i ostale načine nastave matematike, posebice moramo razjasniti na što se misli pod „problemom“, kako se razlikuje od zadatka ili vježbe te zašto rješavanje problema nije isto što i rješavanje (rutinskih) zadataka. Isto tako ćemo raspraviti učeničko propitivanje problema te njihovoznanje o sadržaju. Istraživanja daju naslutiti kako je ključno da se učenici sami uhvate u koštac s rješavanjem problema ili situacije budući da ih to može potaknuti da formuliraju hipotezu, istražuju i eksperimentiraju sa svojim znanjem te da na temelju svojih postupaka formuliraju rješenja.

Prije nego što krenemo objašnjavati ove komponente IUNM-a, ukratko ćemo prikazati kako i zašto je IUNM u posljednje vrijeme postao glavni pristup razvoju nastave matematike. Daleko od toga da je MERIA prva europska inicijativa kojom se promiče IUNM. Europska je unija tijekom posljednjih desetak godina financirala nekoliko velikih projekata s ciljem razvoja, provedbe i procjene „istraživački usmjerene nastave prirodnih predmeta“ na različitim razinama obrazovnih sustava (Artigue i Baptist, 2012.; Mass i Artigue, 2013.; Ropohl, Rönnebeck, Bernholt i Köller, 2016.). Većina je ovih projekata obuhvaćala matematiku i prirodne predmete. Pojam istraživački usmjerenog učenja zapravo je u nastavi prirodnih predmeta logičniji i zastupljeniji nego u nastavi matematike. U poučavanju matematike razvili su se manje-više slične ideje i pristupi pod nazivima rješavanja problema, matematičkog eksperimentiranja ili matematičkog modeliranja itd. Međutim, kada je riječ o poučavanju prirodnih predmeta i matematike, postoje različiti pristupi tome na koji način razviti takvu vrstu nastave. U ovom se priručniku podrobnije obrađuju dva pristupa u poučavanju matematike (Poglavlja 3 i 4). Prema projektu Fibonacci, istraživanje u nastavi prirodnih predmeta često se oslanja na osjetilnom iskustvu (Artigue i ostali, 2012., str. 9). Mnogi pojmovi iz prirodnih predmeta kao što su brzina, vrijeme, svjetlost, sila, ph-vrijednost, mijene godišnjih doba itd. odnose se na osjetilna iskustva. Takva se iskustva dodatno mogu proučavati u cikličnim procesima kao što je, primjerice, tzv. model 5E. Model 5E odnosi se na faze istraživački usmjerene nastave prirodnih predmeta tijekom kojih bi se učenici trebali uključiti, istražiti, objasniti, razraditi i procijeniti (engl. **e**ngage in, **e**xplore, to **e**xplain, **e**laborate and **e**valuate) znanje ili ideje koji će se razviti tijekom istraživačkog procesa (Bass, Contant i Carin, 2009., str. 91). Osjetilna iskustva sile ili vremena, ekosustava te kemijskih reakcija iz svakodnevnog života mogu u modelu 5E poslužiti kao početak ili polazišna točka koji učenike uključuju u sustavnije istraživanje pojava ili uzročnih veza. Takvi istraživački procesi mogu učenike navesti da steknu znanje zakona u prirodnim znanostima.

S druge strane, može se reći da se matematičko znanje često temelji na osnovi koja je više teoretska. Naravno, u mnogim se slučajevima, poput brojčanih obrazaca ili konkretnog primjera općenitijeg načela, može primijeniti induktivno zaključivanje na temelju „eksperimenata“. Artigue i Baptist (2012.) smatraju da kumulativna narav matematike predstavlja izazov kada je riječ o tome da se pojam istraživanja izravno preuzme iz prirodnih znanosti (Artigue & Baptist, 2012.). U prirodnim se znanostima hipoteza (istraživača ili učenika) potvrđuje eksperimentom, dok je u matematici za krajnje potvrđivanje potreban dokaz koji se temelji na deduktivnom zaključivanju.

U ovom priručniku predstavit ćemo dva različita pristupa istraživački usmjerenoj nastavi matematike (IUNM). Jedna od njih pruža primjere na koji način iskustva učenika mogu poslužiti kao polazišna točka za proces istraživanja. On se naziva realistično matematičko obrazovanje (RMO) te ga je prvotno razvio Hans Freudenthal (Freudenthal, 1991.). Drugi pristup je teorija didaktičkih situacija (TDS) te ga je prvotno razvio Guy Brousseau (Brousseau, 1997.). TDS se temelji na ideji da učenici stječu novo znanje kada rješavaju problem dok se prilagođavaju onome što se naziva didaktičko okruženje. U poglavljima 3 i 4 bavit ćemo se podrobnije RMO-om i TDS-om. U ovom ćemo poglavlju dati pregled osnovnih pojmova IUNM-a, rastumačiti njezino podrijetlo (*zašto* ju je važno primjenjivati) te ograničenja (koji su mogući izazovi).

Počeci IUNM-a

Prije više od jednoga stoljeća u pisanom su se obliku pojavile prve formulacije ideje da poučavanje općenito treba biti povezano s iskustvom učenika te da se treba usmjeriti na aktivnosti učenika. Istraživač obrazovanja John Dewey često s povezuje s izrazom „učiti radeći“. On je smatrao da se nastava treba usmjeriti na aktivnosti učenika i načine na koje učenici iz njih stječu znanje (Dewey, 1902.). Dewey (1938.) je isticao potencijalnu važnost istraživanja i njegovu ulogu u učenju i nastavi, a posebice što se tiče prirodnih znanosti. Matematiku je u velikoj mjeri doživljavao kao alat ili jezik za organizaciju složenih informacija ili provođenje sustavnog upravljanja ishodima procesa istraživanja, npr. ishodima aktivnosti učenika kada provode eksperimente koji se odnose na zakone fizike ili biološke sustave. Iako Dewey nije dao izričite prijedloge kako osmisliti istraživački usmjerenu nastavu matematike, nekoliko znanstvenika u matematičkom obrazovanju kasnije je nastavilo razvijati njegove ideje.

Dewey se protivio ustaljenoj tradiciji *prijenosa znanja* od nastavnika učenicima, a koja je stara koliko i sama disciplina. Mnogim je matematičarima poučavati značilo ponavljati i siliti učenike da recitiraju neki tekst ili da oponašaju ono što radi nastavnik dok rješava matematički zadatak. To se također odnosi na praktičnije i osnovne elemente matematike koji se odnose na tehnike računanja. Nastava matematike se čak i danas uvelike temelji na ponavljaju pokazanih tehnika i njihovom usavršavanju kroz beskrajno prorađivanje sličnih zadataka. U mnogim se školama uobičajeni „obrazac" nastave matematike sastoji od toga da nastavnik predstavi neku tehniku (npr. formulu, pravilo, metodu itd.) nakon čega učenicima daje nekoliko „tipičnih" primjera kako primijeniti novo znanje u rješavanju određene vrste matematičkih zadataka te naposljetku učenicima daje nekolicinu vrlo sličnih zadataka kako bi oni mogli vježbati ono što je radio nastavnik (Schoenfeld, 1988.). Kao primjer može poslužiti kada se učenicima pruži definicija polinoma drugog stupnja te kako odrediti njegove korijene iz jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Učenicima se zatim daje formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Zatim nastavnik učenicima pokazuje kako odrediti korijene polinoma poput $2x^2 + 2x - 12$ tako da upotrijebe formulu. Može se dati još primjera prije nego što se od učenika zatraži da riješe seriju sličnih vježbi. Učenici na taj način oponašaju radnje nastavnika te mogu zanemariti značaj određivanja korijena i razloge ove metode. S druge strane, ako se od učenika zatraži da riješe jednadžbu s jednim realnim ili bez realnih rješenja to ima potencijal da učenici istraže značenje pojmova nultočke (korijena) polinoma i rješenja jednadžbe.

Rutinsko vježbanje od učenika zahtijeva da samo oponašaju nastavnika, što oni često rade, a da pritom ne vide ili ne razumiju bilo kakvu logiku ili značenje pojmova i postupaka koje koriste tijekom rješavanja (Schoenfeld, 1988.). Učenici doista mogu s vremenom matematiku početi doživljavati kao besmisleni skup tehnika koje se moraju usvojiti imitativnim vježbanjem. Ovakva vrsta nastave učenicima uskraćuje iskustvo mnogih važnih elemenata matematike kao što su: rješavanje složenih problema, stvaranje koherentnih struktura znanja, pretpostavljanje i dokazivanje, eksperimentiranje s posebnim slučajevima itd.

Moglo bi se reći da je tijekom prošlog stoljeća mnogim bivšim učenicima srednjih škola bilo dovoljno prenijeti znanje i naučiti učenike kako rješavati standardizirane zadatke. Međutim, u mnogim zemljama danas u više srednje obrazovanje dolaze veće i raznolikije učeničke skupine. Razrađeniji pristupi koji se temelje na istraživanju matematičkog obrazovanja potrebni su kako bi ih se poučavalo. Istraživačko područje matematičkog obrazovanja razvilo se tijekom stoljeća, a započelo je s nastavnicima koji su dijelili razmišljanja o nastavi i razvili nastavne tehnike koje se temelje na njihovim vlastitim iskustvima (Kilpatrick, 2014.). Kako bi se ispunile društvene potrebe, učenici danas moraju matematiku učiti na dubljoj razini razumijevanja nego što je to ranije bio slučaj. Prije je bilo uobičajeno da ljudi prestaju sa školovanjem prije višeg srednjeg obrazovanja kako bi postali aktivni na tržištu rada. To je od njih zahtijevalo samo praktične matematičke vještine kao što su metode računanja i ponavljanja utvrđenih postupaka. Danas se u mnogim zanimanjima i visokoškolskom obrazovanju od učenika očekuje da srednjoškolsko obrazovanje završe sa znanjem i kompetencijama koje obuhvaćaju osnovnu aritmetiku, statistiku, pojam funkcije itd. Sve veći broj učenika u višem srednjoškolskom obrazovanju, od kojih neki imaju vrlo nisku motivaciju za učenje matematike, predstavljaju specifičan izazov kada je riječ o nastavi matematike. Ovi učenici možda jednostavno ne mogu preneseno znanje usvojiti tako lako kao prethodne generacije, zbog čega su nužni pristupi koji se više oslanjaju na istraživanje. Razumijevanje načina na koji učenici razvijaju matematičko znanje je stalan istraživački interes u matematičkom obrazovanju. Matematički edukator Morgens Niss je ovaj interes obrazložio na sljedeći način:

> *Ako razumijemo moguće načine učenja matematike te prepreke koje sprječavaju te načine kod običnih učenika, bolje ćemo razumjeti što su matematičko znanje, uvid i sposobnosti (i što nisu), kako nastaju, pohranjuju se i aktiviraju te, posljedično i kako ih promicati* (Niss, 1999., str. 4).

Tijekom 20. stoljeća razvili su se različiti pristupi ovom interesu, ali najsnažniji je onaj prema kojem nastava treba crpiti iz načina na koji profesionalni matematičari razmišljaju, uče i razvijaju matematiku.

Matemaričari Fehr, Laisant, Hadamard i ostali su početkom 20. stoljeća prikupili sustavna svjedočanstva o tome na koji su način oni i njihovi kolege razvijali novo matematičko znanje, s ciljem kako bi opisali sam proces istraživačke djelatnosti i istraživačima omogućili da budu izvor nadahnuća za uključivanje učenika u takav proces u učenju matematike (Kilpatrick, 2014.). Kao ideja poslužili su i prvi reformski pokreti kada je riječ o nastavnom programu za srednje škole kada je njemački matematičar Felix Klein (početkom 20. stoljeća) uveo program reformi za obrazovanje nastavnika kojim su se promicale praktične upute, razvoj prostornog zora i fukcionalni pristup matematici (Kilpatrick, 2008.). Klein je odigrao ključnu ulogu u ranom razvoju matematičkog obrazovanja kao istraživačkog područja, a posebice u pogledu odnosa između istraživanja u matematici, nastavi matematike i istraživanja matematičkog obrazovanja. Njegove ideje na razne i često neizravne načine i dalje imaju utjecaj na nastavu matematike na srednjoškolskoj razini. Sljedeća etapa reformi, a koja se može povezati s idejom IUNM-a, odnosi se na uvođenje rješavanja problema u matematičkom obrazovanju tijekom 1980-ih godina. U sljedećem se odjeljku njime bavimo kao temeljnom idejom istraživanja u matematici.

Značajke procesa istraživanja

U ovom ćemo odjeljku dati pregled ideja i koncepata koji su vodili razvoj IUNM-a tijekom proteklog stoljeća. Ključni pojam je *problem*.

Problem u IUNM-u označava više od pukog zadatka, vježbe ili aktivnosti. Problem je otvoren u smislu da se od učenika traži da eksperimentiraju, teoretiziraju o mogućim rješenjima, priopćavaju hipoteze i moguće strategije rješavanja te da možda postavljaju i dodatna pitanja koja će se razmatrati tijekom procesa rješavanja.

Primjer problema može biti sljedeći:

> „Zamislimo neki trokut s duljinama stranica *a, b* i *c*. Ako se sve stranice jednako uvećaju, za koliko će površina uvećanog trokuta biti veća u odnosu na prvotni trokut ?"

Problem, ovisno o kontekstu u kojem se zadaje, učenicima pruža različite mogućnosti sudjelovanja u njegovoj preciznijoj formulaciji te pronalaženju rješenja. Ovisno o prethodnom znanju učenika o trokutima, mjerama stranica, kutevima i površinama, sličnim trokutima i trigonometrijskim relacijama, postoje razne strategije rješavanja problema. Učenici se mogu pozabaviti idejom uvećanja i eksperimentirati s aditivnim ili multiplikativnim uvećanjem. Zapravo mogu načiniti veći broj trokuta, povećavati ih, prikupiti rezultate i formulirati hipoteze o povećanju površine. Nadalje, učenici mogu razmatrati posebne slučajeve (kao što su pravokutni trokuti) i algebarskim putem postaviti hipotezu što se tiče toga koliko će povećana površina biti veća. Dodatno se mogu uspoređivati razne strategije rješavanja, raspravljati o njima te ih se čak može potvrđivati ili testirati na novim trokutima. Činjenica da učenici mogu koristiti različite i osobne ideje, uspoređivati, povezivati i procjenjivati ih kako bi stekli trajnije znanje smatra se prednošću u kontekstu IUNM-a. To znači da učenici znaju više nego samo izračunati površinu trokuta. Znaju kako kombinirati nova znanja s ostalim relevantnim područjima kako bi riješili problem otvorene prirode. Znanje koje se steklo ovim problemom odnosi se na simetrije i preslikavanja geometrijskih oblika.

Dewey daje naslutiti da bi učenje trebalo nastajati iz činjenja i iskustva, a u matematici će oni najčešće biti motivirani pokušajima da se riješi neki problem. Primjer je navedeni problem s uvećanjem trokuta. Problemi se mogu razlikovati po naravi, podrijetlu, razini složenosti, broju mogućih strategija rješavanja itd. Također se mogu razlikovati po potencijalu kada je riječ o pobuđivanju matematičke znatiželje ili kreativnosti kod učenika. To je važno jer učenike potiče na postavljanje pitanja i eksperimentiranje sa znanjem o temi.

Drugi primjeri iz nastavne prakse mogu obuhvaćati dinamičnu uporabu računalnih programa ili situacije modeliranja izvan matematike. Dok rade u programima Computer Algebra System ili Dynamic Geometry Software, učenici mogu nacrtati graf linearne funkcije koji je zadan $f(x) = ax + b$. Učenik na taj način može pomaknuti ili nagnuti graf prema gore ili dolje. Učenik može istraživati što će se s grafom događati ako se promijene koeficijenti. Ovaj problem može biti motiviran znatiželjom i učenicima pomoći da steknu znanje o grafičkom prikazu koeficijenata a i b. Informacijsko-komunikacijske tehnologije i različiti softveri općenito imaju važnu ulogu u razvoju i potpori IUNM (npr. vidi Artigue & Baptiste, 2012., str. 10).

Učenici se mogu susresti s mnogim drugim pitanjima u slučajevima kada je potrebno znanje, a primjer je „Mogu li se svi prirodni brojevi zapisati kao umnožak prostih brojeva? Mogu li se zapisati kao zbroj prostih brojeva?“ ili „Kako mogu opisati akceleraciju mojeg bicikla na putu do škole ako imam izmjerene brzine u određenim trenucima u vremenu?“ Ovakva pitanja od učenika zahtijevaju da razviju nova znanja. Problemi mogu proisteći iz čisto matematičkih pitanja te ih isto tako mogu potaknuti iskustva ili radnje iz stvarnog svijeta. Problemi, formulacija problema i rješavanje problema ključne su sastavnice istraživačkog procesa u nastavi matematike te imaju značajnu ulogu u literaturi o matematičkom obrazovanju. Sada ćemo napraviti kratak pregled načina na koji se u proteklom stoljeću bavilo ovim pojmovima u kontekstu nastave matematike.

Rješavanje problema kao način učenja

Za podrijetlo IUNM-a aktivnost rješavanja problema jednako je tako važna kao i postavljanje problema. Iako je rješavanje problema od 1980-ih godina u mnogim zemljama postalo ključni element u nastavnim programima matematike, on u to vrijeme nije bio novi pojam u literaturi. George Pólya je 1945. godine objavio knjigu „Kako riješiti matematički zadatak?“ koja se smatra klasičnim djelom kada je riječ o pristupima rješavanju zadataka u matematičkom obrazovanju (Artigue i Blomhøj, 2013., str. 802). U knjizi se rješavanje problema opisuje kao aktivnost kojom se matematičari bave dok istražuju. Naglasak je na ulozi problema i heurističkim kompetencijama koje su potrebne kako bi se problemi riješili. Heurističke se kompetencije oslanjaju na prethodno matematičko znanje učenika i na njegove strategije koje su potrebne za rješavanje nerutinskih problema. Problem s trokutom primjer je takvog nerutinskog problema u školskom kontekstu. Može ga se riješiti tako da se upotrijebi znanje matematičkog sadržaja kao što je površina bilo kojeg trokuta, ali situacija zahtijeva da učenici razviju znanje o sličnim trokutima dok na nov način kombiniraju poznate strategije i znanje. Pólya u svojem radu navodi da učenici koriste strategije kao što su pronalaženje protuprimjera, skiciranje situacije, npr. pomoću grafa, razmatranje posebnih slučajeva, pretpostavki i provjera, dokazivanje kontradikcijom itd. Što se tiče problema s trokutom, dobra bi početna strategija mogla biti da se razmotre posebni slučajevi poput konkretnih trokuta ili pravokutnih trokuta. Znanje koje se upotrebljava mogu biti definicija, pravilo, metoda itd. Sve su to poznate sastavnice matematike na sveučilišnoj razini. Međutim, Pólya se u svojem radu ne bavi na sustavan način načinom realizacije ovakvih aktivnosti na svim razinama obrazovnog sustava u nastavi matematike.

Schoenfeld je jedan od istraživača koji je sustavno istraživao realizaciju Pólyinih ideja u nastavi matematike. Iznosio je kritike na račun korištenja Pólynog rada tijekom 1980-ih smatrajući da ga se trivijalizira (1992., str. 352) te da se u dovoljnoj mjeri ne naglašava ključni element razvoja heurističkih kompetencija kod učenika. Schoenfeld smatra da se, prije nego što učenici krenu s rješavanjem problema, mora napraviti razlika između problema i zadataka. Zadaci se mogu riješiti poznatim strategijama rješavanja, dok rješavanje problema pak zahtijeva da se metode i znanje razviju ili kombiniraju na nov način. Schoenfeld u ovom procesu određuje važne elemente koji zahtijevaju da se učenici oslanjaju na resurse. Resursi su matematičko znanje pojedinca koje može imati učinak na konkretan problem; intuicija i neformalno znanje o području, činjenice, algoritamski postupci, „rutinski", nealgoritamski postupci, razumijevanje (propozicionalno znanje) prihvaćenih pravila i dogovora za rad u nekom području. Stoga se učenici tijekom procesa rješavanja problema moraju naučiti oslanjati na sljedeće: njihovo prethodno stečeno znanje, kompetencije i vještine te ih kombinirati s intuicijom i preliminarnom hipotezom odgovora. Kako bi to ostvarili, učenici se moraju osloniti na svoje heuristike, što uključuje „strategije i tehnike za ostvarivanje napretka s nepoznatim ili nestandardnim problemima; pravila za učinkovito rješavanje problema, uključujući: crtanje slika, uvođenje odgovarajuće notacije, istraživanje povezanih problema, reformuliranje problema; obrnuti rad, postupci testiranja i potvrđivanja" (Schoenfeld, 1985., str. 15). Ove su heuretike slične Deweyjevom opisu uloge matematike u istraživačkim procesima, ali one su isto tako šire od toga. Prema Artigueu i Blomhøju (2013.), one imaju zajedničke značajke s pristupima istraživački usmjerene nastave prirodnih predmeta poput postavljanja pitanja, teoretiziranja, sustavnog eksperimentiranja, suradnje, komunikacije, postavljanja problema na drugačije načine itd., a sve s ciljem da učenici steknu nova znanja. Važno je također istaknuti da heurističke kompetencije uključuju istraživački stav prema matematičkoj aktivnosti koji je motiviran znatiželjom.

Sve se ovo može primijeniti na problem s povećanjem trokuta i na sve moguće strategije rješavanja. Ovaj se problem može riješiti tako da se eksperimentira s konkretnim materijalima (izrada trokuta), razmatra razne reformulacije problema (povećanje pomoći aditivnih ili multiplikativnih strategija) ili se problemu može pristupiti s neke apstraktnije perspektive tako da se, primjerice, razmotri poseban slučaj kao što je pravokutan trokut.

Rješavanje problema smatra se u IUNM-u aktivnošću u kojoj se očekuje sudjelovanje učenika. To podrazumijeva da učenici koriste prethodno stečeno znanje, intuicije, nedefinirana shvaćanja i hipoteze kako bi istražili i razumjeli problem. Putem eksperimentiranja i novih načina kombiniranja znanja, što uključuje znanje stečeno tijekom istraživanja, učenici razvijaju nove spoznaje koje će se procijeniti pomoću daljnjih eksperimenata. Proces rješavanja problema pokreću matematička kreativnost i znatiželja učenika koje se dodatno razvijaju dok se problem rješava.

Međutim, i dalje je pomalo nejasno kako na ovaj način poučavati učenike, kada i zašto primjenjivati svaki element. Nastavnici moraju osmisliti probleme u kojima će se učenici ponašati kao matematički istraživači, a sami nastavnici moraju se suzdržati od toga da učenicima govore što bi trebali raditi. Međutim, nastava nije usmjerena samo na to da se učenicima omogući da steknu iskustvo sa zadacima koji su otvorenije prirode u odnosu na obične vježbe, kao što smo vidjeli u primjeru problema s trokutom, već i na to da se uspješno prođe cijeli opisani proces rješavanja problema.

Količina vođenja u problemski usmjerenom učenju

Dewey je još 1938. godine zagovarao tezu da se procesi učenja moraju temeljiti na interakciji učenika s problemom. Bilo bi poželjno da se ta interakcija odvija u dijalektici između poznatih i nepoznatih situacija gdje znanje koje su učenici prethodno stekli vodi proučavanje nepoznatoga. Na primjer, učenici na temelju onoga što već znaju mogu tijekom istraživačkog procesa formulirati hipotezu i problemu pristupiti na sustavan način. Kada je riječ o problemu s trokutom, učenici mogu sustavno ispitati odnos između povećanja trokuta i povećanja površine. Učenici mogu formulirati jasnu hipotezu o ovom odnosu na temelju posebnog slučaja pravokutnog trokuta. Hipoteza se može provjeriti tako da se konstruira bilo koji trokut te izračunaju površine početnog i povećanog trokuta. Učenici na temelju iskustva iz ove radnje razvijaju vlastito znanje o problemu koji su razmatrali. U problemu s trokutom učenicima se daje mogućnost da izgrade znanje o sličnim trokutima, opću formulu za površinu $A = \frac{1}{2}ab\sin C$, gdje je C kut između dviju stranica a i b, te da razumiju trigonometrijske odnose. Stoga učitelj, kako bi osmislio istraživački usmjerenu nastavu, mora izraditi scenarije koji će mu pomoći da razumije u kojoj fazi učenici tijekom proučavanja problema koriste prethodno stečeno znanje, kada se formulira hipoteza i kada se ona testira, kada se može izgraditi ili formulirati novo znanje na temelju (generalizacija) postupaka učenika. Učitelj je u tom smislu moderator kada je riječ o osmišljavanju i vođenju učenika dok potonji izgrađuju znanje (Godino i ostali, 2015.). Uloga učitelja trebala bi se doživljavati kao suistraživača koji vodi mlađe članove istraživačke zajednice, a ne kao osobu koja ima sve odgovore (Artigue i Baptist, 2012.).

Podupiranje rada učenika na problemu u IUNM-u odnosi se na formulaciju problema. Formulacija bi učenicima trebala omogućiti da razviju mnoštvo strategija ovisno o znanju koje su već usvojili. Ona bi trebala učenike dodatno poticati da istražuju i eksperimentiraju s problemom, što će ih navesti da izgrade novo znanje. Nastavnik bi trebao voditi učenike u ovom procesu i to ne tako da im daje odgovore, već da bude iskusni suistraživač koji postavlja pitanja i tako potiče istraživački proces.

Općenito govoreći, danas postoji suglasnost da stvarno rješavanje problema doprinosi ishodima učenja nastave matematike: „rješavanjem problema dobije se *više* nego time da se pokušava razumjeti dobiveno rješenje“ (Bosch i Winsløw, 2016.). „Više“ se odnosi na heuristike i uporabu gore navedenih resursa. Možda se čini kao da je nedostižno, ali ipak ga se prepoznaje kada se s njime susretne. Prethodno provedene studije ukazuju na to da dobra problemski usmjerena nastava stvara odgovarajuće odnose između određenih učenika i određenih zadaća (Schoenfeld, 1992., str. 353). Stoga se istraživanje posljednjih desetljeća usmjerilo na određivanje prikladnih problema koji bi trebali imati velik potencijal da učenici upotrijebe heuristike i resurse. Nadalje, naglasak je bio na istraživanju načela poučavanja i vođenja koja bi trebala biti učinkovita po pitanju toga da učenici realiziraju sve svoje potencijale. Kada je riječ o poučavanju, tijekom 1980-ih spominjale su se stvari poput vođene učeničke aktivnosti ili aktivnosti koja od učenika zahtijeva da procese artikuliraju kao neku vrstu *metarefleksije* o tome što rade. Ove metarefleksije mogu biti takve da se od učenika traži da problem prenesu u matematiku poput, primjerice, u problemu s modeliranjem akceleracije učenika tijekom vožnje biciklom do škole. Nadalje, metarefleksije su potrebne u problemu u kojem se razmatra graf linearne funkcije u koordinatnom sustavu i od učenika se traži da prikupe konkretne podatke iz niza primjera kako bi formulirali hipoteze kada je riječ o koeficijentima. Načela poučavanja također se bave izazovima i dvojbama nastavnika što se tiče toga kada da se uključe u aktivnosti učenika ili se suzdrže od davanja odgovora učenicima ili kako da potaknu optimalne strategije (Schoenfeld, 1992., str. 354). Ako nastavnik natukne da učenici trebaju razmotriti poseban slučaj, ucrtati skupove podataka kako bi napravili linearnu regresiju ili skicirali problem kao graf ili geometrijski oblik, neki će učenici to protumačiti kao jedini mogući način rješavanja problema. To će učiniti ne zato što smatraju da će pomoću te strategije riješiti problem, već zato što je tako rekao nastavnik. Prema tome, teško je učenike usmjeravati ili primjenjivati strategiju učenja otkrivanjem, a da im se ne naznači odgovor. Ako govorimo o problemu s trokutom, za učitelja vođenje učenika nije beznačajna zadaća u slučaju da oni inzistiraju na radu s konkretnim primjerima. Postavljanje pitanja kao što je "vrijedi li njihova hipoteza općenito", može dovesti do novih pristupa problemu, ali isto tako se može pokazati da je to prevelik zalogaj te zapravo neće biti riječ o vođenju. To je opći izazov kada je riječ o podupiranju istraživačkog učenja u nastavnom procesu. Učenicima se treba dati ograničeno polje na kojem će provoditi svoje istraživanje. Ako je vođenje suviše usmjereno ili je pak premalo ograničenja, tada se planirana nastava urušava.

Izazov podupiranja istraživačkog procesa učenika jest sljedeći: nema pravog istraživanja ako postoji previše uputa te se poništava potencijal za učenje; s druge strane, ako postoji premalo uputa učenici će zapeti i odustati od rješavanja problema. Prava količina uputa je stvar osjetljive ravnoteže.

Učenici u tom slučaju ne mogu izgraditi znanje na temelju svojih postupaka i iskustava. Nastavnik stoga učenicima ne može izravno reći što trebaju raditi, ali istovremeno mora u učenicima potaknuti potrebu da postupaju na način koji bi ih mogao dovesti do postizanja željenih ciljeva učenja. Stoga se na podupiranje treba gledati kao na nešto više od davanja primjera, strategija i postavljanja preizravnih i zatvorenih pitanja.

Uloga pitanja učenika dok rade na problemu

Najnovije studije ukazuju na postavljanje problema kao pristup sudjelovanju učenika u rješavanju problema. Postavljanje problema kao pedagoška ideja staro je kao i sama ideja rješavanja problema. Ellerton (2013.) se referira na Einsteina i Infelda koji su tvrdili da je formulacija problema važnija od davanja odgovora te da je to mnogo zahtjevnija zadaća (Ellerton, 2013., str. 88). Možda je to pretjerano, ali naglašava se važnost propitivanja znanja koje se namjerava dalje proučavati ili produbiti.

Nastanak postavljanja problema kao pristupa nastavi matematike povezan je s ponovnim buđenjem zanimanja za rješavanje problema koje se pojavilo 1980-ih godina. Ellertonova sudija o uključivanju nastavnika matematike koji još nisu počeli predavati u aktivnosti postavljanja problema daje naslutiti da će postavljanje problema možda imati glavnu ulogu u nastavnim programima matematike (Ellerton, 2013., str. 90). Razlog za iznošenje ove tvrdnje jest taj što postavljanje problema kod učenika pospješuje razvoj heuristika i resursa koji su dio rješavanja problema i IUNM-a ili, kako su to sročili Singer, Ellerton i Cai, „Postavljanje problema poboljšava učeničke vještine rješavanja problema, stavove i povjerenje u matematiku te doprinosi dubljem razumijevanju matematičkih koncepata i razvoju matematičkog mišljenja" (Singer, Ellerton i Cai, 2013., str. 2). Prema Artigueu i Blomhøju (2013.) te Hiebertu i ostalima (1996.), postavljanje problema kao učenička aktivnost može poduprijeti Deweyjevu ideju reflektivnog (kritičkog) istraživanja, koja u sebi sadrži ideju da bi se učenicima trebalo dopustiti i čak ih poticati da problematiziraju znanje koje im se prenosi. Štoviše, to znači da učenike treba poticati da se pitaju o posljedicama problema nad kojim rade tijekom IUNM-a. Za očekivati je da se učenici u primjeru s trokutom pitaju na što se to misli pod „jednako uvećati" stranice trokuta. Međutim, važno je da učenici sami dođu do odgovora i to tako da, primjerice, eksperimentiraju kako s aditivnim, tako i s multiplikativnim strategijama. Na taj se način potiče da učenici samostalno grade znanje, a posebice spoznaja da aditivna strategija neće dovesti do sličnih trokuta. To bi učenike moglo navesti da se pitaju mogu li se površine uspoređivati samo u slučajevima kada su početni i povećani trokut slični. Nadalje, problem s trokutom može učenike navesti da se pitaju kako odrediti visinu bilo kojeg trokuta ako su im poznate samo dužine stranica kao a, b i c itd.

Dobar problem je otvoren, što učenike navodi na razmišljanje, preciziranje i postavljanje pitanja o dotičnom znanju. Postavljanje pitanja ključno je kao pokretač istraživačkog procesa i trebalo bi učenike navesti da odgovore na vlastita pitanja i pretpostavke.

Kada je riječ o vođenju i podupiranju, razvijeno je nekoliko ideja planiranja kako bi se postavljanje problema realiziralo kao aktivnost u nastavi matematike u školama. Ove ideje obuhvaćaju davanje informacija učenicima i traženje od njih da postavljaju probleme koji se mogu riješiti na temelju dobivenih informacija; traženje od učenika da riješe određene probleme i onda postavljaju slične probleme ili opisivanje određenih pojava učenicima i traženje da postavljaju probleme koji se odnose na opisane pojave (Bosch & Winsløw, 2016). Međutim, ove su ideje planiranja još uvijek su pomalo nedostatne ako želimo da postupci učenika odražavaju postupke matematičara istraživača gdje nova pitanja proistječu iz interakcije istraživača s dotičnom domenom znanja poput, primjerice, proučavanja rada drugih istraživača ili putem osobnog ili zajedničkog rada na rješavanju problema. Takve aktivnosti mogu potaknuti razmišljanje i znatiželju te formulaciju novih problema, što dodatno potiče istraživanje. Kilpatrick smatra da to nije samo značajka istraživanja. Tvrdi da, govoreći još općenitije, većinu problema u stvarnom životu formulira osoba koja ih rješava te da bi nastava matematike u tom pogledu trebala biti sličnija stvarnom životu (Kilpatrick, 1987., str. 124). Eksplicitna uloga postavljanja problema varira u raznim pristupima IUNM-a, ali svima im je zajedničko to da potiču učenike na razmišljanje, čini ih znatiželjnima te ih potiče da analiziraju pretpostavljene odnose i formuliraju hipoteze za daljnje istraživanje.

Otkud dolaze problemi?

I druge su se teorije o nastavi matematike, uz literaturu o postavljanju problema, na različite načine bavile ulogom problema, rješavanja problema i postavljanja problema. Nekoliko pristupa matematičkom obrazovanju smatra rješavanje nerutinskih problema temeljem koji se pokrenuo i dodatno razvijao 1970-ih i nakon toga: Teorija didaktičkih situacija (TDS, Brousseau, 1997.) i realistično matematičko obrazovanje (RMO, Freudenthal, 1991.). TDS-u i RMO-u zajednička je ideja da se učenicima trebaju davati nerutinski problemi koje oni onda rješavaju stjecanjem novog znanja. Što se tiče TDS-a, to bi se trebalo odvijati tako da se učenici prilagođavaju onome što se naziva okruženje nastavne situacije (Brousseau, 1997.). S druge strane, razvoj znanja se u RMO-u događa kada učenici matematiziraju pojavu koja je predmet problema. RMO razlikuje dva aspekta ovog procesa: vertikalnu i horizontalnu matematizaciju (Freudenthal, 1991.). Objema je teorijama zajednička ideja da nastavnik učenicima daje početni problem, ali učenici su ti koji trebaju djelovati i razraditi ideje koje se odnose na rješavanje problema. Takve aktivnosti mogle bi dovesti do toga da učenici implicitno ili eksplicitno propituju navedeno znanje. Ova se dva pristupa smatraju prekretnicama kada je riječ o aktivnostima projekta MERIA te ćemo u kasnijim odjeljcima ovoga priručnika dati detaljan pregled obiju teorija.

Međutim, isto tako postoje i drugi teorijski pristupi koji se bave IUNM-om. Za teoriju matematičke kompetencije (Niss i drugi, 2002.) može se reći da obuhvaća heurističke kompetencije, iako se teorija bavi s osam kompetencija od koji se nijedna na naziva heurističkom. Takozvana kompetencija rješavanja problema i kompetencija modeliranja posebice dijele osobine onoga što se gore opisalo kao ključna uloga heuristika u istraživački usmjerenim aktivnostima.

Općenitije govoreći, mogli bi se ustvrditi da *aktivnosti matematičkog modeliranja* podupiru razvoj stavova i vještina rješavanja problema. Iz perspektive teorije matematičke kompetencije matematičko se modeliranje može opisati kao ciklično kretanje naprijed i nazad u određenim fazama ciklusa modeliranja (Blomhøj, 2004.; Blum & Leiss, 2006.). Ciklusi modeliranja mogu nastavnicima poslužiti kao smjernice; ako su svjesni faza koje čine aktivnosti modeliranja, nastavnici mogu pratiti načine na koje ih učenici provode u nastavnim situacijama. Međutim, studije koje koriste cikluse modeliranja za analizu učeničkih aktivnosti modeliranja ukazuju da to nije uvijek tako. Problemi modeliranja koji sadrže mogućnost realiziranja svih faza možda ipak ne ostvare sve te potencijale u nastavnim kontekstima (Blum i Borromero Ferri, 2007.). Iz perspektive pristupa teorije matematičke kompetencije i RMO-a, matematičkom je modeliranju zajednička ideja da se istraživački procesi temelje na „realističnim“ situacijama. To je isto tako u skladu s idejama o nastavi koje je Dewey formulirao početkom

20. stoljeća. (Postoje i) Drugi pristupi modeliranju kao što su Aktivnosti poticanja modeliranja ((Doerr i Ärlebäck, 2015.) koji zagovaraju otvorenije pristupe istraživačkim procesima i da ih može poduprijeti prethodno stečeno znanje učenika kako u unutarnastavnim, tako i u izvannastavnim domenama matematičkog znanja.

Možemo reći da isto vrijedi i za antropološku teoriju didaktike. ATD daje opći model matematičkog znanja koje se promatra kao ljudsko proučavanje tipova problema. Organizirana je na temelju matematičkih prakseologija koje se sastoje od praktičnog bloka (vrste problema i tehnika) te bloka znanja (tehnologija i teorija). Smatra se da nastavnik rukovodi didaktičkim procesom. Prema ovom se pristupu istraživački proces pokreće kada nastavnik zada problem otvorene prirode. Problem može biti čisto matematički ili iz stvarnog života. Istraživački bi proces trebalo pokretati to da učenici izravno formuliraju pitanje (Chevallard, 2015.). Međutim, nastava i učenje ne promatraju se odvojeno, već se odvijaju tijekom složenog procesa didaktičke transpozicije. Ovaj proces sadrži određena didaktička ograničenja koja proizlaze iz različitih uključenih ustanova (društvo, matematička zajednica, obrazovni sustav, škola, učionica) koje umanjuju autonomiju nastavnika. ATD predlaže načine kako da se transformiraju uvjeti i ograničenja škola i disciplina. Međutim, u ovom se priručniku više nećemo baviti ovim ambicioznim oblikom IUNM-a.
Otvoreni pristup s velikim brojem odgovora učenika na isti problem u japanskoj se tradiciji (Nohda, 2000.) percipira kao pokretačem koji pažnju učenika (i nastavnika) usmjerava na matematičku argumentaciju i komunikaciju. Različite strategije koje učenici osmisle mogu se prenijeti na cijeli razred kako bi učenici stekli koherentno znanje o problemu.

Vidimo, dakle, da u različitim teorijskim pristupima postoje različita poimanja načina formulacije i pronalaska problema, što kod učenika može potaknuti živahne istraživačke procese. Kada je riječ o matematičkom modeliranju, učitelji su često ti koji zadaju početne probleme koji se najčešće odnose na situacije iz stvarnog života. Ideja da učenici uče kroz interakciju s jednim ili više problema uobičajena je značajka IUNM-a koja seže još od Deweyja.

Kako bismo saželi ideje koje smo do sada spomenuli, možemo reći da se IUNM definira kao bilo koja nastavna aktivnost čiji je cilj da učenici sudjeluju u istraživačkim procesima u matematici, što znači da poimaju, ispituju i istražuju koncepte i pojmove tako što se ponašaju ili se uče ponašati kao istraživači matematičkog problema te na taj način stječu određeno matematičko znanje.

Što se napravilo kada je riječ o promicanju IUNM-a?

Istraživači matematičkog obrazovanja žele IUNM promicati kroz nacionalne i istraživačke projekte u raznim zemljama. IUNM je u mnogim državama u nekoj mjeri uvršten u nastavni plan matematike, iako se može primijetiti da se koriste razne formulacije njegovih značajki te da se primjenjuju različiti teorijski pristupi. Projekti koje financira Europska unija podupiru i proučavaju provedbu IUNM-a u obrazovnim sustavima država članica. U izvješću EU-a iz 2007. godine o pedagoškim trendovima u europskim obrazovnim sustavima spominje se „alarmantno smanjenje zanimanja mladih za ključne prirodne predmete i matematiku u Europi“ (Rocard i drugi, 2007.). U istom tom izvješću navodi se kako „prijelaz s poglavito deduktivne pedagodije nastave prirodnih predmeta u školama na istraživački usmjerene metode omogućuje načine za povećanjem zanimanja za prirodne predmete“. U američkom se dokumentu pod nazivom „Načela i standardi nastave matematike u školama“ na sličan način naglašava cilj za nastavu matematike na srednjoškolskoj razini, a to je da se „učenike nauči rješavati nerutinske probleme tako da im se omogući stjecanje znanja te pruže alati za rješavanje takvih problema“ (NCTM, 2000.). To ukazuje na zanimanje država diljem svijeta kada je riječ o promicanju IUNM-a u svim učionicama. Međutim, kada je riječ o promicanju IUNM-a, u izvješćima iz pojedinih država vidimo da još uvijek postoje izazovi u provedbi. U izvješćima iz Francuske i Engleske navodi se da, iako političari često imaju dobre namjere, oni nisu potpuno svjesni što je zapravo potrebno učiniti kako bi se promijenila praksa u učionicama, a poučavanje postalo IUNM umjesto prijenosa znanja (Burkhardt i Bell, 2007.; Artigue i Houdement, 2007.). Projekt PRIMAS koji je pokrenula EU istraživao je ove izazove te donio preporuku da se nastavnicima treba pružiti prilike da provode istraživački usmjerenu nastavu matematike. Nadalje, navodi se da se svi projekti i mjere za promicanje IUNM-a moraju prilagoditi lokalnim uvjetima. Međutim, nastavnicima su potrebne potporne strukture koje promiču međusobnu potporu u provedbi novih inicijativa (García, 2013.). Sličan EU-ov projekt pod nazivom MASCIL bavio se izazovima provođenja istraživački usmjerene nastave i povezivanjem poučavanja matematike i prirodnih predmeta s tržištem rada. On promiče holistički pristup pružanju potpore putem „provođenja niza radnih aktivnosti, što uključuje razvoj iznimno kvalitetnih, inovativnih materijala i održavanje radionica za profesionalni razvoj koje bi provodili nastavnici koji su prošli obuku za istraživački usmjereno učenje.

Sada ćemo se posvetiti pitanju realizacije IUNM-a i povezanim izazovima.

2. Kako provoditi IUNM?

Uvod

Nekoliko projekata EU-a promicalo je istraživački usmjerenu nastavu matematike (IUNM) kako bi se učenike bolje pripremilo za dinamično društvo znanja. U 21. stoljeću nije dovoljno znati činjenice i posjedovati izolirane osnovne vještine. Učenici moraju razviti vještine rješavanja problema i sposobnost samostalnog stjecanja znanja. Stoga kompetencije kao što su sposobnost rada s nedostatkom informacija, matematička kreativnost u novim područjima znanja, suradnja pri rješavanju problemskih situacija i komunikacija (matematičkih) rezultata postaju sve važnije. Matematičko obrazovanje ima odgovornost za razvoj vještina za 21. stoljeće (Rocard i drugi, 2007.).

Fokus na vještine za 21. stoljeće nije nova pojava. Slične kompetencije prepoznajemo u inicijativama čija je svrha da mjere i promiču matematičku pismenost učenika. PISA matematičku pismenost definira na sljedeći način:

> ... sposobnost učenika da formuliraju, koriste i tumače matematiku u raznim kontekstima. Ova definicija obuhvaća matematičko rasuđivanje i korištenje matematičkih pojmova, postupaka, činjenica i alata kako bi opisali, objasnili i predvidjeli pojave. To pojedincima pomaže da prepoznaju ulogu matematike u svijetu te da utemeljeno prosuđuju i odlučuju kao konstruktivni, angažirani građani koji razmišljaju kritički. (OECD, 2016a, str. 25)

Trenutni uobičajeni ključni standardi u SAD-u također obuhvaćaju kompetencije koje nadilaze tečnost postupka (Centar za najbolje prakse Nacionalnog udruženja guvernera, Vijeće glavnih državnih tajnika za školstvo, 2010). Spomenuti standardi jasno se usredotočuju na važnost razvijanja kompetencija kao što su rješavanje problema, obrazlaganje, komunikacija i predočavanje.

Popise novih kompetencija objedinjuje potreba za fleksibilnijim vještinama. Pitanje je kako ove vještine razviti u učionica na nastavi matematike? IUNM je način kako poticati razvoj ovih vještina. Procesi poput postavljanja hipoteza, planiranja istraživanja, sustavnog eksperimentiranja i procjene rezultata u IUNM-u se koriste za kreiranje nastavnih satova. U ovom ćemo se poglavlju baviti ulogom zadataka i nastavnim strategijama u IUNM-u. Osim toga, raspravit ćemo i opisati iskustva s IUNM-om iz raznih europskih zemalja.

Zadaci koji potiču IUNM

Tradicionalni zadaci iz udžbenika teško da će pospješiti IUNM. Takvi zadaci uglavnom daju upravo onu količinu informacija koja je potrebna za rješavanje zadatka, a pretežito su koncipirani tako da učenici gotovo uopće ne moraju razmišljati o postupku rješavanja. Za IUNM važno je da se u učionici stvore nastavni satovi koji su pogodni za primjenu istraživačko-usmjerenih procesa. Nije nužno da se svim procesima iz ciklusa istraživanja posveti izravna pažnja u svakom zadatku, ali zadatak bi učenicima trebao omogućiti da uče barem o jednom od istraživačkih procesa u matematici. Nestrukturirani zadaci mogu učenicima dati priliku da istražuju, kritički razmišljaju, surađuju i komuniciraju rezultate; u Slici 1 navodi se primjer.

Strukturirana verzija

Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.

- Koliko mg lijeka ostaje u krvotoku pacijenta nakon jednoga dana?
- Dovršite tablicu.

Dan	Mg lijeka u krvotoku
0	0
1	1125
2	
3	

- Objasnite zašto možete izračunati količinu lijeka za sljedeći dan pomoću formule: nova_količina = (stara_količina + 1500) * 0,75
- Nakon koliko će dana pacijent u krvotoku imati više od 4 g lijeka? A nakon koliko dana 5 g?
- Koja je najveća moguća količina lijeka?

Nestrukturirana verzija

Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.

Istraga

- Istražite računanjem na koji se način mijenja količina lijeka (u mg) ako netko lijek krene uzimati u dnevnoj dozi od 1500 mg i to, primjerice, tri puta dnevno po 500 mg.
- Jesu li posljedice dosta tako dramatične ako se preskoči jedan dan i/ili uzme dvostruka doza?
- Može li se postići svaka količina lijeka u krvotoku? Objasnite vaš odgovor.

Proizvod

Osmislite letak za pacijente koji će sadržavati odgovore na gore navedena pitanja. Uključite graf i/ili tablice kako biste ilustrirali povećanje količine lijeka tijekom nekoliko dana.

Slika 1: Dvije verzije zadatka (Doorman, Jonker i Wijers, 2016., str. 25)

Ako se u učionici koristi nestrukturirana verzija zadatka, tada je nastavnik dužan usmjeriti pažnju učenika na matematičke aspekte problema (ili u kojoj je mjeri dopušteno odmaknuti se od matematike i baviti se, primjerice, biologijom). Ovaj nam primjer ukazuje na to da „otvoreni“ zadaci mogu matematiku povezati s drugim prirodnim predmetima i da je matematika primjenjiva. Međutim, „otvaranje problema“ neće nužno dovesti do korištenja matematičkih pojmova u nematematičkim konceptima. I isključivo matematički zadaci mogu se preformulirati u nestrukturirane zadatke te pretvoriti u istragu. Važan cilj nestrukturiranog zadatka jest da učenici preuzmu aktivnu ulogu i potiču vlastito djelovanje u rješavanju matematičkog zadatka.

Nestrukturirani zadaci koji dovode do strategija s više rješenja potiču učenje u IUNM-u. Strategije učenika, njihova tumačenja problema, pretpostavke, izračuni, poimanja i suradnja omogućuju da se promišlja o istraživačkim procesima u matematici. Nastavnici su u ovom procesu proaktivni. Oni pomoću strateški pomno odabranih pitanja podupiru i potičuučenike kojima teže ide i ohrabruje one koji uspješno rješavaju zadatak. Oni cijene doprinose učenika, ispravljaju pogreške i podupiru učenje tako što koriste mišljenje i iskustvo učenika. To zahtijeva postojanje osjećaja zajedničkog cilja i vlasništva odnosno zajedničko kreiranje matematičkog sadržaja.

Važno je istaknuti da se u svakodnevici sve ne treba ili čak ne može izmijeniti kako bi se provodila istraživački usmjerena nastava. Uloga istraživanja u svakodnevnoj nastavnoj praksi jedna je od sastavnica dobroga obrazovanja. Provođenje IUNM-a može se poticati tako da se nastavnike podupire u tome da u nastavne sadržaje uključe teme kao što su istraživački procesi u svakodnevnoj praksi, da se razvijaju resursi za IUNM, da se osvijeste načini učenja koncepata kroz IUNM, podupire timski rad te mjeri napredak i procjenjuju kompetencije učenika koje se odnose na IUNM.

Strategije poučavanja za IUNM

PRIMAS[1] je bio projekt EU-a čiji je cilj bio da se nastavnike podupire u tome da zajednički istražuju pedagošku osnovu IUNM-a putem osmišljavanja i provedbe modula za profesionalni razvoj. Ti su moduli obuhvaćali aktivnosti koje povezuju istraživački usmjerene nastavne metode s postojećim praksama, inovativne nastavne aktivnosti, a popraćene su video snimkama nastavnog sata i primjerima priprema nastavnog sata. Od modula se očekivalo da nastavnike i one koji ih obrazuju navedu na razmišljanje i na novi način rada (Swan i drugi, 2013.).

Prijelaz prema IUNM-u dovodi nastavnike u mnoge pedagoške nedoumice. Na primjer: Kako moje učenike mogu poticati da postavljaju i slijede vlastita pitanja? Kako mogu pomoći učenicima da slijedeći svoja pitanja dođu do korisnih rezultata? Kako naučiti učenike da rade suradnički i uče jedni od drugih? Kako ove nove aktivnosti uklopiti u moje uobičajene dnevne obveze? Ovakva su pitanja dovela do sljedećih tema kojima su se bavili PRIMAS moduli za promicanje istraživanja u svakodnevnom radu u nastavi:

1. organiziranje istraživanja pod vodstvom učenika;
2. pomaganje učenicima pri rješavanju nestrukturiranih problema;
3. promicanje razvoja koncepata kroz istraživanje;
4. postavljanje pitanja koja potiču razmišljanje (i uključuju sve učenike);
5. podupiranje suradničkog rada;
6. uporaba samoprocjene i vršnjačke procjene u cilju poticanja učenja.

Transformacije zadatka iz udžbenika

Dat ćemo nekoliko primjera alternativnog korištenja zadatka iz udžbenika koji se navodi u Slici 1. Strukturirana verzija zadatka daje kontekst, navodi problem i točne informacije koje su potrebne kako bi se problem riješio. U zadatku se traži da se koristi formula, a kontekst se može zanemariti. Zadatak ne podupire primjenu ili učenje o primjeni matematike izvan učionice matematike. Čini se da

[1] http://www.primas-project.eu/

nestrukturirana verzija učenicima omogućuje da istraže situaciju, budu matematički kreativni, surađuju, kritički promišljaju o rezultatima te o njima komuniciraju. Međutim, što se tiče nestrukturirane verzije zadatka, postoji opasnost da će se učenici osjećati izgubljeno i neće znati što im je činiti ili da će dijelovi zadatka od učenika iziskivati toliko vremena da neće moći doći do traženog rezultata za vrijeme trajanja sata. Nastavnik mora usmjeravati sat kako se to ne bi dogodilo. Stoga se za nestrukturiranu verziju zadatka mora pripremiti strukturiran plan sata kako bi se učenike vodilo tijekom istraživanja.

Sat 1
10 minuta: formirajte skupine, uvedite problem i plan rada te raspodijelite zadatak
10 minuta: učenici u skupinama rade na zadatku
10 minuta: raspravite s cijelim razredom imaju li sve skupine ideju kako početi i što raditi. Razmijenite strategije i pobrinite se da svi razumiju što se od njih očekuje.
15 minuta: učenici rade na zadatku, dovršavaju izračune i pripremaju sastavne dijelove za letak.

Sat 2
20 minuta: učenici dovršavaju letke
20: prezentiranje nekolicine primjera
10 minuta: osvrt na zadatak (i njegova uloga u daljnjem radu)

Slika 2: Strukturirani plan sata za nestrukturirani zadatak (vidi Sliku 1).

Treba napomenuti da su za ovaj plan sata potrebne pedagoške vještine kako bi se upravljalo procesom u učionici. Nastavnik nekoliko puta tijekom sata treba kombinirati rasprave na razini cijelog razreda i skupni rad.

Dodatna opcija da se učenike uključi u proces istraživanja (s više strukture) jest da se zadatak raspodijeli na manje dijelove. Možete pokazati samo uvodni tekst i pitati: Što je glavni problem? Trebaju li nam neke dodatne informacije kako bismo riješili problem? Koju biste strategiju mogli upotrijebiti kako biste došli do odgovora?

Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.

Slika 3: Situacija zadatka. Što bi mogao biti glavni problem?

Učenicima se, nakon što sami formuliraju problem, može dati strukturirana verzija iz udžbenika. Redoslijed pitanja im sada vjerojatno ima više smisla budući da su mogli sami razmisliti o situaciji i mogućim strategijama (Ainley i drugi, 2009.).

Posljednju opciju koristimo kao primjer toga što se može učiniti sa zadacima iz udžbenika, a ona se odnosi na to da uzmemo sva potpitanja i izmiješamo njihov redoslijed ili da ih posložimo kao komadiće slagalice te učenike zamolimo da rekonstruiraju izvorni redoslijed iz udžbenika.

Zadatak koji se navodi u Slici 4 učenicima omogućuje da promišljaju o strukturi udžbenika koji koriste. Zadaci su u većini slučajeva slično strukturirani tako da odražavaju logičnu strategiju istraživanja problema i pronalaženja odgovora na glavno pitanje, ali od učenika se gotovo nikada ne traži da promišljaju o strategiji i opišu njezine značajke (obavljanje jednoga izračuna, sustavno uvrštavanje više podataka u tablicu, opis tijeka izračuna pomoću formule, crtanja grafa te korištenje formule i grafa kako bi se riješio glavni problem).

Pacijent je bolestan. Liječnik mu propiše lijek te mu savjetuje da uzima dnevnu dozu od 1500 mg. Nakon uzimanja doze 25 % lijeka u prosjeku se izlučuje iz tijela tijekom dana. Preostala količina lijeka ostaje u krvotoku pacijenta.

- Koja je najveća moguća količina lijeka?
- Objasnite zašto možete izračunati količinu lijeka za sljedeći dan pomoću formule: nova_količina = (stara_količina + 1500) * 0,75
- Dovršite tablicu.

Dan	Mg lijeka u krvotoku
0	0
1	1125
2	
3	

- Nakon koliko će dana pacijent u krvotoku imati više od 4 g lijeka? A nakon koliko dana 5 g?
- Koliko mg lijeka ostaje u krvotoku pacijenta nakon jednoga dana?

Slika 4: Pomiješan je redoslijed pitanja. Kako glasi izvorni redoslijed iz udžbenika?

Dodatne nastavne strategije za IUNM

Naveli smo tri alternativna načina korištenja zadatka iz udžbenika i na koje ga načine transformirati kako bi se na satu matematike provelo istraživanje. Zajedničko im je to što nastavnik mora moći provesti rasprave u razredu i učenicima dati vrijeme za razmišljanje. Strategija misli-upari-podijeli predstavlja dodatnu strategiju za raspravu istraživačkog procesa s cijelim razredom u kojoj će svi sudjelovati. Glavna se ideja sastoji od toga da učenici za sebe promišljaju o problemu dvije minute te da bilježe svoja razmišljanja. Zatim učenici imaju dvije minute da svoja razmišljanja usporede s učenikom koji sjedi pored njih te onda u dvije minute moraju rezultate podijeliti s cijelim razredom. Učenici u ovoj strategiji imaju vremena za razmišljanje, a nastavnik sve učenike može uključiti u raspravu.

Osim gore navedenih zadataka mogu se smisliti i zadaci koji učenike potiču da formuliraju hipoteze (npr. Slika 5). Učenicima također možete dati niz tvrdnji koje se odnose na temu koja se obrađuje i dati im da odluče jesu li te tvrdnje uvijek istinite, ponekad istinite ili nikada nisu istinite. Ako smatraju da je neka tvrdnja *uvijek* istinita ili *nikada* nije istinita, onda se od njih očekuje da objasne na temelju čega su to zaključili. Ako smatraju da je *ponekad* istinita, onda moraju opisati kada je istinita, a kada nije.

Povišica Max dobiva povišicu od 30 %. Jim dobiva povišicu od 25 %. Dakle, Max je dobio veću povišicu.	**Pravi kutevi** Peterokut ima više pravih kuteva od pravokutnika.
Rođendani Ako u razredu ima deset učenika, vjerojatnost da je dvoje učenika rođeno istoga dana iznosi jedan.	**Veći razlomci** Ako isto broj zbrojimo s brojnikom i nazivnikom, povećava se iznos razlomka.

Slika 5: Tvrdnje koju su uvijek istinite, ponekad istinite ili nikada nisu istinite.

Od učenika se u ovom zadatku traži da odluče o istinitosti tvrdnji te da obrazlože odluke koje su donijeli. Objašnjenja će vjerojatno obuhvaćati davanje primjera i protuprimjera kako bi se dokazalo ili opovrgnulo tvrdnju. Od učenika se također može tražiti da dodaju uvjete ili revidiraju tvrdnje tako da one postanu „uvijek istinite“. Ovakve aktivnosti imaju iznimno snažan učinak. Tvrdnje se mogu pripremiti tako da potaknu učenike da se bave i raspravljaju o čestim pogrešnim predodžbama ili greškama. Zadaća nastavnika jest da učenike usmjerava da navode objašnjenja, primjere i protuprimjere. Ovakav tip zadataka učenicima daje priliku da se upoznaju s ulogom primjera u matematičkom istraživanju.

Primjeri ovakvih zadataka u matematici ukazuju na važnost pomnog biranja resursa kada je riječ o provođenju IUNM-a u nastavi matematike.

Iskustva u primjeni IUNM-a

Razne studije pružaju empirijske dokaze o kvaliteti i učinku IUNM-a. IUNM utječe na motivaciju i razvoj stavova prema matematici kao i na shvaćanje važnosti matematike u stvarnom životu i društvu (Bruder i Prescott, 2013.; Blanchard i drugi, 2010.; Furtak i drugi, 2012.; Hattie, 2009.; Minner). Međutim, neki stručnjaci upozoravaju da ovakva vrsta nastave može dovesti do boljeg učenja samo ako se pomno osmisli i planira (Hofstein i Lunetta, 2004.; Woolnough, 1991.).

Pokazalo se da je vođeno istraživanje u usporedbi sa strukturiranim istraživanjem i otvorenim istraživanjem najučinkovitija metoda provedbe istraživanja u učionici i to u kombinaciji sa zatvorenim zadacima koji potiču učenje postupaka i osnovnih vještina (Bruder i Prescott, 2013.).

Kako znamo da je nastava bila učinkovita? Većina pritisaka koje nastavnici danas doživljavaju proizlazi iz raznih očekivanja kada je riječ o učenju učenika, a ona najčešće nisu jasno formulirana. Ako su nam cilj učenici koji mogu razumjeti matematiku, uživati u matematici i koji su sposobni rješavati probleme i donositi zaključke, onda možemo reći da je vođeni IUNM uspješan. Međutim, ako nam je cilj da učenici postižu visoke ocjene na standardiziranim testovima znanja, tada je IUNM nešto manje uspješan.

Rezultati interne kvalitativne evaluacije PRIMAS-a daju nam iznimno dobar pregled izazova i mogućnosti s kojima se nastavnici susreću kada eksperimentiraju s IUNM načinom rada (Maass, 2013.). Većina PRIMAS nastavnika smatra da je IUNM pristup usmjeren na učenika koji uključuje samostalno, ali vođeno istraživanje, postavljanje pitanja, otkrivanje i testiranje pretpostavki u potrazi za novim shvaćanjima.

> *Bit istraživanja jest da se učenicima omogući da stvaraju objašnjenja i kritički promišljaju umjesto da uopće ne razmišljaju [...] dok rješavaju složene probleme učenici primjenjuju svoje znanje na nove probleme iz stvarnog svijeta te s drugima na kritički način raspravljaju o modelima, rješenjima i dokumentiranju.* (Nastavnik s Cipra)

Međutim, usmjeravanje pažnje na istraživačke procese u razredu doživljava se kao izazovna, ali dobrodošla prilika da se nastavni sat osmisli na drugačiji način. Nastavnici ističu prednosti istraživački usmjerenog učenja za njihove učenike.

> *Iz vlastitog iskustva znamo koja je vrijednost toga da nešto otkrijemo sami umjesto da nas netko samo nauči rješenju. Kada se primjenjuje načelo istraživački usmjerenog učenja, učenici doista uče pristup te imaju više načina za razumijevanje.* (Nastavnik iz Švicarske)

Nastavnici također ističu pozitivni učinak istraživački usmjerenih procesa na razmišljenje učenika.

> *Shvatio sam da je to imalo učinak na induktivno razmišljenje učenika. Zadivila me sposobnost nekih učenika da donose jasne zaključke i potkrijepe ih matematičkim dokazima pomoću modela [...] došlo je do dramatičnog povećanja usmenog sudjelovanja učenika [...] posebice uporabe ispravne matematičke terminologije, a to u ovoj dobi nije nimalo lako.* (Zamjenik ravnatelja s Cipra)

Nastavnici iz vlastitog iskustva navode da su uživali objašnjavati koncepte i pojmove, a isto se odnosi i na neke učenike. Međutim, čini se kako su nastavni satovi tijekom kojih se učenici bave otvorenim pitanjima i zadacima rješavanja problema također učinkoviti što se tiče rasprava o strategijama rješavanja.

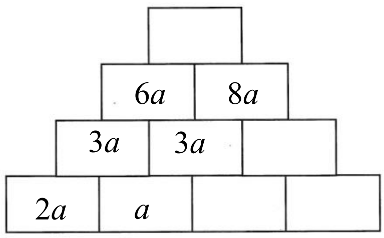
> *Sviđala mi se nastava usmjerena na nastavnika, a mislim da se učenicima ona još uvijek sviđa. Ali na taj način neće puno naučiti jer ne moraju sami rješavati probleme. Razumjet će problem, postupak rješavanja, a na kraju i samo rješenje.* (Nastavnik iz Njemačke)

Nastavnici u ovom smislu naglašavaju važnost toga da učenici razmjenjuju mišljenja i informacije:

> *Shvatio sam koliko je važno navesti učenike da koriste ovu priliku (dijalog) kako bi počeli razumijevati ono što znaju, a što to mogu naučiti od drugih. Zatim učenici mogu doći do spoznaje da su došli do odgovora za koji su smatrali da ga nisu znali.* (Nastavnik iz Norveške)

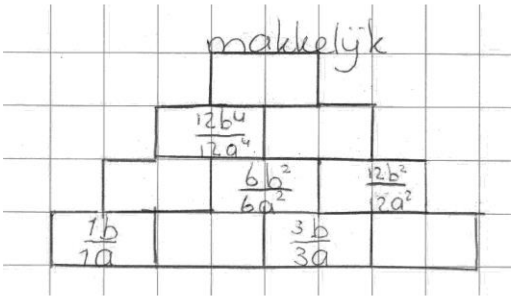
Primjer iz Nizozemske

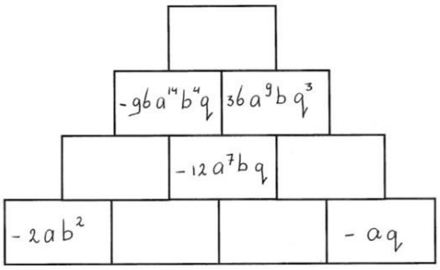
Rad prema načelima IUNM-a uključuje zamjenu uloga kako za nastavnike, tako i za učenike. Nastavnici postaju posrednici učenja, a učenici igraju vrlo aktivnu ulogu. Na primjer, jedna je nastavnica uzela udžbenik matematike te odabrala vježbu iz poglavlja o algebri i smislila nestrukturiranu verziju zadatka. Izvorni se zadatak sastojao od niza piramida, a učenici su trebali zbrajati ili množiti susjedne ćelije kako bi dobili sadržaj gornjih ćelija. U nekim su slučajevima morali razmišljati „unatrag“ kako bi došli do sadržaja donjih ćelija (vidi Sliku 6). Nastavnica je zadatak prilagodila jer je htjela aktivirati sposobnosti učenika i vidjeti što im je bilo jednostavno, a što teško. Prvo je učenicima pokazala jednu takvu piramidu, a zatim je od njih zatražila da otkriju kako je piramida načinjena i mogu li pronaći iznose u praznim ćelijama.



Slika 6. Piramida koju je napravila nastavnica

Učenici su nakon pet minuta i kratke rasprave trebali napraviti slične piramide kao alternativni način rješavanja niza zadataka iz udžbenika. Mogli su koristiti zbrajanje i množenje te su morali osmisliti lagani i teški problem s piramidom. Učenici su tako i postupili, a rezultati su bili izvanredni (vidi Sliku 7). Pokušaji nekih učenika bili su oprezni te su izrađivali piramide koji se bile prilično slične primjeru iz udžbenika, dok su drugi učenici pokušavali pronaći moguće ekstreme. To što su učenici napravili dalo je nastavnici uvid u to koje algebarske izraze razred može pojmiti, a izrazi su obuhvaćali vrlo jednostavne i vrlo komplicirane izraze kao što su, primjerice, razlomci, decimalni brojevi i negativni brojevi.





Slika 7. Jednostavna i teška piramida množenja koju su napravili učenici

Jedan je par učenika tijekom aktivnosti ukazao na pitanje minimalne količine informacija koje moraju biti na raspolaganju prije nego što se može riješiti problem s piramidom. Zatim su se ostale skupine posvetile ovom pitanju, što ih je potaknulo da izrade još složenije piramide. Nastavnica navodi da je primijetila da su učenici na ovaj zabavan način poboljšali razumijevanje algebarskih vještina. Trenutak kada su učenici formulirali pitanje o potrebnoj količini informacija bio je osobito indikativan. Istovremeno su isprobavali mnoge slučajeve u kojima su demonstrirali svoje algebarske vještine te vježbali.

> *Učenici postaju vlasnici matematike, bili su motivirani da se bave matematikom i bolje sam mogla vidjeti njihove mogućnosti.* (Nastavnica iz Nizozemske)

Učenici obično uvježbavaju algebru pomoću jednoznačnih zadataka kao što su „raspiši“ ili „faktoriziraj“ i jednostavno proširuju obrasce bez previše razmišljanja. Kod takvih je zadataka mnogo teže vidjeti s kojima se problemima učenici suočavaju i mogu li učenici koristiti svoje algebarske vještine u novim situacijama. Za nastavnicu je ova promjena ozračja u razredu više nego dobrodošla, ali je ipak navela da je taj proces bio i dalje jest pun izazova. Čini se kako je upoznavanje s novim nastavnim strategijama koje su potrebne za IUNM proces koji zahtijeva vrijeme i pažnju.

Izazovi prilikom primjene IUNM-a

Nastavnici se suočavaju s nizom uvjeta koji ograničavaju svakodnevnu provedbu IUNM-a u učionicama. Glavni su ometajući čimbenici udžbenici matematike koje treba obraditi, dostupno vrijeme za planiranje i provođenje IUNM-a, dostupni resursi i procjena rada učenika.

> *Mislim da su trajanje [sata] i vrijeme za planiranje sata najveći problemi. [...] ako promatramo vrlo, vrlo veliku količinu sadržaja u nastavnom planu i programu, onda je doista teško u sve to uklopiti istraživački usmjereno učenje. Jer u tako malo vremena morate obraditi tako mnogo tema.* (Nastavnik iz Ujedinjenog Kraljevstva)

> *Planiranje sata je zahtjevno. Ako želim da moji učenici aktivno sudjeluju u istraživanju i da sat istinski bude usmjeren na učenika, onda moram u obzir uzeti mnoge varijable i sve pomno isplanirati.* (Nastavnik s Cipra)

> *Naravno da to zahtijeva puno vremena, ali nije to ništa dodatno. Zapravo sam naučio primjenjivati istraživački usmjereno učenje za rad na sadržajima iz*

> *matematike. Učenici uče mnogo temeljitije, a razumiju više.* (Nastavnik iz Španjolske)

Nastavnike također brine i procjenjivanje uspješnosti učenika. Nastavnicima je najbitnije pomoći učenicima da dobro prođu testiranje. Ispiti u školama uglavnom su usredotočeni na sposobnost učenika da nešto reproduciraju. Nastavnici se stoga nalaze pred dvojbom trebaju li svoje učenike pripremati za ispite ili u razredu provoditi IUNM.

> *Moja je primarna zadaća učenike pripremiti za sljedeću vanjsku evaluaciju koja im omogućuje da steknu potvrdu korisnu za budućnost. Oni ne žele više. Ako napravim više, odmah će se usprotiviti. Zatim će mi roditelji reći da nije na meni da to radim.* (Nastavnik iz Njemačke)

Istina je da ispiti i testovi u mnogim zemljama ne nagrađuju izravno učenike za vještine istraživanja i rješavanja nestandardnih problema. Neke su vlade svjesne ovog problema i pokušavaju ga riješiti. Dodatne moguće prepreke za provedbu istraživački usmjerenog učenja odnose se na ponašanje učenika, a neki su je nastavnici spominjali na početku sudjelovanja u PRIMAS-u. Isprva su se pribojavali da bi provođenje istraživački usmjerenog učenja u razredu od 30 učenika moglo biti problematično zbog buke i nemira:

> *Mislio sam: „Nemoguće je to provesti u mojem razredu jer učenici neće razmišljati o aktivnosti, već će tratiti vrijeme, razgovarat će o nečemu drugome, a razina buke bit će nesnošljiva." Onda sam proveo aktivnost i iznenadilo me što su se svi uključili i sudjelovali pa čak i dok su radili u skupinama i pokušavali doći do odgovora.* (Nastavnik iz Španjolske)

Čimbenici koji podupiru provedbu IUNM-a

Podupiranje istraživanja učenika pomoću pomno planiranih pitanja (i drugih vrsta vođenja) važna je zadaća nastavnika koji provodi IUNM. Pod podupiranjem mislimo na uporabu nastavnih pomagala sa značajkama kao što su „uzajamnost" i „iščezavanje". Uzajamnost u ovom kontekstu označava da se podupiranje prilagođava potrebama učenika, a iščezavanje označava da podupiranje postupno nestaje kako napreduje istraživanje učenika. Količinu podupiranja treba prilagoditi razini učenika. Nastavnik može mijenjati aktivnost kako bi se prilagodio slabijim učenicima ili dodatno potaknuo uspješnije učenike. Nastavnici su u promatranim nastavnim satovima postavljali sljedeća pitanja: „Kako biste pojednostavnili ovaj problem ?" „Koje su moguće pretpostavke?" Nakon što su učenici formulirali problem neki su nastavnici zadavali sljedeća pitanja: Možete li smisliti sustavan pristup? Kako najbolje zabilježiti vaše podatke? Neki su tijekom prikupljanja podataka učenike pitali: „Primjećujete li ikakve pravilnosti? Možete li objasniti zašto nastaju?" Nastavnik se prema kraju usredotočava na komuniciranje rezultata: „Kako možete dati jasno i sažeto objašnjenje?" Postavljanje ovih pitanja i dijeljenje odgovora s cijelim razredom podupire proces istraživanja.
Još jedan važan aspekt koji se iskristalizirao tijekom promatranja odnosi se na to da nastavnici moraju stvoriti ozračje u razredu zbog kojeg se učenici neće ustručavati izreći svoje mišljenje i griješiti. Ne samo da se učenici moraju osjećati

sigurno dok postavljaju pitanja, griješe i iznose mišljenje, već isto tako trebaju jasne signale o prihvatljivim oblicima ponašanja.

> *Na primjer, i ja griješim, a učenici na to ukazuju i ispravno izračunaju zadatak. Pohvaljujem ih i njima se to sviđa. Mislim da to također potiče komunikaciju. Ovako to izvodimo: „Da, pogriješio sam. Oprostite. Imate pravo. Učenicima pokazujem da pogreške nisu ništa loše. Stoga se oni ohrabruju da ukažu na pogreške i priznaju ih.* (Nastavnik iz Njemačke)

Gledano unazad glavni aspekti učenja u istraživački usmjerenom pristupu odnose se na poticanje djelovanja učenika tako da im se daju indicije, odgovornost i povjerenje za provođenje istraživanja. Međutim, činjenica da je ova metoda motivirala učenike na satovima matematike i prirodnih predmeta ostavila je posebno upečatljiv dojam na većinu ispitanih nastavnika. Nastavnici govore o tome kako istraživački usmjereno učenje povezuje učenje i zabavu:

> *U istraživački usmjerenom učenju učenici zadatke doživljavaju kao zabavu. Osim toga, sat se razlikuje od normalne tradicionalne nastave pa mu se učenici vesele. U istraživački usmjerenom učenju učenici dobivaju priliku da otkrivaju, prezentiraju rezultate i kažu svoje mišljenje na satu matematike, dok je prije nastavnik bio taj koji je na satu radio baš sve.* (Nastavnik s Malte)

Nastavnici su naglasili kako je važno učenicima objasniti nova očekivanja: da trebaju naučiti aktivno postavljati pitanja, tražiti odgovore, uspoređivati pristupe i provoditi vlastita istraživanja na način da ne moraju stalno tražiti pomoć. Trebaju znati koliko je važno da se nauče zajedničkom radu jer profesionalni znanstvenici i matematičari u svijetu koji ih okružuje rade upravo na taj način.

Zaključci

U ovom se poglavlju opisuju načini provođenja IUNM-a te navode praktična iskustva nastavnika kada je riječ o IUNM-u. Iz ovih je iskustava vidljivo da se nastavnici suočavaju s izazovima dok u svakodnevici pokušavaju provoditi IUNM. Izazovi naglašavaju da su u matematičkom obrazovanju nužne zajedničke vrijednosti, stavovi i ciljevi. Cilj matematičkog obrazovanja nije samo poticanje učenika da uče algoritme i postupke, već treba obuhvaćati sposobnosti kao što su kreativnost, rad s nedostatkom podataka, povezivanje, kritičko mišljenje, suradnja i komunikacija. Zadaci i strategije poučavanja koji su nadahnuti istraživačkim procesima ili koji omogućuju istraživački usmjerene pristupe potiču razvoj ovih kompetencija. Štoviše, nastavnici naglašavaju važnost poticajnih uvjeta na razini škola. Provedba IUNM-a zahtijeva dodatno vrijeme za pripremu i izvođenje nastavnih sati, što zahtijeva podršku kolega i uprava škola.

Izazovi s kojima se nastavnici i učenici susreću dok pokušavaju primjenjivati IUNM ne mogu se prevladati ako su izmjene izolirane i stihijske. Kako bismo stvorili kulturu poučavanja i učenja koja podupire IUNM, važno je da izmjene također budu usklađene sa školskim kontekstom te da doprinose potrebama nastavnog programa.

Iz prethodnih odlomaka možemo sažeti nekoliko važnih točaka. Uspješna provedba IUNM-a zahtijeva:

1. Dostupnost IUNM resursa i to ne kao izoliranih zadataka, već u obliku modula koji demonstriraju kako se matematički sadržaji iz nastavnog programa mogu obraditi na način koji obiluje značajkama IUNM-a;
2. Usklađivanje s institucionalnim uvjetima i ograničenjima, što uključuje prostor i dostupno vrijeme te službeni uvjeti i procjene učenika i nastavnika;
3. Također su poželjni: zajednica nastavnika (barem još jedan nastavnik i po mogućnosti iskusan moderator) za provođenje eksperimenata u razredu, raspravljanje o iskustvima i promicanje profesionalnog razvoja nastavnika; prilike za dijeljenje profesionalnog znanja sa širom zajednicom (npr. na nacionalnoj razini).

Modeli koje je osmislila MERIA oslanjaju se na dva okvira koji se odnose na IUNM, a to su RMO i TDS. Njih ćemo uvesti u poglavljima koja slijede. Važno je naglasiti da se oba modela temelje na desetljećima istraživanja te nije moguće ni potrebno predstaviti sve njihove značajke kako bi se čitatelji mogli samostalno koristiti i planirati module. U popisu referenci nalazi se dodatna literatura za one koje žele produbiti znanje o jednom ili oba okvira.

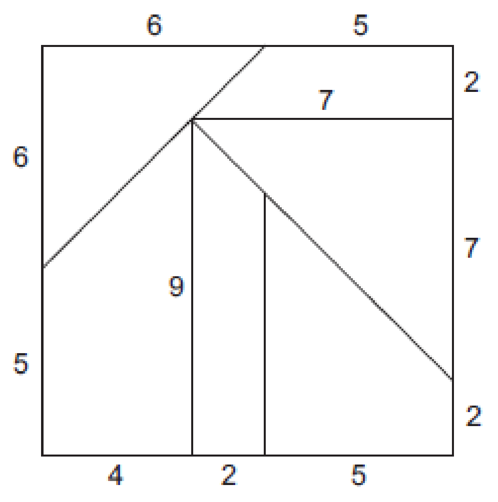
3. Teorija didaktičkih situacija

Uvod

Razmotrimo jedan primjer planiranja nastavnog sata tijekom kojeg će učenici autonomno istraživati i stjecati znanje. Učenici u prijedlogu nastavnog sata otkrivaju poseban slučaj važnoga matematičkog rezultata da slični likovi (neformalno, likovi koji imaju isti „oblik“) imaju proporcionalne odgovarajuće stranice (odnosno, postoji fiksni „faktor promjene mjerila” koji nam omogućuje da odredimo stranice drugog lika ako su nam poznate stranice prvog lika). Ponekad se to naziva Talesovim poučkom. On se, općenito govoreći, može proširiti i na teme koje ne obuhvaćaju samo mnogokute, ali to nije dio nastavnog plana za srednje škole. Iako su slični, likovi koji nisu mnogokuti pojavljuju se u mnogim situacijama u stvarnom životu poput fotografija u raznim veličinama. Zamijetite da u ovoj aktivnosti nije potrebno tumačenje teškog pojma kuta, a ono se možda uopće neće ni pojaviti.

Učenicima se daju sljedeće upute:

Ovo su slagalice (Primjer: „tangram“, Slika 8). Trebate izraditi slične slagalice koje su veće od onih na modelu, a prema sljedećem pravilu: segment čija duljina na modelu iznosi 4 cm na vašoj će reprodukciji iznositi 7 cm. Svakoj ću skupini od po četvero ili petero učenika dati po jednu slagalicu, ali svaki učenik mora izraditi barem jedan dio ili skupina od dva učenika mora izraditi dva dijela. Kada završite, morate rekonstruirati likove tako da budu potpuno isti kao model. (Brousseau, 1997, p. 177).



Slika 8: Slagalica koja se koristila u situaciji sa slagalicom

Učenici započinju s radom bez pomoći nastavnika nakon što im se zada problem. Problem se zadaje učenicima koji su naviknuli na to da iznose uvećavaju zbrajanjem. Međutim, ako učenici svakoj stranici dodaju 3 cm, ne mogu rekonstruirati veću slagalicu tako da slažu dijelove budući da neodgovaraju.

Učenici pokušavaju upotrijebiti prethodno stečeno znanje (uvećavanje zbrajanjem) kako bi riješili problem, ali slagalica ih prisiljava da shvate da prethodni način mišljenja u ovom slučaju nije primjenjiv te da moraju razviti novo matematičko znanje. Ovu prepreku mogu svladati tako da promijene strategiju i upotrijebe množenje kako bi povećali duljine stranica. Važno je da učenici samostalno shvate pojam proporcionalnosti, a posebice je važno da dođu do zaključka da je situacija, a ne nastavnik taj koji zahtijeva množenje.

Nastavnik će u sljedećoj fazi zamoliti sve skupine da formuliraju i predoče rezultate. Od učenika se, primjerice, može zatražiti da prezentiraju i objasne zašto su uvećali svoj dio slagalice. Skupine isto tako izvještavaju o tome odgovaraju li uvećani dijelovi ili ne te što planiraju po tom pitanju.

Kako bi ispravno napravili novu slagalicu, svaki učenik iz skupine mora doći do iste hipoteze da je duljine stranica svih dijelova potrebno pomnožiti faktorom 7/4. Nastavnik je siguran da su učenici postigli željeni cilj razumijevanja proporcionalnosti ako učenici sastavljanjem slagalice potvrde svoju strategiju.

Nastavnik na kraju može na formalan način sažeti pojam proporcionalnosti geometrijskih likova. Osobne ideje učenika tijekom rasprave na satu i završne analize problema postaju dijeljeno znanje slično onome koje se nalazi u raznim materijalima kao što su udžbenici ili internetski resursi.

Plan ove nastavne situacije klasičan je primjer Teorije didaktičkih situacija. U nastavku ovog poglavlja razložit ćemo osnovne pojmove i načela teorije koje ćemo potkrijepiti dodatnim primjerima i smjernicama za korištenje ovog pristupa u učionici.

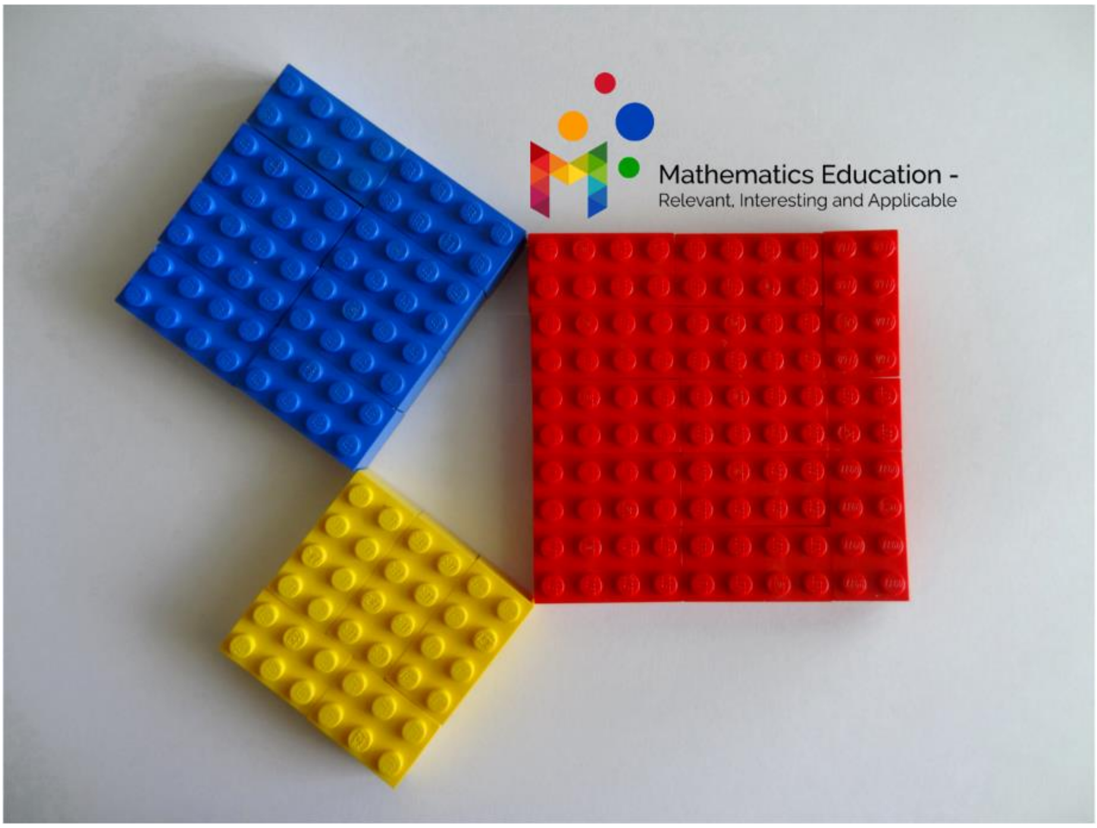
Osobno i institucionalizirano znanje

Teorija didaktičkih situacija (TDS), koju je začeo Guy Brousseau kasnih 1960-ih godina,donosi nekoliko ideja i rezultata koji nastavnicima pomažu da proširuju i razvijaju svoje matematičko znanje dok rade na planiranju i osmišljavanju nastave. TDS podržava poučavanje koje učenicima dopušta da budu istraživači i graditelji matematičkog znanja na način koji uključuje osnovne značajke IUNM-a.

U kontekstu TDS-a iznimno je važno razlikovati dvije vrste znanja:

Institucionalizirano znanje (ponekad se naziva *javno* ili *službeno znanje*) odnosi se na znanje koje se nalazi u udžbenicima, internetskim stranicama, istraživačkim časopisima ili drugim dijeljenim resursima. Ono je sinteza matematičkih aktivnosti koje provode pojedinci, ali su one podložene vanjskoj provjeri nakon čega se objelodanjuju. Matematičko se znanje u takvim resursima organizira jasno i precizno, a razvoj znanja kroz istraživački proces obično nije vidljiv. Zajednica istraživača, nastavnika te ponekad i javnost dijeli i ocjenjuje ovaj deduktivni način prezentiranja matematičkog znanja. Jednostavan primjer je dan iskazom Pitagorinog poučka kao $a^2 + b^2 = c^2$, gdje su a i b katete, a c je hipotenuza pravokutnog trokuta. Danas je ova formula „institucionalizirano znanje" koje nastavnici predaju učenicima i koje se memorira, a ne geometrijski pojam ili objašnjenje iza te formule. Institucionalizirano se znanje ponekad naziva dijeljeno, javno ili službeno znanje.

Osobno znanje označava znanje koje učenici (i ostali) grade u interakciji s matematičkim problemom. Takve se ideje ili znanje često poučavaju implicitno, a povezane su s kontekstom u kojem se razvijaju. Učenici mogu razviti osobno znanje o Pitagorinom poučku tako da se igraju s pločicama u obliku trokuta i kvadrata kao što je prikazano na Slici 9. Očito je kako razvoj gore navedenog službenog oblika zahtjeva više.



Slika 9. Posložene kockice za prikaz Pitagorinog poučka

U primjeru sa slagalicom osobno znanje koje učenici isprava grade odnosi se samo na uspješnost ili neuspješnost specifičnih metoda povećanja dijelova. Cilja se na službeno znanje da ako su likovi A i B slični (imaju isti „oblik“), onda je omjer između odgovarajućih stranica (a/b gdje je a stranica lika A koja odgovara stranici b lika B) stalan. Možda će nekoliko sličnih situacija biti potrebnokako bi se postiglo službeno znanje koje će biti ovako općenito. Najviše što bi se moglo postići na kraju problema sa slagalicom jest suglasje da samo množenje sa 7/4 u tom određenom slučaju daje rezultate.Učenici proširuju osobno znanje kada aktivno rade na matematičkom problemu i razvijaju osobni odgovor na zadano pitanje. Velika je vjerojatnost da će se osobno znanje učenika u određenoj mjeri razlikovati od institucionaliziranog znanja. Dalje će se razvijati i poprimati osobine službenog znanja kako ga se bude dijelilo i o njemu raspravljalo s drugima. Komunikacija s kolegama ili vršnjacima dodatno će razviti i formalizirati početne ideje učenika.

Ključno je da nastavnik zadaje nove probleme za koje je potrebno znanje koje učenici nisu još potpuno svladali te na taj način propituje osobno znanje učenika. Na taj se način potvrđuje osobno znanje. Potvrditi ga može nastavnik, sam problem ili ga se može usporediti s drugim učenicima, primjerice s njihovim strategijama rješavanja problema. Osobno se znanje na taj način transformira i postaje službenije. To znači da znanje postaje bliže onome što smatramo institucionaliziranim znanjem.

Didaktička i adidaktička situacija

TDS razlikuje osobno i institucionalizirano znanje, što nastavniku omogućuje da u nastavni sat uključi istraživačke situacije, odnosno da primjenjuje pristup IUNM-a. IUNM zastupa ideju da poučavanje treba učenicima omogućiti da sudjeluju u aktivnostima koje podsjećaju na aktivnosti istraživača.

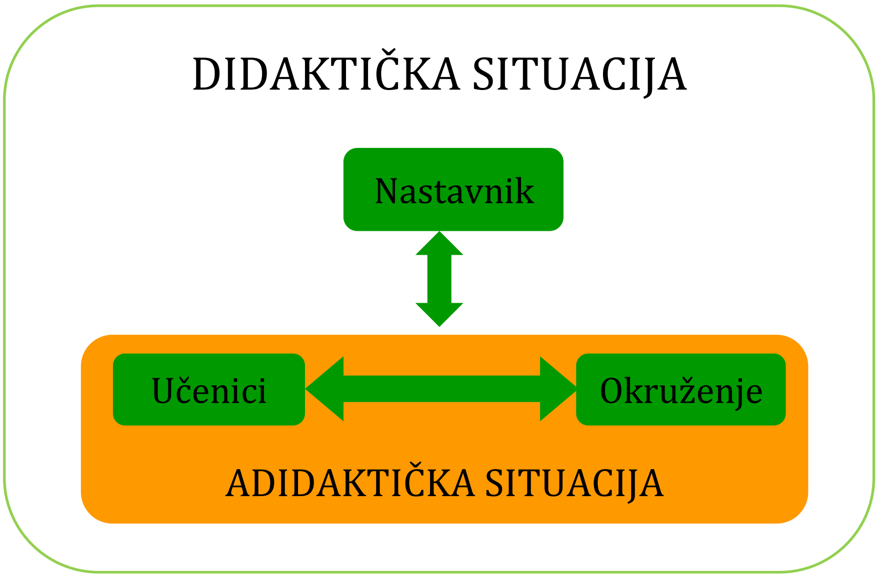
Pojam *didaktičkog okruženja* ključna je sastavnica planiranja takvih situacija. Didaktičko okruženje označava okruženje s kojim je učenik u interakciji kako bi stekao novo znanje. Sastoji se od problema, prethodnog znanja učenika i predmeta kao što su olovka, papir, ravnalo, kalkulator, CAS alati (sustavi za računalnu algebru), slagalica itd. Nastavnik prilikom pripreme sata određuje *ciljano znanje* i stvara odgovarajuće okruženje kako bi učenici stekli to znanje. Međutim, kada je riječ o razvoju nekog dijela znanja, okruženje može biti manje ili više prikladno. Okruženje se u gore navedenoj situaciji sa slagalicom sastoji od slagalice, praznih listova papira, škara, ravnala i prethodno stečenog znanja učenika. Prepreke (epistemološke naravi) s kojima se učenici suočavaju proizlaze iz matematičke prirode problema. Dakle, okruženje nosi golem potencijal da učenici steknu ciljano znanje, a da nastavnik ne treba održati predavanje o proporcionalnosti geometrijskih likova ili načelima sličnosti trokuta. Okruženje kod učenika stvara potrebu da steknu to znanje.

Može se dogoditi da neće svi učenici uzeti u obzir kako će multiplikativna strategija utjecati na očuvanje kuteva iako je to potrebno kako bi se dijelovi spojili u novi veliki kvadrat koji je sličan početnome. Stoga ispravna strategija dovodi do stjecanja ciljanoga institucionaliziranog znanja. TDS pristup poučavanju i učenju često se opisuje u kontekstu igre. Planiranje situacije i pripadajuće okruženje može se usporediti s iscrtavanjem terena za sportski susret i definiranjem pravila igre. Učenici pobjeđuju kada osmisle optimalnu strategiju za igru. Dakle, pobjeđivanje se poistovjećuje s učenjem, a optimalna strategija označava da su učenici razvili željeno znanje i metode. Drugim riječima, igra uvjetuje potrebu za razvojem pobjedničke strategije. Planiranje „terena na kojem će se odvijati“ (situacije) treba obaviti tako da se potencijal učenika da otkriju takvu strategiju dovede na najveću moguću mjeru.

Ako se okruženje dobro osmisli, učenici mogu samostalno s njome biti u interakciji, a nastavnik neće morati pružati dodatne smjernice. *Adidaktičke situacije* su situacije u kojima učenici bez miješanja nastavnika sudjeluju u problemu i istražuju okruženje. Učenici u takvim situacijama razvijaju svoje osobno znanje tako što ga prilagođavaju problemu na kojem rade putem dodatnih istraživačkih situacija i testiraju ideje u okruženju ili tako što formuliraju argumente dok pokušavaju uvjeriti svoje kolege.

Didaktičke situacije odnose na situacije kada nastavnik ima izravnu interakciju s učenicima kako bi pospješio učenje nekoga specifičnog sadržaja. *Didaktički* se odnosi na *ciljani čin tijekom kojeg netko određeno znanje dijeli s drugima*. Jedna od glavnih funkcija didaktičkih situacija jest da iniciraju, reguliraju i moderiraju adidaktičke situacije, da osiguraju da izgrađeno znanje postane dijeljeno, potvrđeno te da (relevantne strane) priznaju da je takvo znanje „točno“. Kao što vidimo u Slici 10, to znači da se didaktičke situacije sastoje od interakcije nastavnika s adidaktičkim situacijama. Naravno da bi adidaktičke situacija trebale u manjem ili većem obimu obilovati potencijalima od tihog slušanja preko objašnjenja nastavnika do aktivnog sudjelovanja u bogatoj situaciji problema. Adidaktičke situacije za učenike imaju najveći potencijal učenja jer učenici mogu razviti svoje osobno znanje koje onda kroz didaktičke situacije može postati dijeljeno znanje. Drugim riječima, potencijal za učenje leži u dijalektici između adidaktičkih i didaktičkih situacija ili između osobnog i dijeljenog znanja. Slika 10 također pokazuje kako didaktičke situacije u svojoj cjelini sadrže „dvostruku igru“: igra učenika s okruženjem (adidaktičke situacije) te igra nastavnika s adidaktičkim situacijama (koje on planira, predaje i regulira). Slika posebice pokazuje da se u adidaktičkim situacijama ne podrazumijeva da nastavnika nema ili da on nema aktivnu ulogu. Spontano samoučenje nije adidaktička situacija; ono je ne-didaktičko.

Adidaktičnost je poseban fenomen unutar didaktičkih situacija: osoba koje želi podijeliti neko znanje može se namjerno povući iz interakcije kako bi učeniku pustila da djeluje na način koji je koristan ili čak nužan kako bi stekao znanje. Ovo je vrlo općenit fenomen i on uopće nije rezultat TDS-a; u većini didaktičkih situacija zamjetni su neki elementi adidaktičnosti. Naravno, kvaliteta autonomnih postupaka učenika ovisi o okruženju.



Slika 10: Didaktičke situacije kao dvostruki međuodnos

Uloga nastavnika

Važno je razjasniti na koji se način uloga nastavnika u planiranju na temelju TDS-a razlikuje od onoga na što je većina nastavnika naviknuta u svojem svakodnevnom radu.

Nastavnik u najčešćem obliku poučavanja matematike prvo uvodi novi pojam, metodu ili poučak. Zatim na primjeru pokazuje kako koristi novo znanje, a učenici nakon toga oponašaju nastavnik i rješavaju slične zadatke. Nastavnik naposljetku procjenjuje rad učenika. Nastavnik u ovom pristupu počinje tako da institucionalizira institucionalizirano znanje. Ne postoji okruženje za istraživanje od strane učenika. Ako i postoji, radi se o lošem okruženju u kojem nema mjesta za istraživačke procese učenika s obzirom na to da je očito kako je najbolja strategija oponašati ono što radi nastavnik. Učenici su aktivni dok rješavaju zadatke i vjerojatno u bilježnicama formuliraju odgovore, ali to nije istraživanje budući da već znaju koja je ispravna metoda (pod pretpostavkom da su uopće slušali). Potvrđivanje u potpunosti ovisi o nastavniku koji prihvaća ili odbacuje odgovore učenika. Nastavnik je u takvom okruženju izvor svega istinskog znanja; učenici samo usvajaju i slijede primjer koji im je nastavnik dao.

Ovakav pristup ima određene nedostatke. Kada primijenimo institucionalizaciju na početku nastave, odnosno učenicima se pruži sve relevantno službeno znanje i od njih se samo traži da ga „primijene“ na posebnim slučajevima, tada učenici možda neće steći odgovarajuće osobno znanje, a u nekim će slučajevima samo usvojiti službeno znanje kao taktiku rješavanja određenih zadataka koje zadaje nastavnikili su uvršteni u ispit. Mogu zadržati proturječne ideje i poimanja, što uključuje i pogrešna shvaćanja. To podriva potencijal racionalnog procesa stjecanja znanja koje je, kao što vidimo na Slici 11, u dijalektici smješteno između osobnog i institucionaliziranog znanja. Kada učenici razmišljaju, razgovaraju i pišu o vježbi, oni tada pokušavaju raditi ono što učitelj nagrađuje i od njih očekuje čak i kada nemaju predodžbu što to znači ili zašto se radi na taj način. Ishod učenja prilikom ponavljanja strategije rješavanja može biti iznenađujuće loš budući da on potpuno ovisi o površnom prepoznavanju zadatka na koji se strategija primjenjuje. Većina je učitelja iz prve ruke posvjedočila apsurdnim slučajevima kada učenicima primjena ovog pristupa ne polazi za rukom.

S druge strane, ako se jasno prizna da je javno ili institucionalizirano znanje istovjetno znanju koje su učenici samostalno izgradili dok su radili na odgovarajućem broju problema (u adidaktičkim situacijama), onda će javno znanje doživljavati kao racionalno i utemeljeno te će ga jednostavnije prenositi na nove vrste problema budući da će znati na čemu se takvo znanje temelji. Međutim, nastavnik će morati raditi više od pukog pričanja i uvježbavanja ako želi postići bolje rezultate. To od nastavnika matematike zahtijeva mnogo više nego što se obično očekuje.

Sukladno TDS-u, uloga nastavnika jest da osmisli ili odabere situacije u kojima učenici mogu razviti osobno znanje koje odgovara institucionaliziranom znanju, uključujući obrazloženja potonje vrste znanja. Nastavnik isto tako mora stvoriti cikličnu dijalektiku koja je prikazana u Slici 11: kako bi ih naučio novom znanju, nastavnik osmišljava i prenosi matematičku situaciju u kojoj učenici mogu steći vlastito osobno znanje. Osim toga, nastavnik mora učenicima pomoći da ovo znanje podijele u javnoj domeni učionice kako bi se ono naposljetku moglo uskladiti s novim znanjem koje učenici trebaju usvojiti. Nastavnici moraju poznavati ne samo ili prvenstveno institucionalizirano znanje, već isto tako i *situacije koje učenike potiču da to znanje usvoje*.

Slika 11: Međuodnos osobnog i institucionaliziranog znanja u didaktičkoj situaciji

Didaktički ugovor

Snalaženje u istraživački usmjerenim situacijama može biti izazovno čak i za iskusne nastavnike jer oni ne trebaju učenicima prenijeti službeno znanje i kontrolirati usvajanje znanja, već moraju učenike usmjeravati dok oni samostalno grade znanje. Kada nastavnik zna točna rješenja i promatra učenike kako krivo ili nepovoljno pristupaju problemu, doista je teško suzdržati se da ih ne ispravi ili usmjeri na najbolju strategiju. Iznimno je važno da nastavnik zna koje dijelove znanja učenici mogu usvojiti u adidaktičkim situacijama (bez miješanja nastavnika), a koje nastavnik smije izravno institucionalizirati. Učenici i nastavnici imaju u nastavnoj situaciji međusobna očekivanja kada je riječ o njihovim ulogama i odgovornostima u razredu. Ova očekivanja zajednički nazivamo *didaktičkim ugovorom* situacije. Ovdje se ne radi o pravom pisanom ugovoru, ali učinci koje ima na radnje nastavnika i učenika ipak su zamjetni. Kada učenici, primjerice, zamole nastavnika da im kaže je li njihovo rješenje linearne jednadžbe točno, oni tako pokazuju svoje očekivanje da oni (još) ne snose odgovornost za provjeru točnosti ovog izračuna. Nastavnik može postupiti tako da iskaže svoje mišljenje ili može pokušati prilagoditi ovaj dio ugovora i osmisliti igru za učenike koja će se baviti novim problemom (koje sve tehnike postoje kako bi se provjerilo je li predloženo rješenje linearne jednadžbe točno).

Ako su učenici otpočetka navikli da im nastavnik daje odgovore, može se pojaviti određena frustracija kada dobiju otvorene istraživački usmjerene aktivnosti. Učenici će u takvim situacijama često od nastavnika tražiti da im kaže koja je očekivana strategija. Nastavnik se može naći u iskušenju da učenicima objasni što moraju činiti jer je to očito jednostavnije za sve. Međutim, kao što smo već rekli, to će uništiti dugoročni potencijal nastavne situacije. U cilju sprječavanja takvih frustracija pomaže ako se učenicima na početku objasni da će se poučavanje promijeniti te da se od njih očekuje da sudjeluju u rješavanju problema čak i ako osjećaju da za to nisu spremni.

Kada učenici naposljetku krenu shvaćati da je institucionalizacija nastavnika samo reformulacija osobnog znanja koje su samostalno izgradili, tada će imati osjećaj da je ono što su radili bilo bitno i smisleno te će postupno prigrliti svoje nove uloge i odgovornosti. Brojni dokazi idu u prilog tome da će učenici s vremenom općenito razviti pozitivniji odnos prema matematici: više je neće doživljavati kao besmislen i beskrajan skup gotovih rješenja, već kao racionalnu, izazovnu i uzbudljivu aktivnost kakvom je, između ostaloga, doživljavaju profesionalni istraživači.

Faze didaktičkih situacija

Ideja TDS-a jest da se stvaraju situacije koje se bave dobro znanim preprekama za neko matematičko znanje te koje kod učenika dovode do potrebe da razviju ili izgrade novo matematičko znanje. Dizajn i kalibriranje takvih situacija ključni je element TDS-a i njegovog „didaktičkog inženjeringa“.

Nastavne se situacije mogu organizirati u pet faza. Svaku od njih ćemo opisati i dati napomene o ulozi koju imaju u učenju. Redoslijed faza nije strogo zadan, a kasnije ćemo dati pregled. Na dva ćemo primjera prikazati sve faze. Prvi je situacija sa slagalicom koju smo naveli u uvodu, a drugi je slavna *Utrka do 20*:

Učenici igraju igru, a pobjednik je onaj igrač koji prvi dođe do broja 20. Dva igrača igraju jedan protiv drugog. Jedan igrač započinje tako da odabere broj 1 ili 2. Drugi igrač zbraja prethodni rezultat s 1 ili 2, a oba igrača teže ka tome da prvi kažu 20.

Cilj Utrke do 20 jest naučiti da dijeljenje daje odgovore na novu vrstu problema te da se učenici rano upoznaju s dokazima (kako bi obrazložili „pobjedničke strategije"). Preciznije govoreći, od učenika se očekuje da zaključe i obrazlože da su svi pobjednički brojevi 20, 17, 14, … , 2 (brojevi koji su manji od 20, a čiji ostatak nakon što ih se podijeli s 3 iznosi 2). Eksperimentiranje s ovom situacijom potvrđuje da učenici zaključuju da su ovi brojevi djelomična pobjednička strategija i to tim redom, a zatim postupno izrađuju finalnu strategiju (ostatak nakon dijeljenja s 3). Dok to rade, učenici se zapravo upoznaju s nekim osnovnim načelima modularne aritmetike, kao što je (matematičaru) posebna klasa kongruencija.

Faza primopredaje (devolucije)

Prva faza zove se faza primopredaje (devolucije). Općenito govoreći, devolucija označava prijenos ili spuštanje nečega na nižu razinu. Primopredaja (devolucija) je u TDS-u polazišna točka. Nastavnik u ovoj fazi uvodi problem i objašnjava pravila rješavanja. Nastavnik, drugim riječima, okruženje predaje učenicima. Ako se poslužimo rječnikom igara, nastavnik opisuje teren i pravila igre. Važno je provjeriti jesu li učenici razumjeli pravila i mogu li sudjelovati u navedenim aktivnostima nakon što završi faza primopredaje. U situaciji sa slagalicom očito je da učenici igru igraju tako da naprave nove dijelove i izrađuju uvećanu slagalicu. Nastavnik u ovoj fazi ne pomaže više od toga. Nastavnik u fazi primopredaje Utrke do 20 objašnjava pravila, ali i igra igru s jednim učenikom kako bi na ploči demonstrirao način igranja igre. O konkretnom problemu i situaciji ovisi hoće li nastavnik odlučiti predati okruženje kroz primjer aktivnosti ili će jednostavno objasniti okruženje s njegovim pravilima i predmetima.

Faza djelovanja

Učenici u fazi djelovanja samostalno rade na problemu. Učenici će u situaciji sa slagalicom ispočetka upotrijebiti prethodno iskustvo s matematičkim problemima te će veličine svih stranica geometrijskih likova koje su dobili povećati tako da im dodaju 3 cm. Korištenje prethodno stečenog znanja i iskustva logična je početna pretpostavka pa čak i ako se pokaže da je pogrešna.

Učenici u primjeru igre Utrka do 20 moraju igrati s osobom koja sjedi pored njih. Ispočetka će učenici raditi na temelju „pokušaja i pogreške" te neće imati neku eksplicitnu strategiju. Međutim, kako igra postupno napreduje, pokazat će se da pobjeđuje osoba koja kaže 17 i to bez obzira na to s čime drugi igrač zbroji 17.

Ovim je dvama primjerima zajedničko to što sadrže bogato okruženje koje podupire učenike u razvoju nekoga osobnog znanja o problemu na čijem rješavanju rade. Znanje u ovoj fazi može biti prilično implicitno i rudimentarno, a učenicima može biti teško (možda i nemoguće) formulirati pretpostavke tijekom radnje koje izvode. Učenici se oslanjaju na prethodno stečene heurističke kompetencije, ali ih istovremeno dodatno razvijaju. Možemo reći da ova faza nalikuje prvotnom pristupu istraživača kada se susretne s otvorenim problemom. Možda će znati pravila igre ili okruženja u vidu definicija, lema i teorema u području koje istražuju te opće prihvaćene matematičke tehnike koje se odnose na to područje. Ali i dalje će se možda samo igrati s pretpostavkama te neće imati točno „teorem“ koji će dokazati.

Faza formulacije

Učenici u fazi formulacija moraju predstaviti što su radili u fazi djelovanja; inicijalne ideje, hipoteze ili jednostavno što su do sada isprobali. U razredu se to može provesti na razne načine, ali nije uvijek dovoljno samo od učenika tražiti da sudjeluju u razrednoj raspravi. U prvom redu uvijek postoji nekoliko istih učenika koji su željni sudjelovati u raspravi. To je problematično ako želimo da svi učenici sudjeluju u istraživački usmjerenom učenju. Komunikacija i osobne hipoteze moraju se u IUNM-u dijeliti te ih moraju komentirati vršnjaci kako bi se formaliziralo osobno znanje svakog učenika, a ono se počinje stvarati u glavama učenika dok na problemu rade u određenom okruženju. To znači da svi učenici moraju formulirati svoje osobne ideje te ih prezentirati i tijekom faze formulacije. Često se to može provesti u manjim skupinama.

Prikupljanje dijelova u situaciji sa slagalicom čini fazu formulacije tijekom koje svaki učenik prezentira i obrazlaže svoju strategiju izrade novog dijela slagalice. Ako učenike promatramo kao cjelinu, od njih se očekuje da shvate da dijelovi ne odgovaraju. To će učenike potaknuti da povedu raspravu o već isprobanim strategijama, a možda će imati neke nove ideje o drugim mogućim pristupima. Čak i ako je jedan učenik odmah na početku došao do točne strategije, mora pomoću razumljivih i prihvatljivih matematičkih argumenata uvjeriti ostatak skupine.

Faza formulacije se u primjeru s igrom Utrka do 20 odvija kao nova runda igara tijekom koje svaki susjedni tim od dva člana igra protiv drugog tima. Postizanje suglasnosti oko zajedničke strategija prisiljava učenike da dijele osobno znanje i međusobno se uvjeravaju u to koja je najbolja strategija za njihov tim. Verbalizacija iskustva i ideja smatra se početnim korakom prema stvaranju institucionaliziranog znanja. Svrha faze formulacije jest da se stvori situacija u kojem okruženje ili pravila igre navode učenike da iznose iskustva i ideje koje su stekli prilikom rješavanja problema, a time započinje izgradnja elemenata matematičke teorije.

Faza potvrđivanja

Učenici u fazi potvrđivanja testiraju svoje strategije i hipoteze u odnosu na okruženje. To znači da je rad učenika moguće provjeriti, a da im nastavnik ne govori jesu li bili u pravu ili krivu. Ako su situacija i okruženje dovoljno poticajni, matematički će problem u određenoj mjeri učenicima dati odgovore što se tiče opstojnosti njihovog odgovora ili strategije.
U primjeru sa slagalicom okruženje je osmišljeno tako se dijelovi slagalice ne mogu spojiti u uvećanu verziju izvorne slagalice ako učenici koriste zbrajanje ili *bilo koju drugu metodu* umjesto množenja. Prema tome, ako se učenici isprva odluče za manje produktivnu strategiju, u fazi potvrđivanja shvatit će da je njihova ideja bila pogrešna te da trebaju primijeniti drugu strategiju koju kasnije isto tako mogu potvrditi. Treba istaknuti da učenici moraju biti sposobni razumjeti produktivnu strategiju. Ako učenici „zapnu" na problemu bez ideje o tome što i kako napraviti, to će svakako biti kontraproduktivno kada je riječ o razvoju matematičke znatiželje i radoznalosti.

Potvrđivanje se u igru Utrka do 20 uglavnom svodi na strategiju koja svaki put vodi do pobjede. Pretpostavlja se da pobjednik ima najbolju strategiju rješavanja. Ako to nije slučaj, oba tima mogu osmisliti optimalnu strategiju. Ili oba tima igraju bez prave strategije. Čak i ako pobjednički tim ima najbolju strategiju, može biti da nisu od samoga početka igre razvili optimalnu strategiju. Nastavnik tada može odlučiti da razred podijeli na dvije veće skupina te ih zamoliti da pripreme optimalne strategije i igraju jedni protiv drugih. To možemo smatrati dodatnom fazom formulacije u kojoj se učenici međusobno pokušavaju uvjeriti u svoje strategije. Zatim se može odviti završni ogled u kojem će se pobjednička strategija dokazati kao najbolja te, uvjetno rečeno, potvrditi.

Faza institucionalizacije

Faza institucionalizacije posljednja je faza, a osobno znanje u ovoj fazi postaje institucionalizirano znanje. Nastavnik je taj koji najčešće provodi ovu fazu tako što prikuplja ideje, sažima glavne dijelove dijeljene strategije i prezentira ih kao objedinjenu optimalnu strategiju. Institucionalizirani će se sadržaj često prezentirati kao matematičko znanje, a bit će precizno i sažeto kao u udžbenicima.

Nastavnik u situaciji sa slagalicom može uvesti neformalnu ideju o sličnim likovima te reći da je „jedan uvećana verzija drugog" (ako nema uvećanja, onda se radi o „istom obliku i veličini), a nastavnik upotrebljava način izražavanja koji nalikuje službenim smjernicama ili materijalu iz udžbenika za poučavanje na određenoj razini. Činjenica da su stranice proporcionalne izražena je množenjem sa zajedničkim faktorom (7/4), a eksperiment je pokazao da se dobije uvećana slagalica koja je slična izvornoj. Govoriti o preslikavanjima je napredniji način pokazivanja odnosa između izvornih i uvećanih likova, a može biti prenapredan za četrnaestogodišnjake. Poanta je u tome da se matematičko znanje stvara na temelju iskustva i mišljenja umjesto da ga se prezentira kao gotovu činjenicu. U određenom je smislu to još teže postići na razini kada učenici još uvijek nisu sposobni shvatiti formalne definicije i argumente.

Pobjednička strategija je ono što se institucionalizira u primjeru s igrom Utrka do 20. To se može smanjiti na popis brojeva koje igrač treba reći kako bi se kontroliralo igru i pobijedilo. Kao što se prethodno spomenulo, broj 17 je važan, a učenici možda neće imati previše problema da dođu do tog zaključka. Pobjednički brojevi ili strategija mogu se zapisati kao brojevi $p=3n+2$, gdje n označava broj neke runde u kojoj je p pobjednički broj. Ako na početku odaberete broj 2, cijelo vrijeme možete imati kontrolu. Nastavnik će možda stalno trebati poticati učenike da poboljšavaju dobitnu strategiju ako želi da učenici dođu do te spoznaje. Ovisno o razini na kraju se može analizirati apstraktnija verzija igre „Utrka do N dodavajući jedan od brojeva 1, 2, … , n u svakoj etapi”. I ubrzo se dolazi do modularne aritmetike.

Količina matematičkih pojedinosti koje nastavnik daje učenicima treba u ovoj fazi biti usklađena s aktivnostima u kojima učenici sudjeluju. Ona bi trebala biti sinteza znanja koje su učenici stekli kako bi prepoznavali i povezivali svoje osobno znanje sa znanjem koje se institucionalizira i smatra dijeljenim znanjem razreda.

Važno je da se ova faza ne pretvori u predavanje koje će poništiti radnje učenika. Institucionalizacija bi trebala biti nastavak stvaranja znanja učenika o određenom problemu. Ako nastavnik počne s predavanjem o temama koje su šire od onoga na čemu su učenici radili, postoji opasnost da učenici svoje radnje protumače kao izgovor da nastavnik krene s predavanjem o temama koje su doista bitne. Učenici u tom slučaju neće cijeniti ili provoditi matematička istraživanja ili samostalnu izgradnju znanja, već će oponašati način na koji se nastavnik bavi matematikom.

O važnosti adidaktičkih situacija

U nastavnim situacijama kada učenici na napreduju prema očekivanjima, nastavnik može doći u iskušenje da prijeđe na faze u kojima on kontrolira situaciju. Kao što je već rečeno, to uništava potencijal učenja. Primopredaja (devolucija) i institucionalizacija su didaktičke situacije. Djelovanje je adidaktička situacija, a preostale dvije faze su negdje u sredini; no treba težiti ka tome da adidaktičke komponente imaju najveću moguću ulogu. Elementi adidaktičkog potvrđivanja - bez nastavnika kao posrednika - često su ključni kako bi se omogućilo da učenici steknu potpuno racionalan odnos prema ciljanom znanju umjesto pristupa pokušaja i pogreške u kojem je reakcija nastavnika jedini kriterij ispravnog pokušaja. Općenito govorimo o *adidaktičkom potencijalu* didaktičke situacije, odnosno potencijalu da učenici samostalno rade na matematičkom problemu i na temelju toga steknu ciljano znanje. Za nastavnike je važna ideja da traže načine realizacije punog adidaktičkog potencijala situacije putem donošenja odgovarajućih odluka u fazi primopredaje (devolucije) te da predano okruženje pomno prilagođavaju sposobnostima učenika (naravno, tako da pri tome ne trivijaliziraju problem).

Sažetak faza

Slikom 12 dan je pregled pet faza koje čine didaktičke situacije.

	Uloga nastavnika	Uloga učenika	Okruženje	Situacija
Primopredaja (devolucija)	Uvodi, predaje okruženje	Primaju, pokušavaju se uhvatiti u koštac s problemom	Uspostavlja se	Didaktička
Djelovanje	Promatra i zapaža	Djeluju i zapažaju	Problem se istražuje	Adidaktička
Formulacija	Organizira, po potrebi potiče pitanjima	Formuliraju što preciznije moguće	Otvorena rasprava	Adidaktička ili didaktička
Potvrđivanje	Sluša i po potrebi procjenjuje	Raspravljaju, pokušavaju pratiti tuđe argumente	Vođena rasprava	Često didaktička
Institucionalizacija	Prezentira i objašnjava	Slušaju i zapažaju	Instituciona-lizirano znanje	Didaktička

Slika 12: Pregled faza TDS-a, njihovog funkcioniranja i djelovanja sudionika u poučavanju i učenju (prijevod iz Winsløwa, 2006., str. 140)

Kao što smo naveli na početku, ovih se pet faza ne koristi samo kao instrumenti za osmišljavanje koji se primjenjuju samo za nastavu koja se temelji na TDS-u. Faze se mogu primijeniti za analizu bilo koje nastave matematike (primjerice, kako bi se odredilo nedostaju li neke faze ili nisu dovoljno razvijene). Čak i ako se nastava uvelike razlikuje od toga što smo opisali u ovom poglavlju, ove faze još uvijek možemo primijeniti za analizu nastave. Za nastavnike su one važan instrument raspoznavanja bitno različitih dijelova njihove nastave koji imaju zasebne uloge i učinke na učenje učenika.

Dinamična uporaba faza

Iz dvaju jednostavnih primjera koje smo navodili tijekom pregleda faza jasno proizlazi kako je svaki osmišljen tako da didaktičko okruženje podupire djelovanje učenika, omogućuje im da eksperimentiraju i formuliraju hipoteze (kako ispravne, tako i pogrešne) te im pruža uvjete koji su povoljni za potvrđivanje takvih hipoteza. Konkretnije govoreći, nemoguće je sastaviti slagalicu ili će učenici gubiti u nekim igrama. Ove dvije situacije pomalo su rigidnije tumačenje faza i načina na koji su povezane. Što će se dogoditi ako nastavnik preda okruženje s problemom koji učenici neće moći riješiti?

Naravno da je prilikom planiranja nastave matematike važno imati uvid u znanje koje učenici već posjeduju. Nastavnici to mogu napraviti na temelju nastavnog programa matematike za srednje škole, udžbenika po kojem je razred prije radio ili drugih resursa koji definiraju očekivane ishode. Međutim, čak ako su učenici nešto trebali već usvojiti, dobro je u sklopu faze primopredaje (devolucije) „provjeriti" što su učenici zapravo zapamtili na prethodnim satovima.

To se izravno može provjeriti tako da se učenicima postavi pitanje poput: Sjećate li se Pitagorinog poučka? U tom slučaju postoji opasnost da učenici neće htjeti ili se boje priznati da se ne sjećaju poučka. Neki će učenici to napraviti kako bi odobrovoljili nastavnika. Drugi se boje da će se „osramotiti". Možda bi bolje bilo pitati: Što znate o pravokutnim trokutima? Ako ne spomenu očekivano znanje, nastavnik će morati učenicima zadati novi problem prije nego što preda prvotni problem i okruženje. Ovaj bi novi problem trebao učenicima omogućiti da ponovno steknu znanje koje su možda zaboravili te stvore dijeljenu polazišnu točku tako što će rekonstruirati znanje za koje se očekivalo da ga već posjeduju.

Sličan se problem može pojaviti tijekom faze djelovanja: učenici mogu pogrešno shvatiti primopredaju (devoluciju). U primjeru sa slagalicom ništa ne znaju o drugim načinima povećanja duljina stranica likova osim zbrajanja. Načini svladavanja takvog izazova u nastavnoj situaciji ovisi o tome koliko učenika neće moći sudjelovati u problemu te o općim matematičkim postignućima učenika. Nastavnik je zasigurno promislio o tome kako regulirati okruženje u takvim situacijama. Postoji opasnost da se samo preda ciljano znanje koje bi učenici trebali izgraditi. Nastavnik u situaciji sa slagalicom može započeti fazu formulacije u kojoj učenici dijele preliminarne ideje, a zatim radi tablicu u koju će u jednom redu bilježiti duljine stranica iz slagalice, a u drugom uvećane duljine stranica. Tako se može stvoriti ideja da postoji više „metoda" povećanja kao rudimentarna ideja funkcija. Postoji više izračuna da bi 4 postalo 7. Može se pojaviti i raspraviti ključno pitanje, a to je: Što će se dogoditi sa stranicom duljine 1? Postaje li zaista 1+3=4 nakon uvećanja? Činjenica da se stranica duljine 4 sastoji od četiri dijela duljine može biti indikativna; četiri uvećanja stranice duljine 1 zajedno bi trebala tvoriti stranicu duljine 7. Takvo bi razmišljanje, kojeg bi u najvećoj mogućoj mjeri trebali razviti sami učenici moglo dovesti do toga da čak i učenici koji na početku nisu imali nikakvu ideju razviju drugačiji pristup ovom problemu. To znači da se faze mogu koristiti dinamično na kontroliran način. Ovisno o radu učenika na problemu i sudjelovanju u okruženju, bilo bi poželjno vraćati ili pomicati faze kako bi se osiguralo da svi djeluju i razviju određeno osobno znanje o dotičnom problemu. Međuodnos osobnog i dijeljenog znanja ključna je dinamika koja se može kontrolirati sustavnom i planiranom uporabom faza.

Razrađeniji primjer za srednje škole

U ovom ćemo odjeljku dati primjer plana nastave na temelju TDS-a gdje je cilj učenja „uvesti ideju i neke metode optimizacije“. Ovo je problem na kojem bi

> Dobili ste konop duljine 1 m. Konop treba podijeliti na dva dijela. Od jednog će se dijela napraviti kvadrat, a od drugoga jednakostranični trokut. Pitanje je gdje prerezati konop kako bi dva geometrijska lika zajedno zauzimala najmanju površinu?

učenici trebali raditi:

Jedna strategija dovodi do teoretski dobivenog, točnog odgovora koji je nepotpun. Ona ipak zahtijeva priličnu količinu algebarskih operacija koje se temelje na znanju koje učenici posjeduju o geometriji ili regresiji. U oba slučaja postaje jasno da je potrebna nova metoda za rješavanje problema optimizacije.

Okruženje se sastoji od problema, samih konopa (npr. pet konopa po skupini), ravnala, škara te eventualno kalkulatora ili računala. Nastavnik započinje fazu primopredaje (devolucije) tako što razredu postavlja pitanje: „Što znate o površinama geometrijskih likova?“ Pretpostavlja se da će to učenike podsjetiti na formule za površinu kvadrata i trokuta:

$A_{kvadrat} = s^2$ (gdje je s duljina stranice),

$A_{\text{trokut}} = \frac{1}{2}av$ (v je visina, dok je a duljina osnovice)

$A_{\text{trokut}} = \frac{1}{2}ab\sin C$ (gdje su a i b duljine stranice trokuta, dok je C kut između stranica).

Mogu se obraditi i drugi likovi. Učenici se dijele u dvije skupine nakon što podijele institucionalizirano znanje o ovom području. Svaka skupina dobiva pet konopa, škare i ravnalo. Ako žele, mogu koristiti kalkulatore ili računala. Problem se sada predaje skupinama. Cijela je faza didaktička situacija u kojoj nastavnik moderira dijalog na razini razreda.

Učenici u fazi djelovanja počinju raditi na problemu. U toj se fazi može odabrati nekoliko strategija, a mi ćemo spomenuti tri. Neki se učenici mogu odlučiti za strategiju „pokušaja i pogreške“, što znači da će prerezati konop i napraviti dva lika, izmjeriti i izračunati površinu kvadrata i trokuta. Isti se konop može upotrijebiti kako bi se napravila dva para likova. Zatim se prereže sljedeći konop pa ponovno slijedi mjerenje itd. Učenici naposljetku mogu na temelju iskustva shvatiti gdje je optimalno napraviti rez. Drugim skupinama može pasti na pamet da mjere koriste kao podatke. Ti se podaci mogu prikazati pomoću računalnog programa, grafičkog kalkulatora ili nacrtati olovkom na papiru, čime će se dobiti grafički prikaz mjesta reza te zbroj površina. Ako se podaci pravilno odaberu tako da obuhvaćaju cijeli konop uključujući minimalnu točku, dobit ćemo parabolu. Ako se podaci unesu u računalni program, učenici regresijom mogu doći do formule funkcije koja opisuje podatke. Ovisno o strategiji i dostupnim alatima, učenici mogu pronaći minimum funkcije površine tako da procijene najmanju

y -vrijednost na temelju mjesta točke u koordinatnom sustavu. Ako učenici koriste olovku i papir, mogu nacrtati aproksimaciju parabole koja će opisivati podatkovne točke. Ako učenici koriste grafički kalkulator ili računalni program, mogu pomoću regresije pronaći formulu koja opisuje odnos između površine i mjesta na kojem režu konop. Učenici korištenjem računalnih algebarskih sustava mogu u programu analizirati graf i pronaći ekstrem funkcije ili to jednostavno napraviti tako da promotre graf. Ako su učenici ispravno napravili regresiju, dobit će formulu oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje je f površina, a x duljina jednog komada površine, a najmanja ukupna površina u ovom je slučaju dana izrazom

$$y = -\frac{b^2-4ac}{4a},$$

što odgovara

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Razumije se da su učenici koje odaberu potonju strategiju morali dobiti znanje o polinomima (drugog stupnja), parabolama i računanju njihovih ekstrema.

Druge će skupine problem razmatrati kao algebarski problem. Ako je konop duljine 1 m jednak četirima stranicama kvadrata, $4s$, i trima stranicama trokuta, $3t$, dobivamo jednadžbu $1 = 4s + 3t$. Učenici tako ukupnu površinu mogu izraziti kao

$$A_{\text{ukupno}} = A_{\text{kvadrat}} + A_{\text{trokut}}.$$

Ova je funkcija polinom drugog stupnja kojem se može pronaći najmanju vrijednost istim metodama kao da se odabralo gore opisanu strategiju regresije. Ova faza je adidaktička. Nastavnik se suzdržava od miješanja u rad skupine, ali im može pomoći tako da im po potrebi daje smjernice što se tiče rukovanja računalnim algebarskim sustavom, kalkulatorom ili drugih praktičnih problema. Nastavnik istovremeno dobiva uvid u to koju su strategiju odabrale pojedine skupine ili s kojim se izazovima skupine suočavaju tijekom istraživanja. Ovaj konkretan primjer dočarava bit otvorenog pristupa u kojem učenici dobivaju problem s mnoštvom strategija rješavanja, a sve strategije vode ka jednom odgovoru.

Učenici nakon prve kratke faze trebaju prezentirati svoje strategije za rješavanje problema. Usmeno izražavanje postupaka pomaže učenicima da postanu određeniji kada je riječ o nejasnim idejama i hipotezama iz istraživačkog procesa. Moglo bi se reći da je skupni rad prva faza formulacije u tom smislu da se učenici u svakoj skupini moraju složiti oko strategija ili hipoteza kako bi surađivali. Rad u skupinama može članove skupina navesti da odbace ideje te razmatraju druge. Ovaj proces također sadrži elemente potvrđivanja. Učenicima se na temelju prvih iskustava s rezanjem, mjerenjem i računanjem površina može učiniti da sada znaju gdje trebaju prerezati konop. Ali treći izračun može rezultirati još većom površinom nego u prva dva izračuna. Skupina onda mora razmisliti o svojoj strategiji. Stoga se u skupnom radu moraju dogoditi sve adidaktičke ili potencijalno adidaktičke situacije prije nego što dođe do dijeljenja strategija s drugim skupinama.

Kada učenici dođu do početnog rješenja problema, skupine moraju svoj rad prezentirati ostatku razreda. Od skupina se u prvoj prezentaciji može jednostavno tražiti da kažu duljinu jednoga dijela konopa kako bi se odredilo slažu li se svi s mjestom reza. Ako se skupine ne slažu, onda je još potrebnije da navedu svoje argumente i saslušaju strategije drugih skupina. Očekuje se da će određeni broj učenika na taj način shvatiti da strategija „pokušaja i pogreške“ nije toliko učinkovita kada se traži precizan odgovor, ali i da se njihov dosadašnji rad može iskoristiti ako se prebace na strategiju regresije.

Stoga se faza formulacije može preklapati s fazom potvrđivanja. U okruženju se mogu ispitati svi prijedlozi koji se odnose na mjesto reza. Ukupna površina kvadrata i trokuta mogu se izračunati za svaku predloženu duljinu. Okruženje u tom smislu može pomoći u potvrđivanju koja je skupina rez predložila u odnosu na najmanju površinu. Uključivanje učenika u raspravu o odabranim strategijama može biti izazovno. Nastavnik stoga može pitati možemo li biti sigurni da ne postoji bolje mjesto reza. To znači da, ako se razred odlučio da zadatak riješi metodom „pokušaja i pogreške“, moraju također koristiti jasnije argumente.

Određivanje vrste funkcije koja na najbolji mogući način stvarno opisuje situacije može biti problematično za učenike koji su se odlučili za regresiju. Ako raspolažu samo podacima ispod ili iznad ekstrema, možda će smatrati da je odnos, primjerice, linearan ili eksponencijalan. Kako bi se izbjegle takve situacije, učenike se mora pitati koliko su ovi odnosi zapravo smisleni. To se može smatrati novom primopredajom (devolucijom) pomalo izmijenjenog problema u okviru sličnog okruženja.

Optimalnu se strategiju ne može potvrditi testiranjem u odnosu na dostupno okruženje. Nastavnik zbog toga u ovom dijelu potvrđivanja ima aktivniju ulogu, ali još uvijek je važno da se ostatak razreda uvjeri u navedenu strategiju.

Važno je da nastavnik u fazi institucionalizacije sažima ideje i međusobno ih povezuje. Na primjer, učenici koji su prvotno odabrali metodu „pokušaja i pogreške“ radili su isto što i učenici koji su prikupljali podatke. A učenici koji su prikupljali podatke zapravo su pronalazili točke koje bi se u teoriji trebale nalaziti na grafu koji prikazuje funkciju površine. Način određivanja točne vrijednosti najmanje površine, a to je problem optimizacije, zajednički je svim strategijama. Izračuni nisu jednostavni ni u jednom slučaju, ali su izvedivi. Tako se pojavljuje potreba da se razgovara o ostalim metodama za probleme optimizacije, a posebice u slučajevima kada se dobije polinom višeg stupnja.

Dodatni primjeri primjene ovih ideja i drugih načela planiranja modula na temelju IUNM-a nalaze se u ostalim publikacijama projekta MERIA (vidi http://www.meria-project.eu/).

4. Realistično matematičko obrazovanje

Uvod

Kao što se spominjalo u prethodnim poglavljima, Artigue and Blomhøj (2013.) ističu kako je cijeli niz etabliranih istraživačkih programa u području matematičkog obrazovanja razradio metode i pojmove za ono što se sada zove IUNM. Realistično matematičko obrazovanje (RMO) je uz TDS jedan od najpoznatijih pristupa.

RMO obuhvaća ideje i načela za oblikovanje procesa učenja. Ovo poglavlje daje pregled glavnih načela RMO-a, a ciljana publika su nastavnici i osobe zadužene za izradu nastavnih programa. Ideje se objašnjavaju pomoću primjera zadataka. Teorija RMO-a se u ovom dokumentu temelji na dvama glavnim načelima:

(1) Matematika je ljudska djelatnost.
(2) Smislena matematika nastaje iz bogatih konteksta.

U završnim ćemo odjeljcima opisati poveznice između RMO-a i istraživački usmjerene nastave matematike (IUNM) te se pozabaviti idejama RMO-a koje mogu biti od pomoći prilikom planiranja scenarija na temelju IUNM-a.

Strukturiranje matematike

Matematičko znanje može biti iznimno strukturirano, dok RMO zastupa stav da je za proces učenja potreban pristup koji nije toliko formalan. U formalnom se pristupu započinje aksiomima, postulatima i definicijama, a zatim se iz njih izvode leme i poučci. U aksiomatskom okviru dokazi utvrđuju istinitost ovih formulacija. Tradicija organiziranja i predstavljanja matematičkih rezultata na ovako formalan način seže od Euklida (300. pr.Kr.) do suvremenih matematičkih istraživanja. Ako matematiku zamislimo kao zgradu u kojoj aksiomi predstavljaju temelje, a logika žbuku, onda je ona dojmljiva i učinkovita. Formalno prezentiranje rezultata omogućava da se akademska komunikacija odvija nedvosmisleno. Nije ni čudno što su neki na tome izgradili matematičko obrazovanje. Geometrija se u mnogim zemljama sve do 1950-ih godina poučavala prema Euklidovim *Elementima*. Pokret Nove matematike je u 1950-im i 1960-im godinama uveo niz teorija koje su poslužile kao temelj za srednjoškolsko matematičko obrazovanje.

Matematika kao ljudska djelatnost

Treba li ovaj iznimno strukturirani skup matematičkog znanja biti glavni način na temelju kojeg oblikujemo matematičko obrazovanje? RMO zauzima drugačije stajalište. RMO smatra da je matematika *ljudska djelatnost*. Organizirani skup matematičkog znanja proizvod je ove djelatnosti. Na primjer, dobra definicija matematičkog pojma često je rezultat dugotrajnih matematičkih promišljanja, ideja i pokušaja. RMO naglašava važnost ovih procesa koji dovode do poboljšane inačice matematičkog pojma ili rezultata.

Na početku poglavlja o logaritmima moglo bi se reći da je logaritamska funkcija inverzna eksponencijalnoj funkciji. Međutim, prema pristupu na temelju RMO-a započelo bi se sa zadatkom koju ukazuje na potrebu za takvim konceptom. Učenici bi kroz takvu vježbu samo osjetili da im treba logaritamska funkcija. Ovo je temeljna ideja.

Rogier u banku polaže 200 eura. Kamatna stopa iznosi 2 %. Popunite tablicu.

Iznos (I)	100	$\approx$ 108,24	$\approx$ 129,36	$\approx$ 199,99	$\approx$ 507,24
Godine (t)	0				

Znate li funkciju kojom biste iz I dobili t?

Naravno da će odgovor na ovo pitanje vjerojatno glasiti „ne“, ali važno je da se učenici to zapitaju i shvate da im treba nova funkcija. Učenici nisu naviknuti na ovu vrstu pitanja. Zbog toga je možda bolje da se na pitanje odgovori kroz raspravu u razredu koju će nastavnik usmjeravati. Učenici će se možda sjetiti funkcije (kvadratnog) korijena te trebaju vođenje kako bi shvatili zašto to nije ispravno.

Anti-didaktička inverzija

Inverzija se odnosi na to kada se učenicima matematiku prezentira u iznimno strukturiranoj inačici (na temelju aksiomatskih sustava). Učenike se stavlja pred gotov rezultat dugotrajnog i mukotrpnog procesa bavljenja matematikom. Ako učenik matematiku mora učiti na taj način, onda je proces učenja inverzija procesa koji je doveo do matematičke teorije. Morat će mukotrpno raditi (ili čekati) da sazna koja su pitanja dovela do matematčke teorije, a koje je probleme ta teorija razriješila. Nastavnik je možda svjesno odabrao ovaj pristup, ali RMO smatra da takav pristup nije didaktički: radi se o *anti-didaktičkoj inverziji* (Freudenthal, 1991.).

Općenito govoreći, formalno prezentiranje matematike teško je razumljivo za početnike. Postoji mnogo didaktičkih argumenata protiv toga da se učenicima na samom početku učenja pruži ova iznimno strukturirana i dotjerana verzija matematike.

- Nisu prikazani prirodni procesi (postavljanje pitanja, problemi, znatiželja...) načina na koji se došlo do neke matematičke teorije. Učenik gubi smisao i motivaciju.
- Proces učenja lišava se intuicije koja je dovela do teorije.
- Nije jasno što sustav rješava, modelira ili na što se odnosi (a na što ne).
- Zanemaruju se heuristike koje su bile nužne za organizaciju teorije.
- Prezentacija može biti suviše obimna ili oskudna. Teško je shvatiti matematički aspekt, ali mu se u formalnoj prezentaciji neće udijeliti previše pažnje.

Mnogi će se matematičari, uključujući nastavnike matematike sjetiti ε, δ - definicije limesa koju su dobili na prvoj godini studija ili čak u srednjoj školi. Zašto je bila tako teško razumljiva? Učeniku ona nema nimalo smisla ako nije upoznat s problemima rigoroznih dokaza koji se pojavili u Analizi početkom 19. stoljeća. Koji problem rješava? Čemu toliki trud da se dokaže nešto što je tako očito? Zašto nisu funkcionirale ostale definicije?

S formalnog gledišta pravilan redoslijed predavanja zakona distribucije "$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$" u srednjim školama bio je da ga se samo priopći, a zatim bi uslijedili vježbe poput "proširi $5 \cdot (a + 2)$", ali učenik na taj način ne dobiva nikako značenje. Niti odgovor na pitanje zašto je to korisno pravilo ili vještina.

Uloga realizma u procesima učenja

Očito je kako je (formalno) značenje matematičkih pojmova i postupaka pomno i precizno opisano u formalnom prezentiranju matematičkog znanja. Budući da formalne matematičke prezentacije mogu biti teže razumljive i didaktički neprikladne za početnike, kako bi se ovo značenje trebalo poučavati?

Skup aktivnosti učenja tvori proces učenja. Jedna od središnjih ideja RMO-a jest ta da se situacije na kojima se temelje takve aktivnosti trebaju biti realne ili realistične. Značenje matematičkih pojmova i postupaka nastaje na tome što učenicima već ima smisla, na tome što je za učenike realno.

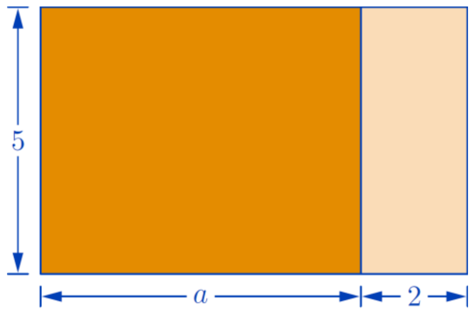
Što se u RMO-u podrazumijeva pod „realnim/realističnim? Učeniku je nešto realno ako mu nešto ima očito značenje, ako nešto može razumjeti. Skupini učenika nešto je realno ako je nešto logično i drži vodu. „Realno“ ne znači (nužno) da se „temelji na stvarnosti“, odnosno da se temelji na situacijama iz drugih disciplina kao što su fizika ili ekonomija. „Realistična“ situacija učenja isto tako ne znači da se temelji na iskustvu iz svakodnevnog života. A „realno“ svakako nema ontološko značenje: ono što postoji i ono što ne postoji. Možda bi „smislena matematika“ bio bolji izraz od „realistične matematike“, ali potonji je izraz pojavio u prethodnom stoljeću i kao takav se uvriježio. Smislenu se matematiku otpočetka uči na temelju onoga što je učeniku već smisleno, a posebice u smislenim kontekstima. Prema Freudenthalovim riječima:

> *Realnost koncepata ovisi o osobi koja ih shvaća, a kognitivna percepcija može u danim okolnostima biti snažnija od manualne i osjetilne percepcije koje su na neki način uvijek povezane sa spoznajom“ i „(Ono što je stvarno) međusobno povezuju stvarni, zamišljeni i simbolizirani odnosi (....) koji se šire iz jezgre svakodnevnog života prema matematičkom istraživanju u širem smislu, a sve to ovisi o sudjelovanju uključenih strana.* (Freudenthal, 1991., str.30).

Zakon distribucije može se uvesti u realističnom geometrijskom kontekstu: Izračunajte površinu pravokutnika na dva načina:

(1) Prvo izračunajte površinu tamnog pravokutnika, a zatim svijetlog te ih zbrojite
(2) Prvo izračunajte cijelu širinu, a zatim pomnožite s visinom.

(na temelju *van den Broek i drugi, bez datuma*)



Zašto je ovo realističniji pristup? Pretpostavlja se da je učenik upoznat s računanjem površina. Prirodno se nameće značenje jednakosti jer rezultati dvaju izračuna moraju biti isti. Značenje proizlazi iz samog zadatka. Uloga nastavnika je da uvede zadatak, usmjerava učenike te razredu iznosi zapažanja o zadatku. Ispravno mora zadatak uklopiti u proces učenja. Kasnije u tekstu dat ćemo detaljnije viđenje iz perspektive RMO-a.

Bogate strukture i bogati konteksti

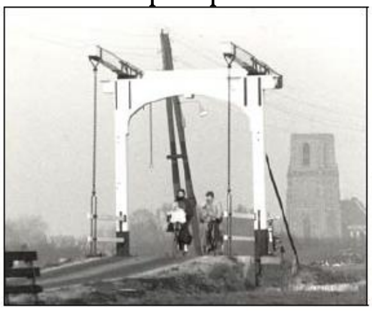
Sukladno RMO, učenici novo shvaćanje matematike ne stječu iz formalne matematičke strukture, već uglavnom na temelju onoga što je za učenike stvarno. Didaktička situacija treba omogućiti da se novo znanje razvija na temelju onoga što je već smisleno. To znači da situacija treba biti bogata nematematičkim kontekstima i matematičkim strukturama. Navodimo moguće načine na koje matematička struktura ili kontekst mogu biti bogati:

(1) povezuje razne aspekte logike učenika - što više poveznica, to je struktura bogatija;
(2) matematički govoreći, korisnost je veća od situacije koja ih uvodi;
(3) na raznim razinama omogućuje različite pristupe ili rješenja.

Sada ćemo na konkretnim primjerima prikazati ove načine.

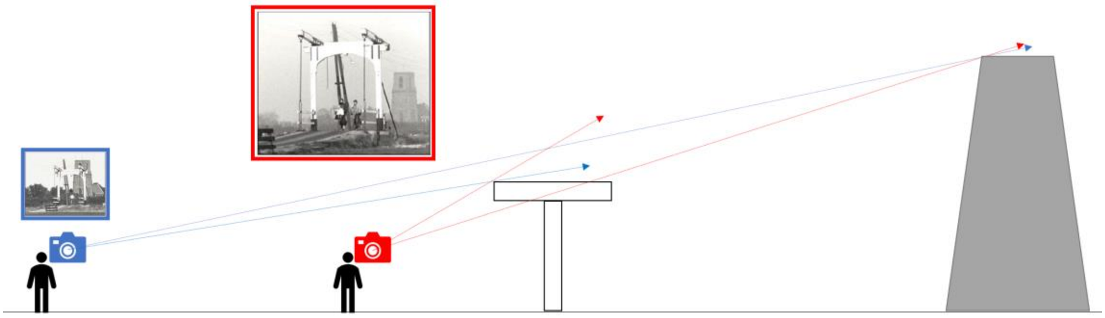
Sljedeći zadatak koji se zove „Toranj i most" prikazuje točku (1). Koristi se za eksperiment za uvođenje mjerila i geometrije u 3D kontekstu (Goddijn, 1979.).

Ispod se nalaze dvije fotografije istog prekrasnoga nizozemskog krajolika, a na njima vidimo različite perspektive tornja i mosta. Što je više: toranj ili most?

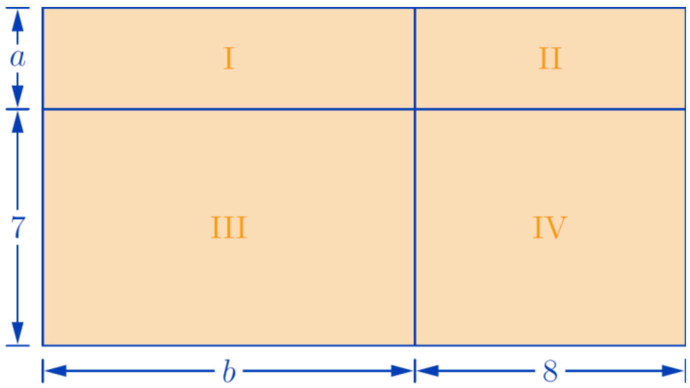


Nizozemska se djeca stalno voze na biciklu, a posebice u školu. Zasigurno su viđali tornjeve i mostove u ovakvom položaju. Svakoga dana koriste pametne telefone kako bi slikali (i uređivali) slike. Nadalje, svi imamo urođenu sposobnost da zamišljamo scene iz različitih perspektiva. Stoga je ova situacija u mnogočemu realistična. Sada o njoj trebaju razmišljati matematički. Kako bi raspravljali o situaciji, morat će upotrijebiti pojmove kao što su gledište, projekcija, linije pogleda i promjena mjerila (skaliranje), a to i jest cilj zadatka.

Donja slika sažima neke matematičke aspekte problema. Fotografije su prikazane u točnijem relativnom mjerilu.



Gore navedeni primjer s pravokutnikom ilustrira točku (2). Izvrsno funkcionira s vježbama poput: proširi $3 \cdot (x + y + 3)$, gdje je pravokutnik podijeljen na tri umjesto dva pravokutnika. Također se može primijeniti na $(a + 7)(b + 8)$, gdje je pravokutnik podijeljen na četiri pravokutnika.



Ponekad se ovaj primjer objašnjava pomoću drugog modela koji ne zadovoljava točku (2). Drugi se model ponekad naziva „kljunom papige“, a izgleda ovako:

$$(a + 7)(b + 8) = a\,b + 8a + 7b + 56$$

Čim se dva izraza pomnože, oni se povezuju crtama. Ako ste sve napravili ispravno, pojavljuje se kljun. Ovaj model je mnemotehnika i ne objašnjava što se događa. Ne zadovoljava točku (2) budući da kljun proširuje samo $(a + c)(b + d)$, a ne $(a + c)(b + d + e)$ ili složenije izraze.

Ako se usredotočimo na formalnu prezentaciju matematike kao temelj za obrazovanje, onda je logično započeti s matematičkim pojmovima koji su najmanje strukturirani. Matematičko se znanje na taj način gradi na njegovim temeljnim pojmovima. Geometrija bi počela s aksiomima o točki i pravcima. Analiza će se započinjati skupovima, prirodnim brojevima i realnim brojevima, nakon čega će slijediti funkcije itd. Takav je pristup koristila Nova matematika tijekom 1960-ih godina. Ali to je još jedan oblik anti-didaktičke inverzije. Većina ovih struktura dolazi na kraju procesa apstrahizacije, „osiromašenja“ i reorganizacije matematičkog znanja. RMO zastupa stajalište da je korisnije da učenici sami prođu kroz proces koji dovodi do toga.

Sljedeća vježba ilustrira točku (3). Neposredno nakon što je uvedeno supstituiranje varijabli brojevima može se krenuti s rješavanjem jednadžbi. Pronađite rješenja za:

$$2x = 8$$
$$7 + x = 15$$
$$x^2 = 25$$
$$x + 8 = 2x + 2$$
$$(x + 2)^2 = 16$$

Popis bi mogao biti mnogo dulji; što je veća raznolikost jednadžbi, to je zadatak bogatiji. Uspjeh učenika varirat će ako prethodno nisu naučili neke metode rješavanja. To se odnosi i na razne vrste mišljenja. Nastavnik tijekom vježbe može dobiti uvid u to što učenici shvaćaju intuitivno i to iskoristiti kada se kasnije bude raspravljalo o formalnim metodama rješavanja. Nastavnici dobivaju uvid u razlike između učenika.

Matematizacija

RMO promiče matematiku kao ljudsku djelatnost. Freudenthal za jednu od glavnih sastavnica ove djelatnosti koristi naziv *matematizacija*:

> *Matematizacija se odnosi na cjelokupnost organizacijske djelatnosti matematičara, bilo da ona obuhvaća matematički sadržaj i izraze ili naivnije, intuitivnije proživljeno iskustvo koje izražavamo svakodnevnim jezikom... (Cilj je) ponuditi nematematičke bogate strukture kako bismo učenike upoznali s otkrivanjem strukture, strukturiranjem, osiromašenjem struktura i matematizacijom. Učenici na taj način mogu otkriti siromašne strukture u kontekstu bogatih u nadi da će pomoću ovog pristupa funkcionirati i u drugim (kako matematičkim, tako i u nematematičkim) kontekstima. Ako se započne sa siromašnim matematičkim strukturama, to može značiti da se možda nikada neće doći do bogatih nematematičkih struktura koje su zapravo odgovarajući cilj.* (Freudenthal, 1991., str.31 i str.41)

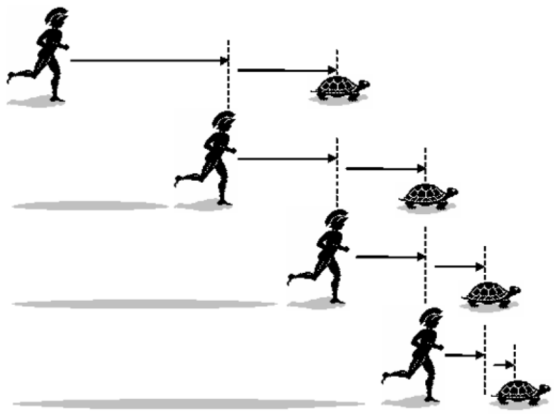
Matematizacija obuhvaća: aksiomatizaciju (stvaranje aksiomatskoga matematičkog sustava), formalizaciju (prijelaz s intuitivnog na formalni pristup), shematizaciju (stvaranje smislenih mreža pojmova i postupaka), algoritmizaciju (prijelaz s mukotrpnog rješavanja problema na rutinsko rješavanje problema), modeliranje (izrada shema koje predstavljaju, idealiziraju i pojednostavljuju druge sheme) itd.

Razlikujemo dva smjera matematizacije: horizontalnu i vertikalnu (Treffers, 1987.). Horizontalna se matematizacija odnosi na prijenos problema ili situacije u matematički diskurs. Ona omogućuje da se situacija tretira ili o njoj raspravlja na *matematički* način. Vertikalna se matematizacija odnosi na matematizaciju u matematičkom diskursu.

Horizontalna se matematizacija odvija čim se postavi pitanje (i na njega odgovori) o situaciji vezano za količine, udaljenosti, oblik, simetrije, redoslijed, vjerojatnost ili drugu vrstu struktura o kojima se uči na matematici. Učenici bi trebali prakticirati oba tipa matematizacije. Ako se zanemari horizontalna matematizacija, učenici gube poveznicu između matematičkog znanja i situacija na koje je ono primjenjivo. Ako se zanemari vertikalna matematizacija, učenici propuštaju priliku da stvore snažnije poveznice u matematici, izgrade formalni sustav i bolje razumiju.

Sljedeći je zadatak dio nastavnog materijala o diskretnim modelima za učenike u dobi od 16 i 17 godina. Svrha zadatka jest da se vježbaju vještine prikazivanja pomoću nizova, uvježba zbroj niza te uvede geometrijski niz. Počinje se tako da se uvede slavni paradoks o Ahileju i kornjači. Većini je učenika ovaj paradoks poznat, ali ipak mogu naići na poteškoće dok ga pokušavaju riješiti (primjerice, prilikom rasprave u razredu).

Ahilej i kornjača se utrkuju. Budući da je Ahilej brži, kornjača ima prednost. Svaki put kada Ahilej stigne na mjesto gdje je netom prije bila kornjača, ona već malo umakla dalje. Ahilej zbog toga nikako ne uspijeva prestići kornjaču te ona na kraju pobjeđuje. Što nije u redu s ovim načinom rasuđivanja? Kako pomoću matematičkog načina mišljenja možemo riješiti paradoks?



Učenicima se tada zadaje da opišu situaciju (kao matematički niz). Naravno da se postavlja pitanje uloge vremena i udaljenosti kao varijabli.

Mogući se odgovor krije u nekoliko pretpostavki. Recimo da je prednost 1, Ahilejeva brzina 1, a brzina kornjače je ½. Stoga je udaljenost u trenucima kada Ahilej dođe do prethodnog položaja kornjače izražena sljedećim nizom

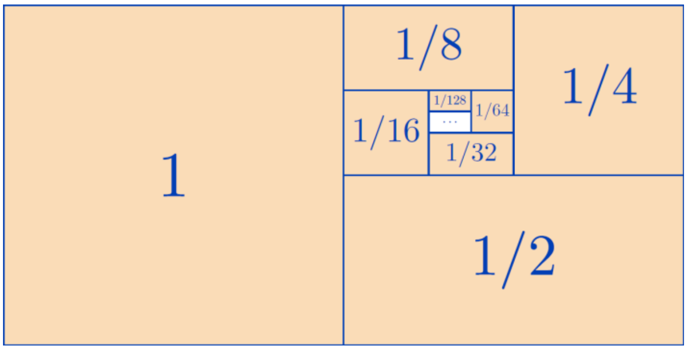
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

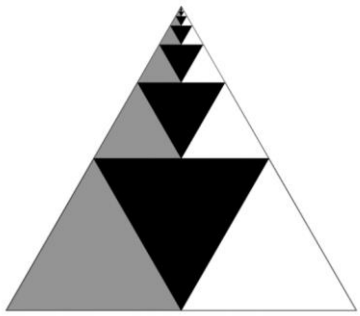
Ukupna udaljenost koju je Ahilej prevalio i proteklo vrijeme u svakom od tih trenutaka izražena je sljedećim nizom

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots$$

Ali kako izaći na kraj s beskonačnim nizovima? Ako zbrojimo beskonačnu količinu brojeva, nije li rezultat beskonačnost? To i je srž paradoksa! Odgovor leži u geometrijskom nizu, a u ovom je zadatku to veliki cilj učenja.

Učenici u popratnoj vježbi proučavaju sliku:





Neformalno rasuđivanje u vezi s ovom slikom daje učenicima način da dođu do geometrijskog niza koji je rješenje paradoksa.

Zatim slijedi proces vertikalne matematizacije. Učenici imaju zadatak da dođu do sličnoga rezultata za desnu sliku, a zatim trebaju vizualni prikaz na slici formalizirati i poopćiti prema

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Pronalaženje izraza $\frac{1}{1-x}$ predstavlja velik izazov.
Primjena ovog rezultata na druge zanimljive situacije poput $0.9999\ldots = 1$ (dobar primjer matematičkog konteksta) trebala bi kod učenika pobuditi zanimanje za pronalazak dokaza. U dokazu se koriste pseudoformalne tehnike

$$(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots - x - x^2 - x^3 + \cdots = 1.$$

Kasnije se mogu uvesti limesi i $\sum$ notacija kako bi se sve dodatno formaliziralo.

Ovaj prikaz scenarija učenja daje primjere modeliranja i formalizacije na bogatom kontekstu čuvenog paradoksa i razumljivih slika. Zamijetite redoslijed aktivnosti: učenik dolazi do formalnijeg rezultata tako što uči konkretne kontekste.

Horizontalna matematizacija iz bogatih konteksta kako bi se došlo do poveznica sa stvarnošću

Povezivanje matematike sa stvarnošću od posebnog je značaja za RMO. Kao što Freudenthal (1991., str.81) navodi:

> *Svijet je bučno mjesto; matematizacija svijeta odnosi se na potragu za osnovama, osluškivanje poruke kroz buku. Učenici i to moraju naučiti, odnosno ponovno osvijestiti i to čim prije, to bolje; jednom kad učenike potpuno indoktriniraju unaprijed pripremljene metode i algoritmi, bit će prekasno.*

„Povezivanje sa stvarnošću“ je uz „matematiku kao ljudsku djelatnost“ jedna od glavnih interesnih područja RMO-a. Za poticanje aktivnosti koje stvaraju poveznice potreban je dovoljno bogat (nematematički) kontekst. U prethodnim dijelovima ovog poglavlja smo govorili o bogatim kontekstima. Sada ćemo to proširiti s nekoliko prijedloga. Naravno da svaki prijedlog treba ispunjavati gore navedene kriterije bogatog konteksta.

a) Lokacija. Primjerice, skladište ili glazbeni festival.
b) Priča. poput gore opisanog paradoksa o Ahileju i kornjači.
c) Ljudska djelatnost. Primjerice, uređivanje kuće ili upravljanje zrakoplovom.
d) Vijesti ili povijesni događaj. Primjerice, statistički podaci iz novina.

Sljedeću smo vježbu preuzeli iz *De Wageningse Methode* (van den Broek i drugi, bez datuma). Radi se o dijelu poglavlja o matricama. Dobar dio poglavlja posvećen je bogatom kontekstu tvrtke koja se bavi prodajom automobila. Tvrtka ima sjedište i podružnicu. Prodaju automobile tipa A, B i C. Matrica S predstavlja zalihu automobila.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} Sjedište \\ Podružnica \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Učenici su u prethodnim vježbama zbrajali matrice kako bi se prilagodile zalihe. Sada se uvodi matrica vrijednosti V (u tisućama eura)

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} prodaja & trošak & dobit \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 30 & 28 & 2 \\ 20 & 17 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ukupna vrijednost prodanih automobila u sjedištu iznosi

$$15 \cdot 12 + 13 \cdot 30 + 7 \cdot 20 = 710 \text{ (tisuća eura).}$$

a) Izračunajte ukupnu vrijednost prodanih automobila u podružnici.
b) Izračunajte ukupne troškove prodanih automobila u sjedištu. I u podružnici.
c) Izračunajte ukupnu dobit od prodanih automobila u sjedištu . I u podružnici.
d) Iskoristite ukupne iznose koje ste dobili u a), b) i c) kako biste popunili matricu ukupnih iznosa.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} prodaja & trošak & dobit \end{array} \\ \begin{array}{c} Sjedište \\ Podružnica \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Zatim slijedi pojašnjenje da se obavila neka vrsta množenja za matrice $S \cdot V = T$, a T je određena kao matrica produkta. Prednosti ovog pristupa su to što su izvršene operacije za matricu množenja zahvaljujući dobro odabranom kontekstu bile logičan korak, a sam način je bio smislen.

Izvirući modeli

Kako učenici prema RMO-u dolaze do fromalnijeg matematičkog znanja? U radovima Streeflanda (1985.), Treffersa (1987.) te Gravemeijera (1994.) posebna se pažnja obraća na *modele* koji nastaju u glavama učenika. Modele definiraju kao mentalne sheme pojmova i procesa koje se odnose na situaciju. Model situacije

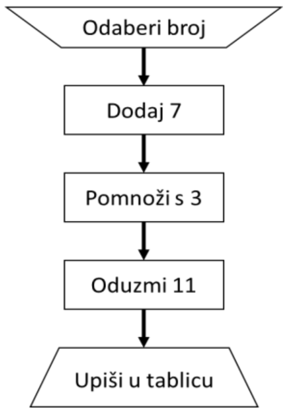
proizlazi iz horizontalne matematizacije. Ovaj model predstavlja neformalnu matematičku aktivnost učenika u odnosu na situaciju.
Za učenike to situaciji daje značenje. Od ove se točke može odviti proces vertikalne matematizacije: izgradnja (apstraktnijeg) matematičkog pojma iz koncepta ili algoritma iz procesa. Novi model je pomalo formalniji. Nakon jednog ili više takvih koraka više se ne radi o modelu specifične situacije, već o modelu situacija za razred koji omogućuju matematičku aktivnost bez referiranja na situaciju prema kojoj je model nastao. Međutim, modelu se, ako je to potrebno, značenje može dati tako da ga se pomoću prijelaznih modela poveže s izvornim modelom. To je jedan od glavnih razloga zbog kojih RMO više voli rad s modelima koji sadrže više od situacije u kojoj su nastali (vidi točku (2) o bogatim situacijama).

Postupno izviranje modela može se odvijati tijekom dugog razdoblja obrazovanja. Pogledajmo kao primjer izviranje pojma *funkcije* (Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon i Reed 2012.). Kao polazište nam služi pretpostavka da su učenici upoznati s pojmom varijable, uključujući supstituciju varijable nekom vrijednosti. Vježba za učenike u dobi od 12 godina (prilagođeno iz De Wageningse Methode, usporedi s van den Broek i drugi, bez datuma):

Pogledajte shemu na desnoj strani. Načinite tablicu s brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 10.

Sam dobiva 10 kao rezultat. Koji mu je bio početni broj?

A s 343?



Ova će se neformalna aktivnost kasnije razviti u uporabu formula kako bi se dobila shema strijele. Učenici će koristiti takve metode računanja i formule, a one će postupno za učenike postajati dio stvarnosti.

U nekom se trenutku uvode nove osnovne računske operacije: sinus, kosinus i tangens koje označavamo sin x itd. Učenici ne uče kako se računske operacije obavljaju (općenito), već samo koje je njihovo geometrijsko značenje. Ovo je važna promjena perspektive. Sljedeći je korak da se analogijom uvede novi zapis: $f(x)$ gdje f predstavlja računsku operaciju. Sama računska operacija u ovom trenutku postaje pojam. Učenici će morati učiti svojstva pojma kao što su domena ili derivacija. Ali pojam funkcije uvodi se na temelju transformacije modela: model *za* pojam funkcije na temelju modela funkcije, a ne na temelju definicije. Do stvarne formalne definicije funkcije dolazi se potpuno drugačijim načinom: ustaljena teorija!

Vođeno otkrivanje

Horizontalna matematizacija otvara situaciju ili skupinu situacija matematičkom diskursu. Modeli neformalne matematičke djelatnosti se kroz vertikalnu matematizaciju postupno pretvaraju u modele koji predstavljaju formalno matematičko znanje. Moglo bi se reći da učenici na ovaj način otkrivaju *formalnu* matematiku. U većini slučajeva taj proces ne može biti isti kao originalno otkriće. Način na koji su profesionalni matematičari došli do rezultata mogu zahtijevati motivaciju i znanje koje učenici nemaju. Za nastavnika koji koristi RMO izazov može biti da omogući proces koji je prikladan za učenike. Proces mora biti *vođen*. Prema Freudenthalu (1991.) „Otkrića u ovom kontekstu označavaju korake u procesima učenja, što se odražava u riječi otkrivanje, a na nastavno okruženje procesa učenja ukazuje pridjev „vođeno"". Uz ono što smo prethodno spomenuli možemo dodati i sljedeće argumente za vođeno otkrivanje (Freudental 1991.):

1. Znanje i sposobnosti koje su nastale na temelju vlastitog rada duže se zadržavaju te su dostupnije nego kada ih nametne netko drugi.
2. Otkrivanje može biti ugodno, a učenje otkrivanjem može biti motivirajuće.
3. Ono potiče doživljaj matematike kao ljudske djelatnosti.
4. Osigurava da matematički pristup odgovara razini učenika.

Načelo otkrivanja treba sagledati iz perspektive središnje postavke RMO-a s kojom smo započeli ovu raspravu: matematičko se obrazovanje ne odnosi samo na korpus matematičkog znanja, već i na učenje kako matematizirati. Stoga proces otkrivanja vrijedi isto koliko i ishod.

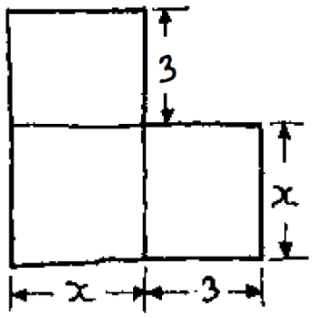
Vođenje prema otkrivanju

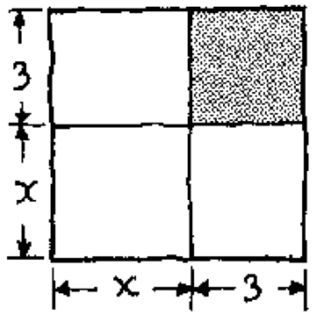
Kako voditi učenike prema otkrićima? „Vođenje označava delikatnu ravnotežu između sile poučavanja i slobode učenja" (Freudenthal 1991.). Očito je da vođene aktivnosti trebaju promicati horizontalnu i vertikalnu matematizaciju. Cilj bi trebao biti da učenici sami nalaze rješenja zadanih problema, a možda čak i da postavljaju nove probleme.

Nastavnik bi vođenjem trebao promicati rasprave između samih učenika te između učenika i nastavnika. Rasprave omogućavaju učenicima da testiraju, usmjeravaju i reformuliraju ideje, a da nastavnik pritom nije taj koji ih usmjerava prema željenom ishodu. Učenici neće matematizirati i otkrivati istom brzinom. Rasprave će učenicima pomoći da usklade ideje.

Ako nastavnik sudjeluje u raspravi, učenicima će koristiti pokušaji nastavnika da prati njihov način mišljenja kako bi im pomogao da shvate u kojem smjeru idu. To je zato što učenici svoje pristupe temelje na onome što im je smisleno. Ako nastavnik uspije usmjeriti ove metode prema prihvatljivom rješenju, povećava se vjerojatnost da će učenici shvatiti rješenje.

Ova je vježba prilagođena iz De Wageningse Methode (van den Broek i drugi, bez datuma), a cilj joj je otkrivanje metode nadopunjavanja na kvadrat.. Na desnoj slici nalazi se lik u obliku slova L, a treba ga nadopuniti na kvadrat.





a) Napišite izrazza površinu u obliku slova L na lijevoj slici. U izrazu će se pojaviti varijabla x.
b) Kolika je površina sivog kvadrata?
c) Kolika je duljina stranice velikog kvadrata?
d) Objasnite na koji način (a) i (b) vode do jednakosti $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$.
e) Provjerite jednakost kvadrirajući binom..
f) Skicirajte dio u obliku slova L s površinom $x^2 + 10x$.
g) Koju jednakost možete izvesti iz dijela u obliku slova L?

Vježba se ponavlja s različitim brojevima (također se uvode razlomci), ali na učeniku je da odabere hoće li crtati dio u obliku slova L. Ovdje valja istaknuti da je na učeniku da otkrije algoritam. Učenik bi trebao obaviti algoritmizaciju.

Učenikovo vlastito otkriće (kao što je pojam, algoritam, model ili način rješavanja problema) možda neće biti najučinkovitije ili najljepše. Možda će se razlikovati od onoga što je nastavnik imao na pameti ili od željenog ishoda učenja. Nastavnik na kraju aktivnosti otkrivanja može tijekom razredne rasprave formulirati zajednički ishod. Nastavnik se treba pobrinuti da ishod poveže s doprinosima učenika.

RMO i IUNM

Koje su zajedničke karakteristike RMO-a i IUNM-a? Istraživanje je središnji pojam IUNM-a: proces koji nalikuje načinu rada matematičara i znanstvenika kada se suoče s novom pojavom.

> *Mnoge se pojave iz svakodnevnog života mogu opisati, istražiti ili razumjeti pomoću matematike u kombinaciji sa znanošću ili logikom te predstavljaju bogatu podlogu za IUNM*[2]*... (*Artigue i Blomhøj, 2013.*)*

RMO i IUNM imaju neka zajednička načela. Obje teorije opisuju kako situacije iz svakodnevnog života čine bogatu podlogu za učenje. Zagovaraju izgradnju znanja

[2] U ovoj ćemo brošuri koristiti pojam IUNM umjesto pojma IUMO koji koriste Artigue i Blomhøj.

pomoću metoda koje se temelje na načinu kako nastaju znanost i znanje: istraživanje, otkriće i pronalaženje. I IUNM i RMO ovaj proces opisuju kao društven: učenici zajedno rade na ponovnom otkrivanju i izgradnji znanja. RMO naglašava razliku između ponovnog otkrivanja i otkrivanja budući da je znanje koje je polazišna točka za specijaliziranog istraživača i početnika bitno drugačije. Nastavnik u RMO-u i IUNM-u osim tradicionalnih dobiva i novu ulogu: on je posrednik koji vodi kroz istraživanje i matematizaciju. U središtu pažnje su učenici i njihove ideje. Kao što smo rekli prije, nastavnik pomaže u formalizaciji neformalnih pristupa učenika.
RMO i IUNM zastupaju stav da su vještine istraživanja i matematizacije same po sebi ciljevi učenja uz znanje iz nekog područja. Ovo predstavlja značajnu promjenu u odnosu na pristupe koji su usmjereni isključivo na znanje iz nekog područja.

Strukture RMO-a za module IUNM-a

Do sada smo govorili o različitim aspektima RMO-a te smo kao primjere naveli nekoliko zadataka. Zaključno dajemo pregled kako zadatke povezivati u putanju učenja kao što je, primjerice, modul.

1. Uvod: predstavljanje konteksta s relativno otvorenim problemom (koji će možda učenici otkriti ili formulirati). Problem će biti nit koja će se provlačiti kroz cijeli modul. Pristupat će mu se na razne matematičke načine.
2. Faza horizontalne matematizacije: uvodi se matematički jezik kako bi se raspravilo o situaciji. Učenici stvaraju prvi neformalni model situacije.
3. Faza vertikalne matematizacije: dodatno se razrađuje matematika koju problem sadrži. Model se podiže na apstraktniju i općenitiju razinu.
4. Zaključak i analiza: učenici promišljaju o cjelokupnom procesu, integriraju ideje, stečene metakognitivne vještine postaju eksplicitne, učenici dijele rezultate, a nastavnik ih vodi i naglašava glavne točke učenja.

U svakoj fazi postoje elementi istraživanja: otkrivanje i/ili formulacija problema, stvaranje prvoga neformalnog modela, apstrahizacija, dijeljenje rezultata. Druge publikacije projekta MERIA bave se izazovima prilikom primjene ovih ideja i drugih načela za planiranje modula na temelju IUNM-a (vidi http://www.meria-project.eu/).

Literatura

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38. http://dx.doi.org/10.1080/01411920500401971 .

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08*, pp. 7-16. Copenhagen, Denmark.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, pp. 797-810.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39, 365–382

Barquero, B. & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: from fundamental situations to study and research paths. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education*, chap. 8, pp. 249-272. Springer International Publishing.

Bass, J. E., Contant, T. L., & Carin, A. A. (2009). Teaching Science for Understanding: The 5-E Model of Instruction. *Teaching science as inquiry*, chap. 4, pp. 87-95. Allyn & Bacon/Pearson.

Blanchard, S., V. Freiman and N. Lirrete-Pitre (2010). Strategies used by elementary schoolchildren solving robotics-based complex tasks: Innovative potential of technology. *Procedia-Social and Behavioral Sciences 2*(2). 2851-2857. http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.427 .

Blomhøj, M. (2004), Mathematical modeling – a theory for practice. In B. Clarke, D. Clark, D. Lambdin, F. Lester, G Emanuelsson, B. Johansson, A. Walbym & K. Walby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics*, pp. 145-160. Gothenburg: NCM, Gothenburg University.

Blum, V. & Borremero Ferri, R. (2007). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1, pp. 45-58.

Blum, W. / Leiß, D. (2006). „Filling up“ – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. In: Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol

Bosch, M. & Winsløw, C. (2016) Linking problem solving and learning contents: the challenges of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35 (3), pp. 333-374.

Brousseau G. (1981a) Problemes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1) 37–127

Brousseau G. (1981b) *Le cas de Gaël*. Bordeaux: IREM de Bordeaux

Brousseau G. (1984) Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de le IIIe école d'été de didactiques des mathématiques* (pp. 99–108) Grenoble: IMAG.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques*, 1970 – 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruder, R., & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45(6), 811-822.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM -- The International Journal on Mathematics Education*, 39, 395–403.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp. 173-187. Springer International Publishing.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.

Doerr, H., & Ärlebäck, J. B. (2015, February). Fostering students' independence in modelling activities. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Prague, Czech Republic. pp. 855-861.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1243-1267. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-012-9329-0

Doorman, M., Jonker, V. & Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. University of Education Freiburg.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 837-849.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T. & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 1, pp. 87-101.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Furtak, E.M., Seidel, T., Iverson, H., Briggs, D.C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching a meta-analysis. *Review of*

Educational Research 82(3). 300-329. http://dx.doi.org/10.3102/0034654312457206.

García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.

Goddijn, A. (1979). De weerbarstigheid van klein en groot [The stubbornness of small and large]. *Wiskrant, 17*, 1-4.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. (2015) Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2015, Prague, Czech Republic. pp. 2642-2648.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of 800+ Meta-analyses on Achievement*. Routledge, Abingdon. http://dx.doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8 .

Hattie, J. and H. Timperley (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research 77*(1). 81-112. http://dx.doi.org/10.3102/003465430298487 .

Hiebert, J, Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H. et al. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, (25), 4, pp. 12-21.

Hofstein, A. and V.N. Lunetta (2004). The laboratory in science education: Foundations for the twenty-first century. *Science Education 88*(1). 28-54. http://dx.doi.org/10.1002/sce.10106 .

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. In *Proceedings of PME XI*, Montreal.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272

Maaß, K. & Artigue, M. (2013) Implementation of iquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45 , pp. 779-795.

Maaß, K. & Doorman, L.M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45 (6), 887-89.

Maaß, K. (2013). PRIMAS report on the results of the internal evaluation. http://www.primas-project.eu/artikel/en/1247/Reports+and+deliverables/

Minner, D.D., A.J. Levy and J. Century (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching 47*(4). 474-496. http://dx.doi.org/10.1002/tea.20347.

Miyakawa,T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), pp. 199–218.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, Washington D.C.

http://www.k12.wa.us/CoreStandards/Mathematics/pubdocs/CCSSI_MathStandards.pdf

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T, Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T, Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M & Nissen, K. (2002). Competencies and mathematical learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Copenhagen: Ministry of Education. Retrieved from http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ_MN_KOM_in_english.pdf.

OECD (2016a). *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

OECD (2016b). *PISA 2015 Results (Volume II): Policies and Practices for Successful Schools*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264267510-en .

OECD (2016c), *Ten Questions for Mathematics Teachers ... and how PISA can help answer them*. PISA, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/9789264265387-en .

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemmo, V. (2007) L'enseignement scientifique aujourd'hui: une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe. Commission Européenne, Direction générale de la recherché, Science, économie et société.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Brussels: European Commission.

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholt, S. & Köller, O. (2016). A definition of inquiry-based STM education and tools for measuring the degree of IBE.(Resources for Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education, ASSISTME). Retrieved from: http://assistme.ku.dk/pdf-uploads/D2.5.pdf

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of "Well-Taught" Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* pp. 334–370. New York: MacMillan Publishing Company.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics,* 83, 1, pp. 1-7.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as a source]. *Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs (Nieuwe Wiskrant), 5*(1), 60-67.

Swan, M., Pead, D., Doorman, L.M. & Mooldijk, A.H. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry based learning. *ZDM - International Journal on Mathematics Education,* 45 (7), 945-957.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel.

Van den Broek, L., Hombergh, D. van den, Smaalen, D. van, Haandel, M van, Geurtz, T., Reuling, H. (n.d.). *De Wageningse Methode*. In Dutch. Retrieved from https://www.wageningse-methode.nl/

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer - en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik* [Didactical elements – an introduction to the didactics of mathematics and science]. Copenhagen: Biofolia.

Woolnough, B. E. (1991). Setting the scene. In: B. E. Woolnough (ed.). *Practical Science*. Open University Press, Milton Keynes, pp. 3-9.

Dodatak. Sažeci glavnih referenci: prijedlozi za daljnje čitanje u vezi s projektom MERIA

U ovoj cjelini je dan pregled glavnih referenci. Reference su na engleskom jeziku, te sažetke donosimo na engleskom jeziku također.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ***ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 45,*** **(6), pp. 797-810**.
The paper argues how IBE/IBME invites students to "work in ways similar to how mathematicians and scientists work". They start by presenting Dewey as a philosopher who strived to overcome the distinction between knowing and doing by viewing human behavior as reflective inquiry. They further list by whom Dewey was inspired. They list elements of inquiry practice which seems crucial: reflective inquiry mixes induction and deduction, process concerning daily life and scientific activity, hands-on activities and that IBE should develop the students' habits of mind in the direction of those underlying inquiry processes. The descriptions of inquiry from the PRIMAS and Fibonacci projects are described and how they relate to the idea of progressive development of "big ideas". The migration of IBE to mathematics education is argued as relating to Polya's "How to solve it" and more recent theories and approaches to the teaching of mathematics. Hereafter, a short presentation of these theories and approaches are given and how they relate to IBE. The approaches treated are: The problem solving tradition, the Theory of Didactical Situations, Realistic Mathematics Education, Modelling perspectives (from Mathematical Competence Theory), the Anthropological Theory of Didactics and the Dialogical and critical approaches. While summing up the authors argue that teachers need to have experience and to exercise inquiry in mathematics themselves in order to teach inquiry based and it is suggested to differ between "inquiry by teachers and inquiry in teaching" and the latter seem to require considerable collaboration among teachers for IBME to be realized in classrooms. As concluding remark the authors list ten concerns, which should be taken in to consideration when engaging in IBME and which are addressed with different weight on each concern when teaching is designed based on the existing approaches to mathematics teaching presented earlier in the paper.

Artigue, M. & Baptist, P. (2012). Inquiry in Mathematics Education , ***Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*****. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu**
This part of the booklet from the Fibonacci project describes previous and present attempts to teach mathematics in an inquiry based manner. The Fibonacci project continues some of the ideas from the German SINUS, which defined features involved in inquiry processes in mathematics teaching. The first part of the booklet section points out what approaches to math education known from the literature capture IBME features. Inquiry in science often draws on already sensed experiences, which can be further studied in cyclic processes, which do

not apply to the case of mathematics. Here the cumulative nature of the discipline is a challenge. Hence the design task is different if we want to ensure that students reach a certain learning goal, which again links to already developed knowledge within the students and form the basis for more formal proving of the concrete ideas developed during the inquiry activity. In this context ICT or CAS-tools offers special opportunities and challenges when designing IBME activities – examples are provided of different ICT designs. In the first half it is briefly argued what elements: Modelling, RME, ATD, TDS and critical approaches and problem-solving can offer IBME. But also the obstacles one might encounter when implementing it in school systems is presented in this booklet section.
In the second part a more practical (teacher) perspective is given on the IBME. From a characterization of standard teaching it is pointed out, how teaching should be altered: what should the teacher do less and more of? What actions should the students engage in and how do teachers make them do that? It is argued how these actions support the students' development of problem-solving and metacognitive competences. Finally examples are given on IBME tasks with and without computers.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W., & Léna, P. (2012). Learning through inquiry, *Re-sources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School*. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/resources
More general on the ideas of the Fibonacci project not restricted to mathematics

Artigue, M., & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39*, 365–382
The paper gives an overview of how problem solving can be regarded and approached from the point of view of TDS, ATD and "conceptual fields". A few examples are given, of how problem solving is articulated in curricula at different levels of mathematics. Most of the results presented relate to the change of focus with respect to problem solving in curricular reforms from 1945 to 2002. Changes in curricular reflect the changed role of primary education. It is described through examples how didactical research has influenced the curricular changes with respect to problem solving through design centers as IREM, which provide the support of in-service teachers to realize the intended changes. However, there are still problems when studying the realized curriculum in the classrooms, where teachers find definitions of a problem blurred and they have difficulties navigating in open processes and tend to put equal value to different answers of varying quality. It is suggested that stronger links between research and practice as well as teacher training will improve the realized curriculum.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
The book presents most of the Theory of Didactical Situations, which has been developed by Guy Brousseau, and further developed together with his research group. TDS is introduced through the example of "The race to 20". The analogy

between learning and winning a game becomes clear in the introduction and a first presentation of the phases of action, formulation and validation is given. Chapter 1 starts by a presentation of what *didactique* is in French research, concerning the objects and phenomena which are studied. Among the phenomena are some unintended effects of teaching: Topaze effect, Jourdain effect, metacognitive shifts and improper use of analogies. Further, the notions of didactical situation, adidactical situation and the didactical contract are presented. Examples are given on devolution of an adidactical situation and further paradoxes regarding the didactical contract are discussed. The paradoxes relates to students adjustment to situations and the learning potentials of doing that. In the last part emphasis is put on how the phases and situations can be modelled through the design of milieu, which leads to formulation of intended learning if the students adapt to the milieu of the situation.
Chapter 2 continues the design element by presenting the notion of epistemological obstacles, problem and what didactical engineering is from the point of view of TDS. The chapter relates to problem situations and Brousseau's study regarding the teaching of decimals. Further a distinction between what obstacles can be dealt with in classrooms and what obstacles are external to the classroom is given.
Chapter 3 provides an analysis of the possible outcomes of the teaching of decimals in French primary school from 1960s and 1970s based on previous curricular and approaches to teaching. This is continued in chapter 4, where conclusions on the mathematical, epistemological ad the didactical analysis are drawn. Based on these design examples other examples are presented and discussed: the pantograph and the scaling of drawings, the puzzle task moving from an additive to multiplicative domain, decimal numbers and the rational numbers. Next, the analysis of a situation is presented, which covers the design of a situation where the thickness of a piece of paper is determined and the analogy of the learning situation with a (didactical) game.
Chapter 5 elaborates on the notion of didactical contract both in relation to design issues and in relation to the effects on students learning. It relates to the phases of the didactical game with an emphasis on the knowledge to be taught in the designed situation.
The last chapter 6 addresses the relevance of TDS research to teacher practice including techniques for teachers and how research knowledge can become reality in the classroom practice.

Burkhardt, H., & Bell, A. (2007). Problem solving in the United Kingdom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 39*, 395–403.
The paper gives a historic overview of political decisions made throughout the last 100 years regarding teaching in mathematics. It is problematized that in recent years policy makers seem to act based on their own experiences with respect to what mathematics teaching is and should be rather than relying on research knowledge. Hence, inquiry approaches to the teaching of mathematics is not emphasizes or supported in the British school system.

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer International Publishing.
This is a survey paper, introducing elements of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), another French theory of didactics. Ordinary classroom teaching presenting and explaining procedures or formulas is characterized as the paradigm of visiting works. The paper argues that mathematics teaching should head towards a new (counter)paradigm: Questioning the world. It is proposed that teaching should be based on open questions, which students answer by engaging in the study of existing resources and employing newly gained and existing knowledge to answer the open question. In this process students are supposed to derive new questions from the given one. The design tool for this kind of teaching is called Study and Research Paths (SRP) and is pointed out by other researchers (including papers in this list) to be a promising model for IBME.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. American *Educational Research Journal*, 29 (3), 573–604.
The authors are analyzing two examples of teaching place value numeration in US grade two and three. They introduce a number of notions from American mathematics education literature to analyze the two teaching situations. They identify the situations as school mathematics and inquiry mathematics respectively. They emphasise the different role played by instructions and the verification of students' answers. They mention the work and some notions of Brousseau's TDS, however they do not wish to analyse the two teaching situations using the notion of didactical situations. They conclude that "In addition, we contend that cognitive models which document students' construction of increasingly sophisticated mathematical objects are essential to analyses of their activity as they participate in the interactive constitution of an inquiry mathematics tradition." The paper show an attempt to conceptualise how inquiry like mathematics education can be analysed and compared to traditional approaches. Most of the findings can be related to the notion of didactical contract from TDS, but it is not done in the paper.

Dewey, J. (1902). *The Child and the Curriculum*. Chicago: University of Chicago Press.
He discusses how educational systems are arranged in logical structures. However the logic is often the one produced by grownups and is the product of years of dealing with the knowledge to be taught. This might lead to challenges for child and its' learning since it might not fit with the child's experiences. On the contrary teaching should revolve around children's actions and it is concluded: "Action is response; it is adaptation, adjustment. There is no such thing as sheer self-activity possible—because all activity takes place in a medium, in a situation, and with reference to its conditions"

Dewey,J. (1929). *The Sources of a science of education*

Chapter 1: Education as a science. He argues for the need of regarding education as a science, where we share knowledge in a scientific way. Some teachers have a talent for teaching, but if we do not study, what this talent is made of, we cannot share the practice or ideas on teaching. But there is a danger of knowledge gathered as regarding education as science, will be misused as quick fixes by persons in educational systems
Chapter 2: Borrowed techniques insufficient. It is argued that techniques cannot be borrowed from natural sciences. And at this time of history, it is unclear what and how to measure objects in the field of educational research.
Chapter 3: Laws vs. Rules.
Discusses how school systems and knowledge is arranged and why this might fail in teaching and learning for all and the free play of thought, where the latter might actually be central for learning.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Henry Holt and Company, Inc.
The book discusses inquiry from different perspectives: common sense and scientific inquiry, the structure of inquiry and construction of knowledge, working hypotheses etc. The main emphasis is put on inquiry in science. A chapter is devoted to the mathematical discourse of inquiry, where it is concluded that: “The considerations here adduced have an obvious bearing upon the nature of test and verification (See ante, p. 157). They prove that in the practice of inquiry verification of an idea or theory is not a matter of finding an existence which answers to the demands of the idea or theory, but is a matter of the systematic ordering of a complex set of data by means of the idea or theory as an instrumentality.” Hence it is the generality, which can be drawn from the concrete experiment or experience, which is interesting. Different notions and concepts from mathematics (e.g. isomorphic, a relation etc.) are discussed in the context of inquiry and in mathematics and to what extend they do mean the same.

Dorier, J. & Garcia, F.J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(6).
The paper argues about the conditions and constraints which might favour, or on the contrary hinder, a large-scale implementation of inquiry-based mathematics and science education, on the basis of our work within the PRIMAS project in 12 European countries. The model of the educational system provided by the Chevallard’s anthropological theory of didactics (ATD) as a systemic institutional perspective helped in structuring the analysis of conditions and constraints of the systems in these countries. It is a complement to the approach through the analysis of teachers’ beliefs and practices (Engeln et al. in ZDM Int J Math Educ 45(6) 2013). In the approach, teachers are actors of institutions, representing some disciplines, embedded in a school system, sharing some common pedagogical issues, are considered in relation to society. The analysis is organized according to four levels of institutional organization that co-determine both content and didactical aspects in the teaching of mathematics and sciences: society, school, pedagogy and disciplinary.

Drobnič Vidic, A. (2011). Impact of Problem-based Statistics Course in Engineering on Students' Problem Solving. *International Journal of Engineering Education* 27(4):885-896.

Abstract. In this comparative study, we examined the level of basic discipline knowledge and problem-solving abilities in problem-based learning (PBL), incorporated into a traditional curriculum in an introductory statistics course. Progressively less structured, less familiar and more open problems were presented to engineering students. Engineering problems triggered the learning of new statistical contents and activated small group problem solving. Students as a group determined the learning goals, individually searched for information, and together analysed the information collected. Such a problem-solving process with real-world problems is often seen as unstructured and time-consuming. An experiment was carried out to find out whether this approach yields adequate basic statistical knowledge and improves problem solving. Two randomised groups of students from the same engineering programme were compared: one group used PBL and the other followed the traditional method of instruction. The results of statistical analysis showed that engineering students with the PBL approach acquired sufficient basic statistical knowledge and were better able to solve statistical problems from the field of engineering than the students who followed the traditional way of instruction. Some characteristics of the implementation of the course are discussed, as well as some limitations of the study.

Drobnič Vidic, A. (2015). First-year students' beliefs about context problems in mathematics in university science programmes. International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (5), pp. 1161–1187.

Abstract: Mathematics-related beliefs play an important role in the willingness to engage in academic activities in mathematics education. Such beliefs might not be consistent with the beliefs students hold about context problems that require sufficient mathematical knowledge and the application of such knowledge to various real-life situations. This study was designed to examine differences between students' mathematics-related beliefs and beliefs about context problems. The variations in these beliefs could explain the different amounts of effort students put into solving context problems on one hand and in solving typical mathematical tasks on the other. The study included 261 first-year students: students in one group were enrolled in academically more demanding study programmes (n = 162), while students in the other group (n = 99) were enrolled in less demanding study programmes. The results revealed significant differences in beliefs between the two groups. A detailed analysis indicates the factors which need to be emphasised when designing problem-based mathematics education to promote the successful problem solving of context problems.

Drobnič Vidic, A. (2016). Using a Problem-Based Leaning Approach to Incorporate Safety Engineering into Fundamental Subjects. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*.142 (2).

Abstract. Safety is considered as an important area of engineering education, but it is often not addressed adequately in an engineering curriculum. Contents of safety engineering were incorporated in an introductory statistics course through problem-based learning (PBL) approach. Novices were learning statistical contents via PBL problems from the field of safety engineering. They were divided in two groups according to the partial assessment option they chose: the group with classical assessment and the group with assessment of an independent PBL engineering problem that was designed in accordance to the campaign coordinated by the European Agency for Safety and Health at Work. In the problem, students were analyzing the quality of installation of fire extinguishers in more than 200 buildings, as well as their maintenance. The aim of our study was to find out if the assessment of such a problem can be used to assess students' holistic statistical knowledge, if students can get new insights in the field of safety engineering, and if such assessment suits the ABET criteria. Students' questionnaire also gave us information on the students' perception of the difficulty of PBL approach in both assessment options.

Drobnič Vidic, A. (2017). Teachers' Beliefs about STEM Education Based on Realisation of the "Energy as a Value" Project in the Slovenian School System. *International journal of engineering education* (in press).
Abstract. The cross-curricular project Energy as a Value described in this study involved almost all subjects in the K-12 curriculum of the so-called technical gymnasium. It became the framework for an effective Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) education. Although the project offered interdisciplinary connection of all STEM subjects, promoted problem-based learning and pointed out to applications of subjects' contents to engineering profession it was not added up as a successful one. Teachers' satisfaction was questionable at the end of the four-year project time. Teachers were not initiators for a new project. The Engineering Education Beliefs and Expectations Instrument for STEM education is used in order to find the reasons for such an ambitious project not being carried out again. The instrument documents teachers' beliefs and expectations about pre-college engineering instruction, college preparation, and career success in engineering, and to compare teachers' views. It is applied to teachers of technical gymnasiums in Slovenia that teach STEM subjects in order to find out if there are differences between beliefs of teachers that carried out the Energy as a Value project and teachers from other technical gymnasiums, as well as differences between beliefs of mathematics / science teachers and technology-based / engineering teachers. The results of statistical analyses give answers about obstacles that teachers who carried out the ambitious STEM education in a particular school system might be confronted with.
Keywords: STEM education; teachers' beliefs; K-12 curriculum; interdisciplinary engineering project; project-based learning.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebraic Approaches in the Concept of "Limit" and the Impact of the "Didactic Contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7 (4), 765–790.

This paper reports on a study with a large number of upper secondary students' engagement in problems regarding the concept of limit, where the students were supposed to change freely from the algebraic to the geometric domain and back again. To what extend students succeeded in the none-routine problems requiring a change of domain depended on the degree by which the students were bound by a traditional didactical contract.

Ellerton, N. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. Educational Studies in Mathematics, 83, 1, pp. 87-101.
The paper starts arguing for the importance of being able to question the content, which you are supposed to learn and learn, to question existing knowledge requires creativity and imagination and is how advances are made in science. Therefor this should be promoted in the teaching. The paper sketches some designs created by pre-service lower secondary teachers have designed teaching activities engaging students in posing problems.

Engeln, K., Euler, M., & Maaß, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. Advance online publication. http://link.springer.com/journal/11858
The paper presents some of the results of a questionnaire answered by the teachers engaged in the PRIMAS project. It shows that teacher in general have a positive attitude towards IBL, but also that they consider a lack of resources as a major obstacle to implementing IBL. Also national restrictions in the educational system are pointed out as challenging. By contrast, classroom management is not regarded as a major problem by the teachers.

Euler, M. (2011). *PRIMAS survey report on inquiry-based learning and teaching in Europe*
The PRIMAS project showed that in most EU countries at least some teachers in mathematics and science have experience with Inquiry Based Learning (IBL), but there are differences in the interpretation of the notion, hence an IBL lesson can appear very different in one country compared to another. It is suggested that initiatives supporting the implementation of IBL is initiated around teachers, who have some experience already and an interest in pedagogical or didactical issues. The project identified three main factors making the implementation of IBL problematic: classroom management, resources and restrictions from the educational system in specific countries.
García, F. J. (2013) *PRIMAS guide for professional development providers*.
The report lists a number of concrete initiatives for how to teach in-service teachers to use IBL, the theoretical approaches captures modeling, Lesson Study and to fit IBL with local requirements for in-service teacher training. The modules of the PRIMAS in-service teacher training covered the following topics: student-led inquiry, tackling unstructured problems, learning concepts through inquiry,

asking questions that promote IBL, students working collaboratively, building on what students already know, self and peer assessment.

Godino, J.D., Batanero, C., Canadas, G., Contreras, J.M. Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.). ***Proceeding of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*****, 2015, Prague, Czech Republic. pp.2642-2648.**
The paper describes different theories that assume that learning mathematics should be based on constructivist methods where students inquire problem-situations and assign a facilitator role to the teacher (RME, TDS), and contrast them to the theories that advocate for a more central role to the teacher, involving explicit transmission of knowledge and students' active reception. The authors hold the view that mathematics learning optimization requires adopting an intermediate position between these two extremes models.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. ***Journal of Curriculum Studies, 32*****, 6, pp. 777-796.**
The authors give an account of the main contributions to mathematics education by Hans Freudenthal, who regarded mathematics as a human activity. He continued the idea of guided reinvention (also known from Dewey's work), which questioned the formation of curricula at the time. He wanted to promote the idea of putting processes rather than fixed pieces of content as a central element of what students should learn. As a result mathematics teaching should be based on modeling problems where students mathematize matter from reality, but with no clear intra- and extra mathematical reality. Later a difference between vertical and horizontal mathematization was introduced. Freudenthal criticized the role played by generic theories on pedagogy or learning theories in mathematical education research. Rather he proposed the approach of Realistic Mathematics Education (RME), which is a phenomenological approach to mathematics teaching.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2011). Mathematics teacher education advanced methods: an example in dynamic geometry. ***ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*** **(3), 399–411.**
An example of how in-service teacher training can support teachers in the design or development of inquiry based teaching employing a dynamic geometry computer program (ICT based IBME). The teachers in this study are teaching at upper secondary level and the theoretical approach is the very recent theory of documentational genesis.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. ***Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.***
This is a survey paper, which introduces the central constructs and notions from RME and Dutch didactics tradition, starting with contributions by Hans

Freudenthal, towards more recent developments. Three primary school examples are provided in the text.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics, 59(13)*, 113–151.
The paper presents some of the challenges when teaching is designed to offer students a larger degree of initiative in the classroom and how that increases the uncertainty of the teacher. By employing the notions from TDS the authors analyse two case studies of teaching, where the authors have had no influence on teaching design or the conduct of the teaching. Based on this the authors discuss the challenges and possibilities for bringing constructivist approaches to teaching into the classroom.

Kilpatrick, J. (2014). History of Research in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 267-272. Springer publishing.
The text gives a short overview of how the research field of mathematics education started to evolve, and that this happened much later than the establishment of a practice. Short account of who took the initiative to form institutions (such as ERME, ICMI, IREM and others) where mathematicians and educational researcher could meet and discuss. The ideas of Felix Klein and the relation between research mathematicians' practice, and the teaching and learning of mathematics, are touched upon. Other more recent problems in the field are outlined, such as the actual and potential roles of technology in mathematics teaching. The text presents an overview of research in mathematics education, and therefore does not present specific research in any detail.

Kilpatrick, J. (2008). The Development of Mathematics Education as an Academic Field. In The first Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). *Reflecting and shaping the world of Mathematics Education*, pp. 25-39
First an historic overview is provided with the initiation of commissions for the development of mathematics education, where Felix Klein was an important figure. He introduced a reform program based on an alliance between teachers, scientists and engineers. The idea was to change teacher education to change the teaching in the direction of promoting practical instructions and the development of spatial intuition. It is discussed what mathematics is (which is not easily defined by mathematicians) and what education is. Different approaches are presented such as e.g. Nordic pedagogy tradition and the francophone tradition of didactic. It is argued that mathematics as a field of study as well as a practice revolves around teaching. It is through teaching it is promoted and constituted. This leads to the question (considered by others as well) what is and should be the relation between mathematics as a research field and as a discipline to be taught in different school settings.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In Holton, D. (ED.) *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 127-135). Springer Netherlands.
It is argued that engaging in a mathematics course is not equivalent with students becoming mathematicians, however it might require that they attempt to act like mathematicians and the class form a scientific community debating mathematics. Hence the paper proposes to orchestrate the teaching as a scientific debate. The debate can be initiated as "unplanned" debate based on a question raised by a student, a planned situation with the intention to introduce a new concept or overcome an epistemological obstacle, or the deepening of a concept or theory. Examples are provided of such initiators from first year of university mathematics teaching (including cross disciplinary examples), but several examples might be relevant for the secondary level as well.
For the scientific debate to function it is important that the teacher give enough time for the students to develop their arguments individually, that he/she writes all arguments on the blackboard without judging them and the teacher should strive to maximize the number of students who engage and involve themselves in discovering a rational solution to the problem or conjecture dealt with. The students responsibility is to believe in the conjecture he or she argues for, develop rational arguments for the conjecture and finally to formulate the arguments so convincingly that both fellow students and the teacher is persuaded. In this way the didactical contract of the teaching of mathematics is explicitly changed to one, where the responsibility of students as the one acting, formulating and validating mathematical answers has become explicit. The paper draws on notions from TDS.

Legrand, M. (n.d.) *Les deux ateliers proposés par Marc Legrand reposent sur: Le "Débat scientifique" en cours de mathématiques*. Retrieved from: http://kordonnier.fr/IMG/pdf/legrand.pdf
The text provides further arguments regarding the haw scientific debate changes the didactical contract in the teaching and how mathematical activity (of mathematicians) resonates with scientific debate. Further comments from students are provided. Some of those find it difficult to imagine Scientific debate being introduced in primary education, although they found the teaching enlightening and good. Many students find the debates time consuming in the sense, that they are concerned if a Scientific debate course will actually cover the curriculum.

Margolinas, C. & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 47*(6).
The paper discusses the notion of didactical engineering which has influenced and characterized contemporary research in mathematics education in France. In the paper, the following from an insider's and an outsider's perspective is addressed: (1) the way this notion is theoretically grounded, (2) the kinds of design research practices has it led to and is leading to, and (3) the way it relates to the design

research paradigm. The paper compares the Dutch view on realistic mathematics education and the characteristics of the didactical engineering in France.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of iquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM Mathematics Education, 45,* pp. 779-795
Abstract: This synthesis is designed to provide insight into the most important issues involved in a large-scale implementation of inquiry-based learning (IBL). We will first turn to IBL itself by reflecting on (1) the definition of IBL and (2) examining the current state of the art of its implementation. Afterwards, we will move on to the implementation of IBL and look at its dissemination through resources, professional development, and the involvement of the context. Based on these theoretical reflections, we will develop a conceptual framework for the analysis of dissemination activities before briefly analyzing four exemplary projects. The aim of our analysis is to reflect on the various implementation strategies and raise awareness of the different ways of using and combining them. This synthesis will end with considerations about the framework and conclusions regarding needed future actions.

Miyakawa, T., & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72 (2), 199–218.
The paper analyses and compares two didactical designs on proportional reasoning. The one design is the enlargement of a puzzle known from the literature on TDS. The other design is based on the Japanese tradition of Lesson Study and Open-ended Approach. Both approaches carry an element of inquiry and both share the idea of students learning from potential mistakes.

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., & Threlfall, J. (2009). Open-Start Mathematics Problems: An Approach to Assessing Problem Solving. *Teaching Mathematics and its Applications, 28* (1), 21–31
The paper gives an introduction to problem solving and what defines an Open-start problem, which is characterized by having multiple starting points but only one answer. The paper suggests how these latter problems can be used for assessment purposes, and by changing assessment it is proposed that classroom activities as well will be more inquiry based.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 1-24.
The paper discusses the some fundamental questions for research in mathematics education: what challenges are the educational system facing, and why the teaching of mathematics should be of any interest of research mathematicians. It is formulated in the paper what is meant by a theory, what is mathematics education as a design research and what comes of this kind of research. Several findings are discussed such as perspectives on learning, known obstacles, the role of ICT and the conclusions points towards the need of students develop more

heuristic competences through none-routine mathematical problems, which can be interpreted as more inquiry-based approaches.

Nohda, N. (1995). Teaching and Evaluating Using "Open-Ended Problems" in Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 27 (2), 57–61.

Nohda, N. (2000). Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (1), 39–53
An introduction to open-ended approach is given in the paper: based on an initial problem, students' hypotheses and first answers lead to formulate new questions for further inquiry. Examples of different problems are provided, and it is discussed how the teacher deals with the variety of students' answers. The teaching situations are sketched with an emphasis on the communication between the students and the teacher. At the end it is suggested that the link between open-ended approach and modeling should be studied further, and how this kind of teaching affect students' attitudes towards mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton, NJ: Princeton University Press.
This book has been deemed seminal by other researchers in problem solving and IBME as the starting point of the inquiry based approach to teaching and learning of mathematics. Polya describes the processes involved in problem solving as the core activity of a mathematician. He emphasizes the creativity and attitude towards mathematics needed to engage in problem solving activities. He introduces the notion of heuristics in the process of solving problems.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.
An elaboration and extension of the ideas of Polya. A detailed introduction to what problem solving is, what resources the students are supposed to draw on and what attitudes towards mathematical problems are needed.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 334–370). New York: MacMillan Publishing Company.
The book chapter gives an introduction to problem solving mentioning Piaget and constructivism, the impact of teachers' epistemological, ontological and pedagogical view on mathematics. He discusses Polya's ideas on heuristics and its relation to metacognition. The paper contains general ideas on how to guide or assist student (university level) in developing problem solving skills and competences. However it is still (in 1992 at least) a challenge how to teach problem solving, since some kind of consensus seem to be reached regarding the definition of what it is.

Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2013). A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Volume 45, Issue 6, pp 901–909.
An discussion of the challenges which implementation of IBMT could face in the United states, considering factors such as current curricula, the capacity of mathematics teachers, and public demands and beliefs concerning the nature and purpose of school mathematics.

Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1, pp. 1-7.
This is an overview paper introducing the current state of problem posing research in mathematics education. The paper starts by arguing how problem posing support students' development of heuristic competences and how this relates to pursuing ones' own questions. The paper is an introduction to a special issue of ESM and it provides and overview of the approaches to nurture students to pose questions with mathematical content, which can be found in the special issue.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking & Learning*, 10, 313–340.
The paper provides a literature review on classroom discussions, which leads to the presentation of the authors' model involving: anticipating, monitoring, selecting, sequencing, and connecting. It is concluded that: "Thus, the five practices do not provide an instant fix for mathematics instruction. Instead, they provide something much more important: a reliable process that teachers can depend on to gradually improve their classroom discussions over time".

Ulm, V. (2012). Inquiry-based mathematics education in primary school: Overview and examples from Bavaria/Germany. In P. Baptist & D. Raab (Eds.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School. Implementing Inquiry in Mathematics Education* (pp.65–81). Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/resources
An example or model of how to design inquiry based learning environments, followed by some German examples from lower secondary school on basic number theory.

Pojmovnik posebnih pojmova koji se koriste u ovoj brošuri

Neki se članci temelje na formulaciji koju smo preuzeli s interneta koji je općenito dobar izvor kada je riječ o stjecanju prvotnog dojma o tome što pojedini pojam označava. Navodimo ih radi čitatelja, a oni nipošto ne bi smjeli biti zamjena za nužno detaljno proučavanje materijala koji se nalaze u bibliografiji.

Filozofija učenja i znanja

Epistemologija – u užem smislu filozofska disciplina koje se bavi teorijom znanja, prirodom znanja, njegovim osnovama te racionalnošću vjerovanja. Epistemološki se aspekti u matematičkom obrazovanju u širem smislu bave strukturno specifičnim područjima matematike te preprekama i poteškoćama s kojima se učenici suočavaju zbog takve strukture.

Konstruktivizam – filozofsko stajalište o načinima na koje ljudska bića uče. Konstruktivizam se poglavito povezuje s Jeanom Piagetom (1896.-1980.), slavnim švicarskim psihologom koji je dio karijere posvetio provođenju kliničkih studija o tome kako djeca, između ostaloga, uče osnovnu matematiku. Smatrao je da se ljudsko znanje temelji na raznim vrstama mentalnih shema te je ustvrdio da se nastajanje tih shema (učenje) odvija tako što se, kako je sročio, postojeće sheme asimiliraju i smještaju u iskustvo učenika. Konstruktivisti smatraju da se učenje odvija dok učenici aktivno sudjeluju u procesu izgradnje smisla i znanja umjesto da pasivno primaju informacije. Učenici su ti koji stvaraju značenje i znanje.

Opće obrazovanje (uključujući žargon i široke pojmove)

Pristup u obrazovanju – skup načela poučavanja, a u širem se smislu odnosi na način interakcije s učenicima koji potiče učenje. Može ga se opisati kao prihvaćenu teoriju u matematičkom obrazovanju ili neformalnije kao popis načela na temelju vjerovanja o prirodi matematičkog znanja i učenju istog.

Metoda poučavanja – obuhvaća načela i metode koje se koriste za poučavanje, a nastavnik ih primjenjuje kako bi učenici postigli željeni ishod učenja. Na odabir metoda djelomično utječe sadržaj koji će se učiti (npr. kvadratne jednadžbe), a djelomično ono što se o učenicima već zna ili pretpostavlja (npr. poznavanje kvadratnog korijena, zanimanje za temu, sposobnost koncentracije i samostalnog rada). Metode poučavanja obuhvaćaju predavanje, vođenje i organiziranje rada učenika (kroz rasprave u razredu, skupne projekte, rad u paru itd.)

Ishod učenja – očekivanje kada je riječ o znanju ili vještinama koje je učenik stekao nakon učenja. Često su takva očekivanja prilično implicitna. Smatramo da nastavnici koriste ishode učenja samo ako su oko toga jasni, primjerice, tijekom priprema, rada u učionici i procjene.

Tradicionalno obrazovanje – pojam (ne pristup!) koji se odnosi na ustaljene običaje koji su se dugo koristili u školama, a često nisu bili jasno artikulirani. Neke vrste reforme obrazovanja promiču usvajanje alternativnih obrazovnih praksi poput, primjerice, snažnije usmjerenosti na potrebe pojedinih učenika i samokontrolu. Mnogi reformatori tvrde da se protive tradicionalnim metodama koje su usmjerene na nastavnika, a takve su metode uključivale memorizaciju i učenje napamet. Zapravo, pridjev „tradicionalno" često se koristi dosta neprecizno.

Pasivno učenje – metoda učenja ili poučavanja u kojoj učenici primaju informacije od nastavnika te ih internaliziraju i to često tako da ih nauče napamet ili memoriziraju, a učenik od nastavnika ne dobiva nikakvu povratnu informaciju.

Učenje napamet - tehnike memoriziranja koje se temelje na ponavljanju. Bit je u tome da će netko brže zapamtiti metode ili činjenice ako ih što više ponavlja. Obično se smatra da učenje napamet nije dovoljno, a suprotne alternativne metode imaju zvučne nazive kao što su smisleno učenje, asocijativno učenje i aktivno učenje.

Aktivno učenje – učenje koje se zasniva na vlastitim postupcima i inicijativi učenika, što obuhvaća sudjelovanje u organizaciji i procjeni njihovog učenja.

Nastava usmjerena prema učenicima – ono što se treba postići metodama poučavanja koje pažnju udjeljuju učeniku, a ne predavanju nastavnika. Cilj je razviti autonomiju i samostalnost učenika tako što se učenicima dodjeljuje veća odgovornost u procesu učenja.

Istraživački usmjereno učenje – oblik aktivnog učenja koji proizlazi iz odgovaranja ili postavljanja pitanja, problema ili scenarija umjesto toga da se samo usvajaju poznate činjenice ili koriste već ustaljeni načini stjecanja znanja. U procesu često sudjeluje posrednik. Istraživači određuju i istražuju probleme i pitanja kako bi razvili vlastita rješenja ili znanje. Istraživački usmjereno učenje obuhvaća problemski usmjereno učenje te se naročito koristi u istraživanjima manjih razmjera i projektima, a isto tako i u velikim istraživanjima.

Učenje otkrivanjem – tehnika istraživački usmjerenog učenja koja se ponekad predstavlja kao konstruktivistički pristup obrazovanju. Učenje otkrivanjem odvija se u situacijama rješavanja problema u kojima se učenik oslanja na vlastito iskustvo i prethodno znanje. Radi se o metodi poučavanja u kojoj su učenici u interakciji sa svojim okruženjem tako što istražuju i upravljaju objektima, razmišljaju o pitanjima ili prijeporima ili izvode eksperimente.

Podupiranje (obrazovno podupiranje) – potpora koja se ukazuje tijekom procesa učenja, a ona je prilagođena potrebama učenika s ciljem da se učenicima pomogne u postizanju ciljeva učenja. Kombinira pružanje potpore (resursi, zahtjevi zadaci i smjernice), davanje savjeta i treniranje. Potpora se, kao prilikom gradnje zgrada, postupno uklanja kako učenici razvijaju autonomne strategije učenja.

Heuristika – svaki pristup rješavanju problema, učenju ili otkrivanju koji upotrebljava praktičnu metodu za koju se ne jamči da je optimalna ili savršena, ali je dovoljna za neposredne ciljeve.

Uvid – razumijevanje uzroka i posljedice unutar određenog konteksta ili iznenadno otkriće točnog rješenja nakon neuspješnih pokušaja na temelju metode „pokušaja i pogreške“. Pretpostavlja se kako su rješenja temeljena na uvidu otpornija nego rješenja do kojih se nije došlo uvidom.

Aha! trenutak (Eureka efekt) – odnosi se na često ljudsko iskustvo da se odjednom shvati pojam ili problem koji su prije bili nerazumljivi. Takvi učinci u određenim slučajevima obuhvaćaju intuiciju i sjećanje, ali to su većinom neobjašnjive pojave.

Razumijevanje – odnos između onoga koji spoznaje i predmeta spoznaje. Općenito govoreći, razumijevanje je koristan, ali dosta nejasan pojam. Za nastavnika „razumijevanje algebre“ može biti brz način da ocijeni koliko izvedba zadovoljava izričitije kriterije, općenito, veća preciznost oko „razumijevanja“ važan je cilj teorijskih okvira obrazovanja i učenja.

Rješavanje problema – postizanje cilja u situaciji u kojoj učenici automatski ne prepoznaju ispravan način rješavanja ili rješenje. Neko je pitanje problematično ze jednog učenika (koji ne zna nijednu neposrednu metodu rješavanja), ali ne i za drugog (kojemu je takva metoda poznata). Drugim riječima, rješavanje problema može se odviti pod određenim uvjetima koji se odnose na učenika.

Problemski usmjereno učenje – pedagogija usmjerena na učenika, a učenici u njoj kroz iskustvo rješavanja problema uče o sadržaju.

Teorija didaktičkih situacija

Institucionalizirano znanje (ponekad se naziva *javno, dijeljeno* ili *službeno znanje*) – znanje koje se nalazi u udžbenicima, časopisima i resursima, a ono predstavlja sintezu ili ishod različitih matematičkih djelatnosti. Lako ga je primijetiti s obzirom na to da je eksplicitno. U nekom jezicima postoji poseban izraz za institucionalizirano znanje. Primjerice, u francuskom je to riječ *savoir.*

Osobno znanje (ponekad se naziva *individualno znanje*) – znanje koje učenici stječu tijekom interakcije s matematičkim problemom (okruženjem). Do njega je često teško doći promatranjem jer može biti prešutno, posebice kada se radi o individualnom radu. U nekim jezicima postoji poseban izraz za osobno znanje. Primjerice, u francuskom je to riječ *connaissances.*

Didaktička situacija – situacija poučavanja i učenja u kojoj nastavnik ima jasnu ulogu posrednika.

Didaktičko okruženje – okruženje s kojim je učenik u interakciji dok stječe novo znanje. Sastoji se od problema, predmeta kao što su olovka, papir, ravnalo, kalkulator, CAS alati (sustavi za računalnu algebru), slagalice itd. Didaktička situacija često uključuje doprinos nastavnik i drugih učenika. Učenje se odvija tako što učenici svoje osobno znanje prilagođavaju didaktičkom okruženju.

Adidaktička situacija – interakcija učenika s okruženjem (matematičkim problemom) bez miješanja nastavnika.

Ciljano znanje – matematička tvrdnja, metoda ili pojam koje nastavnik u didaktičkoj situaciji određuje kao cilj učenja za svoje učenika. (Didaktička je situacija uvijek situacija *za* nešto. Točnije, za ciljano znanje koje je poznato nastavniku, ali na početku ne i učenicima),

Faza primopredaje (devolucije) – faza tijekom koje nastavnik okruženje predaje učenicima. Primopredaja (devolucija) se odnosi na prijenos odgovornosti za rješavanja problema ili barem pokušaje rješavanja na učenike. Ponekad je potrebno nekoliko primopredaja (devolucija) kako bi se došlo do ciljanog znanja. Međutim, to se treba provesti kontrolirano kako ne bi došlo do nepotrebne trivijalizacije ili fragmentiranja problema budući da to može dovesti do postizanja manje razine znanja od ciljanog. (vidi također *Didaktički ugovor*).

Faza djelovanja – faza tijekom koje učenici samostalno rade na problemu.

Faza formulacije – faza tijekom koje učenici formuliraju ishode faze djelovanja (početne ideje, hipoteze ili strategije rješavanja problema, općenita rješenja).

Faza potvrđivanja – faza tijekom koje učenici testiraju svoje strategije ili hipoteze u odnosu na okruženje kako bi utvrdili valjanost metoda i rješenja.

Faza institucionalizacije – faza tijekom koje nastavnik izravno iznosi institucionalizirano znanje. To može biti poučavanje poput predavanja ili se može odviti spontano. Drugi oblici, kao što su ideje koje se često razvijaju u sklopu TDS-a, čvrsto su povezani s prethodnom fazom. Stoga se u ovoj fazi samo reformulira osobno znanje koje su učenici stekli te se izričito priznaje da je takvo znanje u skladu sa službenim znanjem iza kojeg stoji (obrazovna) ustanova.

Didaktički ugovor – skup međusobnih očekivanja između nastavnika i učenika koja se tiču njihovih odgovornosti u konkretnoj didaktičkoj situaciji (ili njezinom dijelu). Ugovor je obično implicitan, a njegove učinke možemo zamijetiti samo u djelovanju nastavnika i učenika. Neki od ovih učinaka prilično su općeniti i česti u nastavi matematike. Primjerice, inzistiranje učenika na tome da im nastavnik mora dati odgovore do kojih ne mogu odmah doći ili tendencija nastavnika da na manje-više očite načine kao što su davanje znakova ili smanjenje obima izvornog zadatka udovolji učenicima. TDS imenuje i proučava neke najčešće učinke. Iznimno je poželjno da se nastavnici i istraživači upoznaju s ovom klasifikacijom. Ako želite saznati više, preporučujemo Brousseau (1997.), Poglavlja 1 i 5.
Didaktički inženjering - istraživačka metodologija koja se zasniva na kontroliranom planiranju i isprobavanju nastavnih sekvenci te usvajanju unutarnjih modaliteta potvrđivanja na temelju usporedbe analizi početnog i

kasnijeg stanja. Međutim, nakon što se pojavio ranih 1980-ih godina, izraz didaktički inženjering također se upotrebljavao za označavanje razvojnih aktivnosti koje se odnose na planiranje obrazovnih resursa na temelju rezultata istraživanja ili konstrukta i na temelju rada didaktičkih inženjera. (Izvor: Enciklopedija matematičkog obrazovanja).

Realistično matematičko obrazovanje

Realistična situacija – odnosi se na situaciju koja je učeniku „realna“, a to se odnosi na predmete ,pojmove itd. koji su učeniku poznati. Situacija je učenicima smislena. Oni se u njoj osjećaju ugodno i potiče ih na razmišljanje jer se nadovezuje na njihovo prethodno znanje. Može se odnositi na svakodnevni (stvarni, realni) život, ali to nije nužno.

Bogata (struktura ili kontekst) – dopuštaju se različiti pristupi ili rješenja, povezuju se različiti aspekti znanja učenika, korist premašuje situaciju kojom se nešto uvelo.

Matematizacija - cjelokupna organizacijska djelatnost matematičara koja obuhvaća stvaranje aksiomatskih sustava, formalizaciju, stvaranje smislenih mreža pojmova i procesa, izgradnju algoritama, predstavljanje i pojednostavnjenje itd.

Anti-didaktička inverzija – krajnja točka rada matematičara postaje polazišna točka za poučavanje matematike.

Izvirući modeli – stvaranje mentalnih shema pojmova i procesa u glavi učenika, a takve se sheme odnose na problemsku situaciju. Modeli neformalne matematičke djelatnosti razvijaju se u modele matematičkog mišljenja.

Vođeno otkrivanje – proces u kojem učenici rekonstruiraju i razvijaju matematički koncept u problemskoj situaciji, a potporu (smjernice) pružaju knjige, kolege ili nastavnik.

Horizontalna matematizacija – modeliranje ili prijenos problema iz stvarnog svijeta u matematički diskurs.

Vertikalna matematizacija – razvoj metode ili teorije za rješavanje matematičkog problema.

Didaktička fenomenologija – umijeće pronalaska pojava, konteksta ili problemskih situacija koje zahtijevaju da ih se organizira pomoću matematičkih alata, a učenike potiču na razvoj ciljanih matematičkih koncepata.